Б. П. Аллахвердиев, О самосопряженных и несамосопряженных расширениях симметрического оператора порожденного бесконечной матрицей Якоби, *Матем. заметки*, 1991, том 50, выпуск 5, 3–8

Математические заметки

том 50 выпуск 5 ноябрь 1991

О САМОСОПРЯЖЕННЫХ И НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ РАСШИРЕНИЯХ СИММЕТРИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА, ПОРОЖДЕННОГО БЕСКОНЕЧНОЙ МАТРИЦЕЙ ЯКОБИ

Б. П. Аллахвердиев

Рассматривается минимальный симметрический оператор L_0, порожденный бесконечной матрицей Якоби с матричными элементами, действующий в гильбертовом пространстве l^2 ([0, ∞); E) ($\dim E = n < \infty$) с индексами дефекта (n, n). В терминах граничных условий на бесконечности дается описание всех самосопряженных, максимально диссипативных, аккумулятивных и других расширений симметрического оператора L_0. Подобная задача в скалярном случае ($\dim E = 1$) решена в работе [1].

1. В этом пункте, следуя монографиям [2, 3], приведем необходимые нам в дальнейшем сведения о бесконечной матрице Якоби с матричными элементами.

Бесконечной матрицей Якоби с матричными элементами называется матрица вида

$$\Lambda = \begin{pmatrix} B_0 & A_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ A_0 & B_1 & A_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & A_1 & B_2 & A_2 & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix},$$

где A_k, B_k — самосопряженные операторы, действующие в n-мерном ($n < \infty$) евклидовом пространстве E, причем $\det A_k \neq 0$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Для всякой вектор-последовательности $y = \{y_k\}_0^\infty$, ($y_k \in E$, $k = 0, 1, 2, \ldots$) через Λy обозначим вектор-последовательность, компоненты $(\Lambda y)_k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) которой определяются по формуле $(\Lambda y)_0 = B_0 y_0 + A_0 y_1$, $(\Lambda y)_k = A_{k-1} y_{k-1} + B_k y_k + A_k y_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$. Далее, для произвольных двух вектор-последовательностей $y = \{y_k\}_0^\infty$ и $z = \{z_k\}_0^\infty$ через $[y, z]$ обозначим последовательность чисел с компонентами

$$[y, z]_k \equiv (A_k y_k, z_{k+1})_E - (A_k y_{k+1}, z_k)_E \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Легко проверяется следующая формула Грина:

$$\sum_{k=0}^{N} \{((\Lambda y)_k, z_k)_E - (y_k, (\Lambda z)_k)_E\} = -[y, z]_N, \tag{2}$$

где N — произвольное натуральное число.

Введем гильбертово пространство $l^2([0, \infty); E)$, состоящее из всех вектор-последовательностей $y = \{y_k\}_0^\infty$ таких, что $\sum_{k=0}^\infty \| y_k \|_E^2 < \infty$ со скалярным произведением $(y, z) = \sum_{k=0}^\infty (y_k, z_k)_E$. Далее, обозначим через D линейное множество всех элементов $y \in l^2([0, \infty); E)$ таких, что $\Lambda y \in l^2([0, \infty); E)$. На D определим оператор L равенством $Ly = \Lambda y$.

Из формулы (2) следует, что для всех $y, z \in D$ существует и конечен предел $\lim\limits_{N\to\infty} [y, z]_N = [y, z]_\infty$. Поэтому, переходя в (2) к пределу при $N \to \infty$, получаем, что для произвольных двух элементов y и z из D справедлива формула

$$(Ly, z) - (y, Lz) = -[y, z]_\infty. \tag{2'}$$

В $l^2([0, \infty); E)$ рассмотрим линейное всюду плотное множество D_0', состоящее из финитных векторов (т. е. из векторов, имеющих лишь конечное число отличных от нуля компонент). Обозначим через L_0' сужение оператора L на D_0'. Из формулы (2′) следует, что оператор L_0' является симметрическим. Следовательно, он допускает замыкание. Замыкание оператора L_0' обозначим через L_0. Область определения D_0 оператора L_0 состоит из тех и только тех векторов $y \in D$, которые удовлетворяют условию

$$[y, z]_\infty = 0, \quad \forall z \in D. \tag{3}$$

L_0 является замкнутым симметрическим оператором с индексами дефекта (m, m), где $0 \leqslant m \leqslant n$. Оператор L является сопряженным к оператору L_0: $L = \overset{*}{L_0}$. Операторы L_0 и L называются соответственно минимальным и максимальным операторами.

Обозначим через $P(\lambda) = \{P_k(\lambda)\}_0^\infty$ и $Q(\lambda) = \{Q_k(\lambda)\}_0^\infty$ операторные решения уравнения (разностного уравнения второго порядка на полуоси)

$$(ly)_k \equiv A_{k-1}y_{k-1} + B_k y_k + A_k y_{k+1} = \lambda y_k \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$P_0(\lambda) = I,\ P_1(\lambda) = A_0^{-1}(\lambda I - B_0),\ Q_0(\lambda) = 0,\ Q_1(\lambda) = A_0^{-1}. \tag{4'}$$

$P_k(\lambda)$ является многочленом от λ степени k и называется многочленом первого рода, а $Q_k(\lambda)$ является многочленом от λ степени $k - 1$ и носит название многочлена второго рода.

2. В этом пункте будем предполагать, что оператор L_0 имеет индекс дефекта (n, n), так что для матрицы Λ имеет место «абсолютно неопределенный случай» (см. [2]).

Положим $u = P(0)$, $v = Q(0)$, так что $u = \{u_k\}_0^\infty$ и $v = \{v_k\}_0^\infty$ являются решениями уравнения (4) при $\lambda = 0$, удовлетворяющими начальным условиям

$$u_0 = I,\ u_1 = -A_0^{-1}B_0,\ v_0 = 0,\ v_1 = A_0^{-1}. \tag{5}$$

Положим

$$y_k \equiv \tilde{V}_k c \equiv (u_k, v_k)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = u_k c_1 + v_k c_2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $c_1, c_2 \in E$.

Пусть

$$U_k = \begin{pmatrix} u_k & v_k \\ u_{k+1} & v_{k+1} \end{pmatrix} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Тогда можно показать, что

$$U_k^{-1} = \begin{pmatrix} v_{k+1}^* A_k & -v_k^* A_k \\ -u_{k+1}^* A_k & u_k^* A_k \end{pmatrix}$$

и

$$U_k^{-1} = J U_k^* J \begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & A_k \end{pmatrix} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

где $J = i\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$, $J = J^*$, $J^2 = I_{E\oplus E}$, $I_{E\oplus E}$ — единичный оператор в $E \oplus E$. Примем следующее обозначение:

$$(Wy)_k = \begin{pmatrix} (W_1 y)_k \\ (W_2 y)_k \end{pmatrix} = U_k^{-1}\begin{pmatrix} y_k \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} v_{k+1}^* A_k y_k - v_k^* A_k y_{k+1} \\ -u_{k+1}^* A_k y_k + u_n^* A_k y_{k+1} \end{pmatrix} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Покажем, что при всех $y \in D$ существует предел

$$\lim_{k\to\infty} (Wy)_k = (Wy)(\infty).$$

Пусть $y, z \in D$. Тогда имеет место формула Грина (2) и (2′). Далее, для $y_k = \tilde{V}_k c$, $y = \{y_k\}_1^\infty \in D$ и $z \in D$ имеем

$$[y, z]_k = i\left(J\begin{pmatrix} A_k y_k \\ A_k y_{k+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_k \\ z_{k+1} \end{pmatrix}\right)_{E\oplus E} = \\ = i\left(J\begin{pmatrix} A_k \tilde{V}_k c \\ A_k \tilde{V}_{k+1} c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_k \\ z_{k+1} \end{pmatrix}\right)_{E\oplus E} = \\ = i\left(J\begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & A_k \end{pmatrix} U_k c, \begin{pmatrix} z_k \\ z_{k+1} \end{pmatrix}\right)_{E\oplus E} = \\ = i\left(c, U_k^* \begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & A_k \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} z_k \\ z_{k+1} \end{pmatrix}\right)_{E\oplus E} = \\ = i\left(c, J^2 U_k^* \begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & A_k \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} z_k \\ z_{k+1} \end{pmatrix}\right)_{E\oplus E} = \\ = i\left(Jc, U_k^{-1}\begin{pmatrix} z_k \\ z_{k+1} \end{pmatrix}\right)_{E\oplus E} = i\,(Jc, (Wz)_k)_{E\oplus E}.$$

Отсюда вытекает, что при всех $z \in D$ существует предел

$$\lim_{k\to\infty} (Wz)_k = (Wz)(\infty).$$

Имеет место следующая

ЛЕММА 1. *Каковы бы ни были векторы* $\alpha, \beta \in E$, *существует элемент* $y \in D$, *удовлетворяющий условиям*

$$(W_1 y)(\infty) = \alpha, \quad (W_2 y)(\infty) = \beta. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть f — произвольный элемент из $l^2([0, \infty); E)$, удовлетворяющий условиям

$$(f, ve_j) = -\alpha_j, \quad (f, ue_j) = \beta_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

где $\{e_j\}_1^n$ — ортонормированный базис в E и $\alpha_j = (\alpha, e_j)_E$, $\beta_j = (\beta, e_j)_E$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Такой элемент f существует, и притом даже среди линейных комбинаций элементов ue_j и ve_k $(j, k = 1, 2, \ldots, n)$ (так как оператор L_0 имеет индекс дефекта (n, n), то будем иметь $ue_j, ve_j \in l^2([0, \infty); E)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$). Действительно, если положить

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_1^{(j)} ue_j + \sum_{j=1}^{n} c_2^{(j)} ve_j,$$

то условия (8) будут системой уравнений относительно постоянных $c_1^{(j)}$, $c_2^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, определитель которой есть определитель Грама линейно независимых векторов ue_j, ve_k $(j, k = 1, 2, \ldots, n)$ и, следовательно, отличен от нуля.

Обозначим через $y = \{y_k\}_0^\infty$ решение уравнения $\Lambda y = f$, удовлетворяющее условию $y_0 = 0$. Это решение выражается формулой

$$y_k = \sum_{j=0}^{k} (v_k u_j - u_k v_j) f_j \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

и, следовательно, принадлежит $l^2([0, \infty); E)$. Применяя формулу (2) при $N \to \infty$, получим

$$\begin{aligned} (f, ue_j) &= (\Lambda y, ue_j) = -[y, ue_j]_\infty + (y, \Lambda ue_j), \\ (f, ve_j) &= (\Lambda y, ve_j) = -[y, ve_j]_\infty + (y, \Lambda ve_j). \end{aligned} \tag{9}$$

Замечая, что $\Lambda ue_j = 0$, $(\Lambda ve_j)_k = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots)$ $y_0 = 0$, $(\Lambda v)_0 = I$, будем иметь $(y, \Lambda ue_j) = 0$, $(y, \Lambda ve_j) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда из соотношения (9) вытекает, что

$$\begin{aligned} \beta_j &= -[y, ue_j]_\infty = ((W_2 y)(\infty), e_j)_E, \\ \alpha_j &= [y, ve_j]_\infty = ((W_1 y)(\infty), e_j)_E \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$(W_1 y)(\infty) = \alpha, \quad (W_2 y)(\infty) = \beta.$$

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. *Для произвольных векторов* $y, z \in D$ *справедливо тождество*

$$[y, z]_k = ((W_1 y)_k, (W_2 z)_k)_E - ((W_2 y)_k, (W_1 z)_k)_E$$
$$(k = 1, 2, \ldots).$$

В частности,

$$[y, z]_\infty = ((W_1 y)(\infty), (W_2 z)(\infty))_E - ((W_2 y)(\infty), (W_1 z)(\infty))_E.$$

Доказательство. Для произвольных $y, z \in D$ имеет место

$$((W_1 y)_k, (W_2 z)_k)_E - ((W_2 y)_k, (W_1 z)_k)_E =$$
$$= i(J(Wy)_k, (Wz)_k)_{E\oplus E} = i\left(JU_k^{-1}\begin{pmatrix} y_k \\ y_{k+1}\end{pmatrix}, U_k^{-1}\begin{pmatrix} z_k \\ z_{k+1}\end{pmatrix}\right)_{E\oplus E} =$$
$$= i\left(JU_k^{-1}\begin{pmatrix} y_k \\ y_{k+1}\end{pmatrix}, JU_k^* J\begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & A_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_k \\ z_{k+1}\end{pmatrix}\right)_{E\oplus E} =$$
$$= i\left(\begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & A_k\end{pmatrix} JU_k J^2 U_k^{-1}\begin{pmatrix} y_k \\ y_{k+1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_k \\ z_{k+1}\end{pmatrix}\right)_{E\oplus E} =$$
$$= i\left(J\begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & A_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_k \\ y_{k+1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_k \\ z_{k+1}\end{pmatrix}\right)_{E\oplus E} = [y, z]_k \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

В последнем равенстве, перейдя к пределу при $k \to \infty$, получим

$$((W_1 y)(\infty), (W_2 z)(\infty))_E - ((W_2 y)(\infty), (W_1 z)(\infty))_E = [y, z]_\infty.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Область определения D_0 оператора L_0 состоит из тех и только тех элементов $y \in D$, которые удовлетворяют граничным условиям на бесконечности*

$$(W_1 y)(\infty) = (W_2 y)(\infty) = 0. \tag{10}$$

Доказательство. Как отмечено выше, область определения D_0 оператора L_0 совпадает с множеством всех элементов $y \in D$, удовлетворяющих условию (3). В силу леммы 2 равенство (3) эквивалентно условию

$$((W_1 y)(\infty), (W_2 z)(\infty))_E - ((W_2 y)(\infty), (W_1 z)(\infty))_E = 0. \tag{11}$$

В силу леммы 1 векторы $(W_1 z)(\infty)$ и $(W_2 z)(\infty)$ $(z \in D)$ могут быть произвольными. Поэтому равенство (11) для всех $z \in D$ возможно тогда и только тогда, когда выполняются условия (10). Теорема 1 доказана.

Напомним (см. [4]), что тройка $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, где $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, Γ_1, Γ_2 — линейные отображения $D(A^*)$ в $\mathcal{H}$, называется пространством граничных значений замкнутого симметрического оператора A в гильбертовом пространстве H с равными конечными или бесконечными дефектными числами, если:

1) для любых $f, g \in D(A^*)$

$$(A^* f, g)_H = (f, A^* g)_H = (\Gamma_1 f, \Gamma_2 f)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}};$$

2) для любых $F_1, F_2 \in \mathcal{H}$ существует такой вектор $f \in D(A^*)$, что $\Gamma_1 f = F_1$, $\Gamma_2 f = F_2$.

В нашем случае обозначим через Γ_1, Γ_2 линейные отображения D в E, определяемые формулами

$$\Gamma_1 y = (W_2 y)(\infty), \quad \Gamma_2 y = (W_1 y)(\infty). \tag{12}$$

Тогда имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. *Тройка* (E, Γ_1, Γ_2), *определенная равенством* (12), *является пространством граничных значений оператора* L_0.

Доказательство. Для произвольных $y, z \in D$ согласно лемме 2 будем иметь

$$(Ly, z) - (y, Lz) = -[y, z]_\infty = -((W_1y)(\infty), (W_2z)(\infty))_E + \\ + ((W_2y)(\infty), (W_1z)(\infty))_E = (\Gamma_1y, \Gamma_2z)_E - (\Gamma_2y, \Gamma_1z)_E,$$

т. е. первое требование определения пространства граничных значений выполняется. Второе его требование выполняется благодаря лемме 1. Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 согласно [4, с. 159, теорема 1.6] получается следующая

ТЕОРЕМА 3. *Каково бы не было сжатие* K *в* E, *сужение оператора* L *на множестве векторов* $y \in D$, *удовлетворяющих граничными условиями*

$$(K - I)\,\Gamma_1y + i\,(K + I)\,\Gamma_2y = 0 \tag{13}$$

или

$$(K - I)\,\Gamma_1y - i\,(K + I)\,\Gamma_2y = 0, \tag{14}$$

представляет собой соответственно максимально диссипативное и аккумулятивное расширение оператора L_0. *Обратно, всякое максимальное диссипативное (аккумулятивное) расширение оператора* L_0 *является сужением оператора* L *на множестве векторов* $y \in D$, *удовлетворяющих* (13), (14), *причем сжатие* K *определяется расширением однозначно. Эти условия задают самосопряженные расширения, если* K *унитарен. В последнем случае* (13), (14) *эквивалентны условию*

$$(\cos A)\,\Gamma_1y - (\sin A)\,\Gamma_2y = 0,$$

где A — *самосопряженный оператор в* E. *Общий вид диссипативных (аккумулятивных) расширений оператора задается условиями*

$$K(\Gamma_1y + i\Gamma_2y) = \Gamma_1y - i\Gamma_2y, \quad \Gamma_1y + i\Gamma_2y \in D(K), \tag{15}$$

$$K(\Gamma_1y - i\Gamma_2y) = \Gamma_1y + i\Gamma_2y, \quad \Gamma_1y - i\Gamma_2y \in D(K) \tag{16}$$

соответственно, где K — *линейный оператор с* $\|Kf\| \leqslant \|f\|$, $f \in D(K)$, *а общий вид симметрических расширений задается формулами* (15) *и* (16), *где* K — *изометрический оператор.*

Институт математики
и механики АН АзССР

Поступило
14.03.91

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Аллахвердиев Б. П., Гусейнов Г. Ш. К спектральной теории диссипативных разностных операторов второго порядка // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 1. С. 101—118.
[2] Березанский Ю. М. Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
[3] Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов. М.: Физматгиз, 1961.
[4] Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. Киев: Наукова думка, 1984.