B. P. Allahverdiev, Dissipative extensions of a symmetric Schrödinger operator in the case of Weyl's limiting disk, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1987, Volume 293, Number 4, 777–781

Доклады Академии наук СССР
1987. Том 293, № 4

УДК 517.984 МАТЕМАТИКА

Б.П. АЛЛАХВЕРДИЕВ

О ДИССИПАТИВНЫХ РАСШИРЕНИЯХ СИММЕТРИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА В СЛУЧАЕ ПРЕДЕЛЬНОГО КРУГА ВЕЙЛЯ

(Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 25 XI 1985)

В теории операторов существует абстрактная схема построения диссипативных расширений симметрических операторов, которые параметризуются операторами сжатия (см., например, [1, 2]). Однако независимо от общей схемы представляет значительный интерес задача описания диссипативных расширений заданного симметрического оператора в терминах краевых условий. Эта задача особенно интересна в случае сингулярных дифференциальных операторов в связи с тем, что в сингулярных концах рассматриваемого интервала обычные краевые условия, вообще говоря, не имеют смысла.

В настоящей работе рассматривается симметрический оператор Шредингера в случае предельного круга Вейля (см. [3]) и описываются диссипативные, самосопряженные и другие расширения в терминах краевых условий. Далее исследуется диссипативный оператор в "бесконечности", строится его самосопряженная дилатация и характеристическая функция через функцию Вейля–Титчмарша соответствующей самосопряженной задачи. Для этого оператора справедлива основная теорема 5 о полноте системы собственных функций. В конце работы предложена новая формула обращения, связанная с функциями Бесселя.

1. Рассмотрим дифференциальное выражение

$$l(y) \equiv -y'' + q(x)y, \quad 0 \leqslant x < \infty, \tag{1}$$

где $q(x)$ – вещественнозначная непрерывная функция на $[0, \infty)$.

Обозначим через L_0 замыкание минимального оператора, порожденного дифференциальным выражением (1), D_0 – область определения L_0, D – совокупность всех функций $y(x)$ из $L_2(0, \infty)$, первые производные которых локально абсолютно непрерывны и $l(y) \in L_2(0, \infty)$; D является областью определения максимального оператора $L_1 = L_0^*$ (см. [4]).

Пусть функция $q(x)$ такова, что на $(0, \infty)$ имеет место случай предельного круга Вейля (см. [3, 4]), т.е. симметрический оператор L_0 имеет индекс дефекта $(2, 2)$. Можно описать диссипативные расширения L оператора L_0 в терминах краевых условий.

Через $v_1(x)$, $v_2(x)$ обозначим решения уравнения $l(y) = 0$, удовлетворяющие начальным условиям:

$$v_1(0) = 1, \quad v_1'(0) = 0, \quad v_2(0) = 0, \quad v_2'(0) = 1.$$

Очевидно, что $v_1(x)$ и $v_2(x)$ линейно-независимы и их вронскиан равен единице: $W[v_1, v_2]_x = W[v_1, v_2]_0 = 1$. Поскольку L_0 имеет индекс дефекта $(2, 2)$, то $v_1, v_2 \in L_2(0, \infty)$.

Обозначим через Γ_1, Γ_2 линейные отображения D в $\mathbf{C}^2$:

$$\Gamma_1 y = \begin{pmatrix} -y(0) \\ W[y, v_1]_\infty \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_2 y = \begin{pmatrix} y'(0) \\ W[y, v_2]_\infty \end{pmatrix}.$$

Тогда справедлива

Теорема 1. *Каково бы ни было сжатие K в $\mathbf{C}^2$, сужение оператора L_1 на множество функций $y \in D$, удовлетворяющих условию*

(2) $\quad (K-I)\,\Gamma_1 y + i(K+I)\,\Gamma_2 y = 0$

или

(3) $\quad (K-I)\,\Gamma_1 y - i(K+I)\,\Gamma_2 y = 0,$

представляет собой соответственно максимально диссипативное (аккумулятивное) расширение оператора L_0.*

Обратно, всякое максимальное диссипативное (аккумулятивное) расширение оператора L_0 является сужением оператора L_1 на множество функций $y \in D$, удовлетворяющих (2) ((3)), *причем сжатие K определяется расширением однозначно. Максимальные симметрические расширения оператора L_0 описываются условиями* (2) ((3)), *в которых K – изометрический оператор. Эти условия задают самосопряженные расширения, если K унитарен. Общий вид диссипативных (аккумулятивных) расширений оператора L_0 дается условиями*

($4_\pm$) $\quad K(\Gamma_1 y \pm i\Gamma_2 y) = \Gamma_1 y \mp i\Gamma_2 y, \qquad \Gamma_1 y \pm i\Gamma_2 y \in D(K)$

соответственно, где K – линейный оператор с $\|Kf\| \leqslant \|f\|$, $f \in D(K)$, а общий вид симметрических расширений формулами ($4_\pm$), *где K – изометрический оператор.*

Из теоремы 1 вытекает следующее

Следствие 1. *Краевыми условиями* ($y \in D$)

(5) $\quad y'(0) - h_1 y(0) = 0;$

(6) $\quad W[y, v_1]_\infty - h_2 W[y, v_2]_\infty = 0$

с $\operatorname{Im} h_1 \geqslant 0$, $\operatorname{Im} h_2 \geqslant 0$ ($\operatorname{Im} h_1 = \operatorname{Im} h_2 = 0$, *т.е.* $-\infty \leqslant h_1, h_2 \leqslant +\infty$) *описываются максимально диссипативные (самосопряженные) расширения с распадающимися краевыми условиями оператора L_0.*

Теорема 2. *Пусть* $\operatorname{Im} h_1 > 0$, $\operatorname{Im} h_2 > 0$ ($\operatorname{Im} h_1 > 0$, $\operatorname{Im} h_2 = 0$ *или* $\operatorname{Im} h_1 = 0$, $\operatorname{Im} h_2 > 0$). *Тогда оператор L_{h_1,h_2}, порожденный выражением $l(y)$ и краевыми условиями* (5), (6), *простой диссипативный оператор с двумерным (одномерным) дефектом несамосопряженности.*

2. Рассмотрим подробнее оператор $L_{\infty,h}$ с условиями

$$y(0) = 0, \quad W[y, v_1]_\infty - hW[y, v_2]_\infty = 0, \quad \operatorname{Im} h > 0$$

(диссипативность в бесконечности). Имея в виду провести спектральный анализ и исследовать полноту, вычислим его характеристическую функцию. Для этого, присоединив к $K = L_2(0, \infty)$ ортогонально приходящий и уходящий канал $D_- = L_2(-\infty, 0)$, $D_+ = L_2(0, \infty)$, образуем основное пространство дилатации $\mathcal{H}$ и зададим там опера-

* По поводу терминов, употребляемых без пояснений, см. [5–7].

тор $\mathcal{L}_h$, порожденный выражением

$$\mathcal{L}_h \begin{pmatrix} v_- \\ u \\ v_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{i}\dfrac{dv_-}{d\xi} \\ l(u) \\ -\dfrac{1}{i}\dfrac{dv_+}{d\xi} \end{pmatrix}$$

с областью определения $D(\mathcal{L}_h)$: $v_- \in W_2^1(-\infty, 0)$, $v_+ \in W_2^1(0, \infty)$, $u \in D$, $u(0) = 0$, $W[u, v_1]_\infty - hW[u, v_2]_\infty = \alpha v_-(0)$, $W[u, v_1]_\infty - \bar{h}W[u, v_2]_\infty = \alpha v_+(0)$, $2\operatorname{Im} h = \alpha^2$, $\alpha > 0$. Справедлива следующая

Теорема 3. *Оператор $\mathcal{L}_h$ самосопряжен в $\mathcal{H}$ и является самосопряженной дилатацией оператора $L_{\infty,h}$.*

Функция Вейля–Титчмарша $m_{\infty,\infty}(\lambda)$ самосопряженного оператора $L_{\infty,\infty}$, порожденного выражением $l(y)$ и краевыми условиями $y(0) = 0$, $W[y, v_2]_\infty = 0$, может быть вычислена через вронскианы решений

$$m_{\infty,\infty}(\lambda) = -\frac{W[\psi, v_2]_\infty}{W[\varphi, v_2]_\infty};$$

здесь φ и ψ – линейно-независимые решения уравнения $l(y) = \lambda y$, нормированные условиями

$$\varphi(0,\lambda) = 0, \quad \varphi'(0,\lambda) = -1, \quad \psi(0,\lambda) = 1, \quad \psi'(0,\lambda) = 0.$$

Спектральный анализ диссипативного оператора $L_{\infty,h}$ основывается на общей схеме, описанной в [6, 7]. При помощи функций φ, ψ и $m_{\infty,\infty}(\lambda)$ можно построить "приходящие" и "уходящие", "излучающие" и "поглощающие" собственные векторы непрерывного спектра дилатации $\mathcal{L}_h$. С помощью этих собственных векторов строится модель диссипативного оператора $L_{\infty,h}$ в симметрическом спектральном представлении дилатации и вычисляется его характеристическая функция. Именно верна следующая

Теорема 4. *Характеристическая функция оператора $L_{\infty,h}$ есть*

$$S_h(\lambda) = \frac{m_{\infty,\infty}(\lambda)\,\kappa(\lambda) + h}{m_{\infty,\infty}(\lambda)\,\kappa(\lambda) + \bar{h}}, \tag{7}$$

где $\kappa(\lambda) = W[\varphi, v_1]_\infty / W[\psi, v_2]_\infty$.

Функция $S_h(\lambda)$ мероморфна в комплексной плоскости, а в верхней полуплоскости является внутренней и чистой.

3. Известно, что (см. [5, 6]) отсутствие сингулярного сомножителя $S_h(\lambda)$ в факторизации $S_h(\lambda) = s(\lambda)B(\lambda)$ ($B(\lambda)$ – произведение Бляшке) обеспечивает полноту системы собственных и присоединенных функций оператора $L_{\infty,h}$ в пространстве $L_2(0, \infty)$, а выполнение условия Карлесона – базисность этой системы в своей замкнутой линейной оболочке.

Теорема 5. *При всех значениях h, кроме, быть может, одного, характеристическая функция $S_h(\lambda)$ является произведением Бляшке. Таким образом, при всех h, кроме исключительного, система собственных и присоединенных функций оператора $L_{\infty,h}$, диссипативного в "бесконечности", полна в $L_2(0, \infty)$.*

Теорема 5 позволяет, например, построить новые формулы обращения, связанные с уравнением

(8) $\quad -y'' - e^{2x}y = \lambda y, \quad 0 \leqslant x < \infty,$

для которого имеет место случай предельного круга.

Действуя по намеченному плану, можно вычислить характеристическую функцию соответствующего оператора $L_{\infty,h}$.

Пусть $\nu = i\sqrt{\lambda}$, $J_{\pm\nu} = J_{\pm\nu}(1)$ – функция Бесселя, $\theta_\nu^\pm = \nu\pi/2 \pm (\pi/4 - 1)$. Тогда

$$S_h(\lambda) = \frac{J_{-\nu}\cos\theta_\nu^+ - J_\nu\cos\theta_\nu^- - h\{J_{-\nu}\sin\theta_\nu^+ + J_\nu\sin\theta_\nu^-\}}{J_{-\nu}\cos\theta_\nu^+ - J_\nu\cos\theta_\nu^- - \bar h\{J_{-\nu}\sin\theta_\nu^+ + J_\nu\sin\theta_\nu^-\}}.$$

Пользуясь асимптотическими формулами для бесселевых функций для больших значков, можно исследовать поведение $S_h(\lambda)$ по мнимой оси и убедиться, что экспоненциального роста нет, если $h \neq i$. Это означает, что сингулярный множитель отсутствует. Пользуясь теми же формулами более внимательно, можно получить асимптотику собственных значений: при $\operatorname{Re}\lambda \to -\infty$

$$\lambda_n = -4n^2 + 4n(a + ib) + O(1), \quad b > 0,$$

и при $\operatorname{Re}\lambda \to +\infty$

$$\lambda_n = \frac{(\pi n + c)^2 + i(\pi n + c)d}{\ln(\pi n + c)} + O(1), \quad d > 0.$$

Отсюда, пользуясь асимптотической простотой корней уравнения $S_h(\lambda) = 0$, делаем вывод, что на спектре $\{\lambda_n\}$ выполнено условие Карлесона.

Теорема 6. *При всех $h \neq i$ система собственных и присоединенных функций оператора $L_{\infty,h}$, порожденного на полуоси выражением $-y'' - e^{2x}y$, полна и образует базис Рисса в $L_2(0,\infty)$.*

Уравнение (8) эквивалентно уравнению Бесселя, если в качестве спектрального параметра взять значок. Такого сорта уравнения часто встречаются в радиофизике. При их анализе может быть полезна формула обращения для оператора $L_{\infty,h}$.

Обозначим через $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ систему всех собственных и присоединенных функций оператора $L_{\infty,h}$, а через $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ – биортогональную систему к $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, т.е. $(\varphi_j, \psi_k)_{L_2} = \delta_{jk}$ (δ – символ Кронекера). Собственные функции оператора $L_{\infty,h}$ выражаются через функции Бесселя:

$$\varphi_k(x) = -\frac{\pi}{2\sin\nu_k\pi}\{J_{\nu_k}(e^x)J_{-\nu_k}(1) - J_{-\nu_k}(e^x)J_{\nu_k}(1)\}.$$

Так как далекие собственные значения оператора $L_{\infty,h}$ простые, то, начиная с некоторого номера n, в следующей формуле обращения участвуют только собственные функции (присоединенные функции отсутствуют):

$$\forall u \in L_2(0,\infty), \quad u \to \tilde u_n = (u, \psi_n)_{L_2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$u(x) = \sum_{n=1}^\infty \tilde u_n \varphi_n(x),$$

где ряд сходится по норме $L_2(0,\infty)$.

Автор благодарен Б.С. Павлову за стимулирующие беседы.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
25 XII 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Phillips R.S.* – Trans. Amer. Math. Soc., 1959, vol. 90, p. 193–254. 2. *Штраус А.В.* – Изв. АН СССР. Сер. матем., 1968, т. 32, № 1, с. 186–207. 3. *Титчмарш Э.Ч.* Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. М.: ИЛ, 1960, т. 1. 278 с. 4. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с. 5. *Секефальви-Надь Б., Фойаш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970. 431 с. 6. *Павлов Б.С.* Тр. VII зимней школы по матем. прогр. и смежн. вопрос. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1976, с. 3–69. 7. *Павлов Б.С.* – Изв. АН СССР. Сер. матем., 1975, т. 39, № 1, с. 123–148.

УДК 519 МАТЕМАТИКА

И.И. ГОЛИЧЕВ

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ

(Представлено академиком Л.С. Понтрягиным 5 XII 1985)

Пусть $Q = \Omega \times [0, T]$, Ω – область в R^m с границей $\partial\Omega$, $S = \partial\Omega \times [0, T]$. Через $(\cdot, \cdot)$, $\|\cdot\|$, $((\cdot, \cdot))$, $|||\cdot|||$ обозначим скалярное произведение и норму в пространствах $L_2(\Omega)$, $L_2(Q)$ и через $[y]$ обозначим энергетическую норму в Q (см. [1]).

Пусть в Q задано дифференциальное выражение

$$(1)\qquad \tau[y] = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j} + a_i\right) + b_i\frac{\partial}{\partial x_i} + c,$$

где коэффициенты – ограниченные, измеримые вещественные функции в Q, $a_{ij} = a_{ji}$ и существуют такие $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, что почти всюду в Q

$$(2)\qquad \alpha_1 |\xi|^2 \leqslant a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \alpha_2 |\xi|^2$$

при любых вещественных параметрах $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$.

Обозначим

$$\tau(t)(u, v) = \int_\Omega (a_{ij}(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \bar v}{\partial x_i} + a_i(x, t)\, u\,\frac{\partial \bar v}{\partial x_i} + b_i(x, t)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,\bar v + c(x, t)u\bar v)dx,$$

где $u, v \in W_2^{1,0}(Q)$.

1. Рассмотрим задачу: найти

$$(3)\qquad \inf_{v\in U}\,[\,|||Cy(v) - z|||^2 + \delta_1 |||v|||^2\,],$$

где $y(v)$ – решение задачи

$$(4)\qquad \frac{\partial y}{\partial t} + \tau[y] = f + Bv, \quad y(x, 0) = h, \quad y|_S = \varphi,$$

C, B – ограниченные операторы в $L_2(Q)$, $\delta_1 > 0$, а

$$(5)\qquad U = \{v \in L_2(Q):\ \psi_1(x, t) \leqslant v(x, t) \leqslant \psi_2(x, t)\},$$