Н. Б. Керимов, Некоторые свойства собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора четвертого порядка, *Матем. заметки*, 1986, том 40, выпуск 5, 608–620

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 40, № 5 (1986)

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Н. Б. Керимов

1. Постановка задачи и формулировка основных результатов. Пусть G — конечный или бесконечный интервал в $\mathbf{R}^1$. Рассмотрим формальный дифференциальный оператор $l(y) = y^{(4)} + p_1(x)\, y^{(3)} + p_2(x)\, y^{(2)} + p_3(x)\, y^{(1)} + p_4(x)\, y$, где $p_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ — комплекснозначные функции. Предполагается, что $p_1(x)$ абсолютно непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно в каждом конечном замкнутом подынтервале интервала G и $p_\alpha(x) \in L_1^{\mathrm{loc}}(G)$ $(\alpha = 2, 3, 4)$. Обозначим через D класс функций, абсолютно непрерывных вместе со своими производными до третьего порядка включительно в каждом конечном замкнутом подынтервале интервала G. Следуя работам В. А. Ильина (см., например, [1]), собственные и присоединенные функции дифференциального оператора будем понимать в более широком смысле, чем обычно. От этих функций не будем требовать подчинения каким-либо краевым условиям. Назовем собственной функцией оператора l, отвечающей собственному значению λ, любую комплекснозначную функцию $y_0(x) \in D$ $(y_0(x) \not\equiv 0)$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $l(y_0) + \lambda y_0 = 0$. Под присоединенной функцией $y_1(x)$, отвечающей тому же λ и собственной функции $y_0(x)$, будем понимать любую комплекснозначную функцию из класса D, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $l(y_1) + \lambda y_1 = y_0$.

Обозначим через $\{u_n\}_1^\infty$ произвольную систему, состоящую из понимаемых в указанном обобщенном смысле собственных и присоединенных функций оператора l, отвечающую системе собственных значений $\{\lambda_n\}_1^\infty$ таких, что $|\lambda_n| \to \infty$ при $n \to \infty$. Будем считать, что числа λ_n занумерованы в порядке неубывания их абсолютных величин с учетом кратности. Каждой собственной функции может соответствовать не более чем одна присоединенная функция, отвечающая тому же собственному значению. Это означает, что каждый элемент $u_n(x)$ системы $\{u_n\}_1^\infty$ принадлежит классу D и удовлетворяет почти всюду в G уравнению $l(u_n) + \lambda_n u_n = \theta_n u_{n-1}$, где число θ_n равно либо нулю (в этом случае мы называем u_n собственной функцией оператора l), либо единице (в этом случае мы требуем $\lambda_n = \lambda_{n-1}$ и называем u_n присоединенной функцией, при этом u_{n-1} является собственной функцией).

При исследовании ряда вопросов спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов возникают задачи оценки собственных и присоединенных функций и получения некоторых соотношений между этими функциями [2—4]. Эти вопросы составляют содержание настоящей работы.

Положим $\mu_n = (-\lambda_n)^{1/4}$, где всюду $[r \exp(i\varphi)]^{1/4} = r^{1/4} \exp(i\varphi/4)$ при $-\pi/2 < \varphi \leqslant {}^3/_2\pi$.

Справедливо следующее основное утверждение.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $\operatorname{mes} G < \infty$, $p_\alpha(x) \in L_1(G)$ $(\alpha = 2, 3, 4)$, $p_1(x)$ *абсолютно непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно в* $\overline{G}$ *и* $|\operatorname{Im} \mu_n| \leqslant b = \mathrm{const}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *Тогда существует такая постоянная* C, *что при всех* $p \geqslant 1$, $m = 0, 1, 2, 3$ *и* $n = 1, 2, \ldots$

$$\max_{x \in \overline{G}} |u_n^{(m)}(x)| \leqslant C(1 + |\mu_n|)^{m+1/p} \|u_n\|_{L_p(G)}, \tag{1.1}$$

$$\|\theta_n u_{n-1}\|_{L_p(G)} \leqslant C(1 + |\mu_n|)^4 \|u_n\|_{L_p(G)}. \tag{1.2}$$

Постоянная C *от* m, n, p *не зависит. Кроме того, для любого отрезка* $K \subset G$ *существует постоянная* $C(K)$, *зависящая от* K, *но не зависящая от* n *и* p, *такая, что при всех* $p \geqslant 1$ *и* $n = 1, 2, \ldots$

$$\|\theta_n u_{n-1}\|_{L_p(K)} \leqslant C(K)(1 + |\mu_n|)^3 \|u_n\|_{L_p(G)}. \tag{1.3}$$

Следствие. Пусть $\operatorname{mes} G \leqslant \infty$, $p_\alpha(x) \in L_1^{\mathrm{loc}}(G)$ $(\alpha = 2, 3, 4)$, $p_1(x)$ абсолютно непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно в каждом конечном замкнутом подынтервале интервала G и $|\operatorname{Im} \mu_n| \leqslant b = \mathrm{const}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда для любого отрезка $K \subset G$ $(0 < \operatorname{mes} K < \infty)$ существует такая постоянная $C_1(K)$, зависящая только от K, что при всех $p \geqslant 1$, $m = 0, 1, 2, 3$ и $n = 1, 2, \ldots$

$$\max_{x \in K} |u_n^{(m)}(x)| \leqslant C_1(K)(1 + |\mu_n|)^{m+1/p} \|u_n\|_{L_p(K)}, \tag{1.4}$$

$$\|\theta_n u_{n-1}\|_{L_p(K)} \leqslant C_1(K)(1 + |\mu_n|)^4 \|u_n\|_{L_p(K)}. \tag{1.5}$$

Кроме того, если K и K_1 — произвольные отрезки интервала G и K строго содержится внутри K_1 $(\operatorname{mes} K_1 < \infty)$, то существует такая постоянная $C(K, K_1)$, зависящая только от K и K_1, что при всех $p \geqslant 1$ и $n = 1, 2, \ldots$

$$\|\theta_n u_{n-1}\|_{L_p(K)} \leqslant C(K, K_1)(1 + |\mu_n|)^3 \|u_n\|_{L_p(K_1)}. \tag{1.6}$$

Замечание 1.1. При доказательстве теоремы можно считать, что $p_1(x) \equiv 0$ $(x \in \overline{G})$. Действительно, если $p_1(x) \not\equiv 0$, то, полагая $a = \inf\{x;\ x \in G\}$ и

$$v_n(x) = u_n(x) \exp\left(\frac{1}{4}\int_a^x p_1(t)\,dt\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1.7}$$

получаем, что $\{v_n\}_1^\infty$ является в указанном выше обобщенном смысле системой собственных и присоединенных функций некоторого оператора $l_1(y) = y^{(4)} + q_2(x) y^{(2)} + q_3(x) y^{(1)} + q_4(x) y$, где функции $q_\alpha(x)$ $(\alpha = 2, 3, 4)$ принадлежат классу $L_1(G)$ и выражаются через функции $p_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ и $p_1^{(k)}(x)$ $(k = 1, 2, 3)$. Из (1.7) следует, что если теорема верна для системы $\{v_n\}_1^\infty$, то она верна и для системы $\{u_n\}_1^\infty$. Всюду в дальнейшем будем считать, что $p_1(x) \equiv 0$ при $x \in \overline{G}$.

2. Асимптотические формулы для собственных и присоединенных функций. Доказательство теоремы основано в основном только на использовании асимптотических формул для фундаментальной системы решений уравнения $l(y) + \rho^4 y = 0$ при $|\rho| \to \infty$. Не ограничивая общности, будем рассматривать в качестве конечного интервала G интервал $(0, 1)$. Общий случай интервала (a, b) легко сводится к этому подстановкой $x = a + (b - a)t$, $t \in (0, 1)$. Пусть $f_j(x, \rho)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ — фундаментальная система решений уравнения $l(y)+\rho^4 y=0$. Воспользуемся известными асимптотическими выражениями для функций $f_j(x, \rho)$ [5, с. 58], справедливыми при $p_\alpha(x) \in L_1(G)$ $(\alpha=2, 3, 4)$ и $\rho \in T$, $|\rho|>R$, где T — область комплексной ρ-плоскости, которая получается из сектора $S_k=\{\rho;\ k\pi/4 \leqslant \arg\rho \leqslant (k+1)\pi/4\}$ при некотором $k=0, 1, \ldots, 7$ сдвигом $\rho \to \rho+c$ (c — некоторое фиксированное комплексное число), и R — достаточно большое число, которое можно выписать в явном виде [5, с. 57]. При этих условиях имеет место

$$f_j^{(m)}(x, \rho)=(\rho\beta_j)^m \exp(\rho\beta_j x)\,[1], \tag{2.1}$$

где $m=0, 1, 2, 3$; $j=1, 2, 3, 4$; $[1]=1+O(\rho^{-1})$ и β_j — все различные корни четвертой степени из (-1).

Рассмотрим уравнение $l(y)-\mu^4 y=0$, или по-другому, уравнение $l(y)+(\theta\mu)^4 y=0$, где $\theta=\exp(\pi i/4)$. Пусть $y_j(x, \mu)$ $(j=1, 2, 3, 4)$ — фундаментальная система решений этого уравнения. Положим $Q=\{\mu;\ |\operatorname{Im}\mu| \leqslant b,\ |\mu|>4b,\ -\pi/8<\arg\mu \leqslant 3/8\,\pi\}$. Так как $\theta\mu \in T \equiv S_0+b\sqrt{2}$ при $\mu \in Q$, то при $\mu \in Q$, $|\mu|>R$ справедливы следующие асимптотические формулы:

$$y_j^{(m)}(x, \mu)=(\mu\theta\beta_j)^m \exp(\mu\theta\beta_j x)\,[1], \tag{2.2}$$

где $m=0, 1, 2, 3$; $j=1, 2, 3, 4$ и $[1]=1+O(\mu^{-1})$.

Нетрудно проверить, что $\theta\beta_j$ $(j=1, 2, 3, 4)$ являются различными корнями четвертой степени из единицы. Следовательно, при $\mu \in Q$, $|\mu|>R$ справедливы следующие асимптотические формулы:

$$y_j^{(m)}(x, \mu)=(\mu\omega_j)^m \exp(\mu\omega_j x)\,[1], \tag{2.3}$$

где $m=0, 1, 2, 3$; $j=1, 2, 3, 4$ и ω_j $(j=1, 2, 3, 4)$ — различные корни четвертой степени из единицы.

Пусть $y_{j,n}(x)$ $(j=1, 2, 3, 4)$ — фундаментальная система решений уравнения $l(y)-\mu_n^4 y=0$. Очевидно, что каждая собственная функция, отвечающая собственному значению λ_n, является линейной комбинацией функций $y_{j,n}(x)$ $(j=1, 2, 3, 4)$.

Предположим, что $u_n(x)$ — присоединенная функция, тогда по определению $u_{n-1}(x)$ — собственная функция и при $m=0, 1, 2, 3$ имеет место

$$u_{n-1}^{(m)}(x)=\sum_{k=1}^{4} D_{k,\,n-1}\, y_{k,\,n}^{(m)}(x), \tag{2.4}$$

где $D_{k,\,n-1}$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ — комплексные постоянные. Применяя к уравнению $l(u_n) - \mu_n^4 u_n = u_{n-1}$ метод вариации произвольных постоянных, получим

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^{4} A_{jn} y_{j,\,n}(x) + \\ + \sum_{j=1}^{4} y_{j,\,n}(x) \int_0^x u_{n-1}(t) \frac{W_{jn}(t)}{W_n(t)}\, dt, \qquad (2.5)$$

где A_{jn} $(j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ — комплексные постоянные, $W_n(t)$ — вронскиан функций $y_{j,\,n}(t)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$, другими словами, $W_n(t)$ — определитель порядка четыре, в котором элемент, лежащий в пересечении k строки и j столбца, равен $y_{j,\,n}^{(4-k)}(t)$. $W_{1n}(t), \ldots, W_{4n}(t)$ — алгебраические дополнения элементов первой строки определителя $W_n(t)$.

Принимая во внимание (2.4) и (2.5), получаем

$$u_n^{(m)}(x) = \sum_{j=1}^{4} A_{jn} y_{j,\,n}^{(m)}(x) + \\ + \sum_{k=1}^{4} D_{k,\,n-1} T_{knm}(x) \qquad (m = 0, 1, 2, 3), \qquad (2.6)$$

где

$$T_{knm}(x) = \sum_{j=1}^{4} y_{j,\,n}^{(m)}(x) \int_0^x y_{k,\,n}(t) \frac{W_{jn}(t)}{W_n(t)}\, dt. \qquad (2.7)$$

Так как, начиная с некоторого n, все μ_n принадлежат Q, то существует такое натуральное число N_1, что при $n \geqslant N_1$ в силу (2.3) имеет место асимптотическая формула

$$y_{j,\,n}^{(m)}(x) = (\mu_n \omega_j)^m \exp(\mu_n \omega_j x)\ [1], \qquad (2.8)$$

где $m = 0, 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$ и $[1] = 1 + O(\mu_n^{-1})$.

В дальнейшем всюду будем предполагать, что $n \geqslant N_1$.

Пусть $\omega_1 = -\omega_4 = -1$, $\omega_2 = -\omega_3 = i$. С помощью (2.8) нетрудно убедиться, что

$$\frac{W_{jn}(t)}{W_n(t)} = \frac{\omega_j}{4\mu_n^3} \exp(-\mu_n \omega_j t)\,[1] \qquad (j = 1, 2, 3, 4). \qquad (2.9)$$

Следовательно, справедливы соотношения

$$\int_0^x y_{j,\,n}(t) \frac{W_{jn}(t)}{W_n(t)}\, dt = \frac{\omega_j x}{4\mu_n^3}\,[1] \qquad (j = 1, 2, 3, 4), \qquad (2.10)$$

$$\int_x^1 y_{j,\,n}(t) \frac{W_{jn}(t)}{W_n(t)}\, dt = \frac{\omega_j (1 - x)}{4\mu_n^3}\,[1] \qquad (j = 1, 2, 3, 4). \qquad (2.11)$$

Введем обозначение

$$a_{kjn} = \int_0^1 y_{k,n}(t) \frac{W_{jn}(t)}{W_n(t)} \mathrm{d}t \qquad (k, j = 1, 2, 3, 4). \quad (2.12)$$

Представим $T_{knm}(x)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ в удобном для нас виде. Нетрудно проверить, что для $T_{1nm}(x)$ имеет место представление

$$T_{1nm}(x) = \sum_{j=2}^{4} a_{1jn} y_{j,n}^{(m)}(x) + \frac{\omega_1 x}{4\mu_n^3} y_{1,n}^{(m)}(x) +$$
$$+ y_{1,n}^{(m)}(x) \left[\int_0^x y_{1,n}(t) \frac{W_{1n}(t)}{W_n(t)} \mathrm{d}t - \frac{\omega_1 x}{4\mu_n^3} \right] -$$
$$- \sum_{j=2}^{4} y_{j,n}^{(m)}(x) \int_x^1 y_{1,n}(t) \frac{W_{jn}(t)}{W_n(t)} \mathrm{d}t. \quad (2.13)$$

Далее заметим, что при $j = 2, 3, 4$

$$\int_x^1 \exp[\mu_n(\omega_1 - \omega_j) t] [1] \mathrm{d}t = \int_x^1 \exp[\mu_n(\omega_1 - \omega_j) t] \mathrm{d}t [1]. \quad (2.14)$$

Положим

$$b_{j,n} = -\frac{\omega_j}{4\mu_n^4(\omega_1 - \omega_j)} \exp[\mu_n(\omega_1 - \omega_j)] \qquad (j = 2, 3, 4). \quad (2.15)$$

В силу (2.8), (2.9), (2.14) и (2.15) при $j = 2, 3, 4$ имеет место

$$y_{j,n}^{(m)}(x) \int_x^1 y_{1,n}(t) \frac{W_{jn}(t)}{W_n(t)} \mathrm{d}t =$$
$$= \frac{y_{j,n}^{(m)}(x)\,\omega_j}{4\mu_n^4(\omega_1 - \omega_j)} \{\exp[\mu_n(\omega_1 - \omega_j)] - \exp[\mu_n(\omega_1 - \omega_j) x]\} [1] =$$
$$= \frac{\omega_j}{4\mu_n^4(\omega_1 - \omega_j)} y_{j,n}^{(m)}(x) \exp[\mu_n(\omega_1 - \omega_j)] [1] -$$
$$- \frac{\omega_j}{4\mu_n^4(\omega_1 - \omega_j)} \left(\frac{\omega_j}{\omega_1}\right)^m y_{1,n}^{(m)}(x) [1] = -b_{jn} y_{j,n}^{(m)}(x) -$$
$$- \frac{\omega_j}{4\mu_n^4(\omega_1 - \omega_j)} \left(\frac{\omega_j}{\omega_1}\right)^m y_{1,n}^{(m)}(x) - \frac{\omega_j}{4\mu_n^4(\omega_1 - \omega_j)} \left(\frac{\omega_j}{\omega_1}\right)^m \cdot$$
$$\cdot y_{1,n}^{(m)}(x) \{O(\mu_n^{-1}) + \exp[\mu_n(\omega_1 - \omega_j)(1 - x)] O(\mu_n^{-1})\} =$$
$$= -b_{jn} y_{j,n}^{(m)}(x) - \frac{\omega_j}{4\mu_n^4(\omega_1 - \omega_j)} \left(\frac{\omega_j}{\omega_1}\right)^m y_{1,n}^{(m)}(x) - y_{1,n}^{(m)}(x) O(\mu_n^{-5}). \quad (2.16)$$

Таким образом, в силу (2.10), (2.13), (2.16)

$$T_{1nm}(x)=\sum_{j=2}^{4}(a_{1jn}+b_{jn})\,y_{j,n}^{(m)}(x)+\frac{a_{1m}}{\mu_n^4}\,y_{1,n}^{(m)}(x)+$$

$$+\frac{\omega_1 x}{4\mu_n^3}\,y_{1,n}^{(m)}(x)+y_{1,n}^{(m)}(x)\,[xO(\mu_n^{-4})+O(\mu_n^{-5})], \qquad (2.17)$$

где $a_{1m}=\sum_{j=2}^{4}\frac{\omega_j}{4(\omega_1-\omega_j)}\left(\frac{\omega_j}{\omega_1}\right)^m$ при $m=0, 1, 2, 3.$

Аналогичным образом доказывается, что

$$T_{knm}(x)=\sum_{j=k+1}^{4}a_{kjn}y_{j,n}^{(m)}(x)+\frac{\omega_k x}{4\mu_n^3}\,y_{k,n}^{(m)}(x)+$$

$$+\,y_{k,n}^{(m)}(x)\,O(\mu_n^{-4}) \qquad (k=2, 3), \qquad (2.18)$$

$$T_{4nm}(x)=\sum_{j=1}^{3}d_{jn}y_{j,n}^{(m)}(x)-\frac{\omega_4(1-x)}{4\mu_n^3}\,y_{4,n}^{(m)}(x)+$$

$$+\left(a_{44n}+\frac{a_{4m}}{\mu_n^4}\right)y_{4,n}^{(m)}(x)+y_{4,n}^{(m)}(x)\,[(1-x)\,O(\mu_n^{-4})+O(\mu_n^{-5})], \qquad (2.19)$$

где $d_{jn}=-\frac{\omega_j}{4\mu_n^4(\omega_4-\omega_j)}$ $\quad (j=1, 2, 3)$ и

$$a_{4m}=\sum_{j=1}^{3}\frac{\omega_j}{4(\omega_4-\omega_j)}\left(\frac{\omega_j}{\omega_4}\right)^m \qquad (m=0, 1, 2, 3).$$

Введем обозначения

$$D_{1,n,m}=A_{1n}+\frac{a_{1m}}{\mu_n^4}D_{1,n-1}+d_{1n}D_{4,n-1}, \qquad (2.20)$$

$$D_{2,n,m}=A_{2n}+(a_{12n}+b_{2n})\,D_{1,n-1}+d_{2n}D_{4,n-1}, \qquad (2.21)$$

$$D_{3,n,m}=A_{3n}+(a_{13n}+b_{3n})\,D_{1,n-1}+a_{23n}D_{2,n-1}+d_{3n}D_{4,n-1}, \qquad (2.22)$$

$$D_{4,n,m}=A_{4n}+(a_{14n}+b_{4n})\,D_{1,n-1}+$$

$$+\,a_{24n}D_{2,n-1}+a_{34n}D_{3,n-1}+\left(a_{44n}+\frac{a_{4m}}{\mu_n^4}\right)D_{4,n-1}. \qquad (2.23)$$

В силу (2.6), (2.17)—(2.23) при $m=0, 1, 2, 3$

$$u_n^{(m)}(x)=\sum_{k=1}^{4}D_{k,n,m}y_{k,n}^{(m)}(x)+\frac{1}{4\mu_n^3}\sum_{k=1}^{3}\omega_k D_{k,n-1}xy_{k,n}^{(m)}(x)-$$

$$-\frac{\omega_4}{4\mu_n^3}D_{4,n-1}(1-x)\,y_{4,n}^{(m)}(x)+\sum_{k=1}^{4}D_{k,n-1}T_{k,n,m}^{1}(x)\,y_{k,n}^{(m)}(x), \qquad (2.24)$$

где

$$T^1_{1,n,m}(x) = xO(\mu_n^{-4}) + O(\mu_n^{-5}), \tag{2.25}$$

$$T^1_{k,n,m}(x) = O(\mu_n^{-4}) \quad (k = 2, 3), \tag{2.26}$$

$$T^1_{4,n,m}(x) = (1 - x)O(\mu_n^{-4}) + O(\mu_n^{-5}). \tag{2.27}$$

3. Вспомогательные предложения. Пусть $\operatorname{mes} G \leqslant \infty$, $f_k \in L_p(G) \cap L_q(G)$, $\| f_k \|_{L_p(G)} \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, где $p \geqslant 1$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Предположим, что определитель Δ определяется следующим образом: если a_{kj} $(k, j = 1, 2, \ldots, N)$ — элемент определителя Δ, лежащий в пересечении k строки и j столбца, то

$$a_{kj} = (f_j, f_k) \| f_j \|^{-1}_{L_p(G)} \| f_k \|^{-1}_{L_q(G)}. \tag{3.1}$$

ЛЕММА. *Если* $W = A_1f_1 + A_2f_2 + \ldots + A_Nf_N$, *где* A_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ — *постоянные, то имеет место неравенство*

$$\| \Delta A_k f_k \|_{L_p(G)} \leqslant N! \, \| W \|_{L_p(G)} \quad (k = 1, 2, \ldots, N). \tag{3.2}$$

Доказательство. Пусть T_{kj} — алгебраическое дополнение элемента a_{kj} в определителе Δ. Положим

$$g_j = \sum_{k=1}^{N} \overline{T}_{kj} f_k \| f_k \|^{-1}_{L_q(G)} \quad (j = 1, 2, \ldots, N). \tag{3.3}$$

Нетрудно проверить, что

$$(f_m \| f_m \|^{-1}_{L_p(G)}, g_j) = \Delta \delta_{mj} \quad (m, j = 1, 2, \ldots, N), \tag{3.4}$$

где $\delta_{mj} = 1$ при $m = j$ и $\delta_{mj} = 0$ при $m \neq j$.

Из (3.4) следует, что справедливо равенство

$$\Delta A_k \| f_k \|_{L_p(G)} = (W, g_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, N). \tag{3.5}$$

Ввиду (3.1) и в силу интегрального неравенства Гельдера

$$| a_{kj} | \leqslant 1 \quad (k, j = 1, 2, \ldots, N).$$

Следовательно,

$$| T_{kj} | \leqslant (N - 1)! \quad (k, j = 1, 2, \ldots, N). \tag{3.6}$$

Из (3.3) и (3.6) следует

$$\| g_j \|_{L_q(G)} \leqslant \sum_{k=1}^{N} | T_{kj} | \leqslant N! \quad (j = 1, 2, \ldots, N). \tag{3.7}$$

Используя (3.5), (3.7) и применяя интегральное неравенство Гельдера, приходим к выводу, что

$$\| \Delta A_k f_k \|_{L_p(G)} = | (W, g_k) | \leqslant \| W \|_{L_p(G)} \| g_k \|_{L_q(G)} \leqslant \leqslant N! \, \| W \|_{L_p(G)}.$$

Замечание 3.1. Нетрудно видеть, что

$$\Delta = \Delta_1 \prod_{k=1}^{N} a_{kk}, \tag{3.8}$$

где Δ_1 — определитель Грама системы $\{f_k \| f_k \|^{-1}_{L_2(G)}\}_{k=1}^{N}$, другими словами, если b_{kj} ($k, j = 1, 2, \ldots, N$) — элемент определителя Δ_1, лежащий в пересечении k строки и j столбца, то $b_{kj} = (f_j, \; f_k) \| f_j \|^{-1}_{L_2(G)} \| f_k \|^{-1}_{L_2(G)}$. Известно [6, с. 20], что $\Delta_1 \geqslant 0$. Следовательно, в силу (3.2) и (3.8) при всех $k = 1, 2, \ldots, N$

$$\Delta_1 \| A_k f_k \|_{L_p(G)} \leqslant N! \left(\prod_{m=1}^{N} a_{mm}^{-1} \right) \| W \|_{L_p(G)}. \tag{3.9}$$

4. Доказательство основных результатов. Функции $y_{k,n}(x)$ ($k = 5, 6, 7, 8$) определим следующим образом: $y_{k+4,n}(x) = x y_{k,n}(x)$ ($k = 1, 2, 3$) и $y_{8,n}(x) = (1 - x) \cdot y_{4,n}(x)$. Пусть $p \geqslant 1$ — любое число и $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Непосредственное вычисление показывает: существуют такие постоянные C_1, $C_2 > 0$ и γ_0, не зависящие от p и n, что при условии $| \operatorname{Im} \mu_n | \leqslant b$ ($n = 1, 2, \ldots$) для достаточно больших n при всех $p \geqslant 1$ справедливы неравенства

$$C_2 | \mu_n |^{-1/p} \leqslant \| y_{1,n} \|_{L_p(0,1)} \leqslant C_1 | \mu_n |^{-1/p}, \tag{4.1}$$

$$C_2 \leqslant \| y_{k,n} \|_{L_p(0,1)} \leqslant C_1 \quad (k = 2, 3, 6, 7), \tag{4.2}$$

$$C_2 | \mu_n |^{-1/p} \exp(| \mu_n |) \leqslant \| y_{4,n} \|_{L_p(0,1)} \leqslant C_1 | \mu_n |^{-1/p} \exp(| \mu_n |), \tag{4.3}$$

$$C_2 | \mu_n |^{-1-1/p} \leqslant \| y_{5,n} \|_{L_p(0,1)} \leqslant C_1 | \mu_n |^{-1-1/p}, \tag{4.4}$$

$$C_2 | \mu_n |^{-1-1/p} \exp(| \mu_n |) \leqslant \| y_{8,n} \|_{L_p(0,1)} \leqslant \leqslant C_1 | \mu_n |^{-1-1/p} \exp(| \mu_n |), \tag{4.5}$$

$$\| y_{k,n} \|_{L_p(0,1)} \| y_{k,n} \|_{L_q(0,1)} \| y_{k,n} \|^{-2}_{L_2(0,1)} \leqslant \gamma_0 \quad (k = 1, \ldots, 8). \tag{4.6}$$

Пусть $y^1_{k,n}(x) = y_{k,n}(x) \| y_{k,n} \|^{-1}_{L_2(0,1)}$ ($k = 1, 2, \ldots, 8$). Непосредственными вычислениями нетрудно проверить, что для достаточно больших n

$$(y^1_{k,n},\ y^1_{j,n}) = O(|\mu_n|^{-1/2}) \tag{4.7}$$

при $k \neq j$; $|k-j| \neq 4$; $k, j = 1, 2, \ldots, 8$ и

$$|(y^1_{k,n},\ y^1_{k+4,n})| \leqslant \beta < 1 \quad (k = 1, 2, 3, 4), \tag{4.8}$$

где β — некоторая постоянная, не зависящая от n.

Через Δ_n обозначим определитель Грама системы $\{y^1_{k,n}(x),\ y^1_{k+4,n}(x)\}^4_{k=1}$. В силу (4.7) и в силу того, что все элементы определителя Δ_n по модулю не превосходят единицы, для достаточно больших n

$$\Delta_n = \prod\nolimits_{k=1}^{4} \Delta_{nk} + O(|\mu_n|^{-1/2}), \tag{4.9}$$

где Δ_{nk} — определитель Грама двух функций $y^1_{k,n}(x)$ и $y^1_{k+4,n}(x)$, или, другими словами,

$$\Delta_{nk} = 1 - |(y^1_{k,n},\ y^1_{k+4,n})|^2 \quad (k = 1, 2, 3, 4). \tag{4.10}$$

Ввиду (4.8)—(4.10) для достаточно больших n имеет место

$$\Delta_n \geqslant \frac{1}{2}(1-\beta^2)^4 \equiv \frac{1}{\gamma_1} > 0. \tag{4.11}$$

Принимая во внимание асимптотическую формулу (2.24) при $m = 0$, замечание 3.1 и неравенства (4.11), (4.6), приходим к выводу, что для достаточно больших n при всех $p \geqslant 1$

$$\| D_{k,n,0} y_{k,n} \|_{L_p(0,1)} \leqslant \gamma_2 \{ \| u_n \|_{L_p(0,1)} + M_n \}, \tag{4.12}$$

$$\| D_{k,n-1} y_{k+4,n} \|_{L_p(0,1)} \leqslant \gamma_2 |\mu_n|^3 \{ \| u_n \|_{L_p(0,1)} + M_n \}, \tag{4.13}$$

где $k = 1, 2, 3, 4$; $\gamma_2 = 8!\,4\,\gamma_1\gamma_0^8$ и

$$M_n = \sum\nolimits_{j=1}^{4} \| D_{j,n-1} T^1_{j,n,0}(x)\, y_{j,n}(x) \|_{L_p(0,1)}. \tag{4.14}$$

Из (2.25)—(2.27), (4.1)—(4.5) следует, что для достаточно больших n и при всех $p \geqslant 1$

$$\| T^1_{k,n,0}(x)\, y_{k,n}(x) \|_{L_p(0,1)} \| y_{k+4,n} \|^{-1}_{L_p(0,1)} \leqslant \gamma_3 |\mu_n|^{-4}, \tag{4.15}$$

где $k = 1, 2, 3, 4$ и γ_3 — постоянная, не зависящая от n и p.

Учитывая (4.13) и (4.15), можем написать оценку, которая справедлива при достаточно больших n:

$$\| D_{k,\,n-1} T^1_{k,\,n,\,0}(x)\, y_{k,\,n}(x) \|_{L_p(0,\,1)} \leqslant \gamma_4 |\mu_n|^{-1} \{ \| u_n \|_{L_p(0,\,1)} + M_n \}, \tag{4.16}$$

где $\gamma_4 = \gamma_2\gamma_3$.

На основании (4.14) и (4.16) получим, что для достаточно больших n

$$M_n \leqslant \gamma_5 |\mu_n|^{-1} \| u_n \|_{L_p(0,\,1)}, \tag{4.17}$$

где γ_5 — постоянная, не зависящая от n и p.

Из неравенств (4.12), (4.13), (4.17) и (4.1)—(4.5) следует, что для достаточно больших n при всех $p \geqslant 1$ справедливы неравенства

$$| D_{1,\,n,\,0} | \leqslant \gamma |\mu_n|^{1/p} \| u_n \|_{L_p(0,\,1)}, \tag{4.18}$$

$$| D_{k,\,n,\,0} | \leqslant \gamma \| u_n \|_{L_p(0,\,1)} \quad (k = 2, 3), \tag{4.19}$$

$$| D_{4,\,n,\,0} | \leqslant \gamma |\mu_n|^{1/p} \exp(-|\mu_n|) \| u_n \|_{L_p(0,\,1)}, \tag{4.20}$$

$$| D_{1,\,n-1} | \leqslant \gamma |\mu_n|^{4+1/p} \| u_n \|_{L_p(0,\,1)}, \tag{4.21}$$

$$| D_{k,\,n-1} | \leqslant \gamma |\mu_n|^3 \| u_n \|_{L_p(0,\,1)} \quad (k = 2, 3), \tag{4.22}$$

$$| D_{4,\,n-1} | \leqslant \gamma |\mu_n|^{4+1/p} \exp(-|\mu_n|) \| u_n \|_{L_p(0,\,1)}, \tag{4.23}$$

где γ — некоторая постоянная, не зависящая от n и p.

В силу (2.20)—(2.23) при $m = 0, 1, 2, 3$ справедливы равенства

$$D_{1,\,n,\,m} = D_{1,\,n,\,0} + (a_{1m} - a_{10})\, \mu_n^{-4} D_{1,\,n-1}, \tag{4.24}$$

$$D_{k,\,n,\,m} = D_{k,\,n,\,0} \quad (k = 2, 3), \tag{4.25}$$

$$D_{4,\,n,\,m} = D_{4,\,n,\,0} + (a_{4m} - a_{40})\, \mu_n^{-4} D_{4,\,n-1}. \tag{4.26}$$

Из (4.24)—(4.26) и (4.18)—(4.23) следует, что для достаточно больших n при всех $p \geqslant 1$ и $m = 0, 1, 2, 3$ справедливы оценки

$$| D_{1,\,n,\,m} | \leqslant \tau |\mu_n|^{1/p} \| u_n \|_{L_p(0,\,1)}, \tag{4.27}$$

$$| D_{k,\,n,\,m} | \leqslant \tau \| u_n \|_{L_p(0,\,1)} \quad (k = 2, 3), \tag{4.28}$$

$$| D_{4,\,n,\,m} | \leqslant \tau |\mu_n|^{1/p} \exp(-|\mu_n|) \| u_n \|_{L_p(0,\,1)}, \tag{4.29}$$

где τ — некоторая постоянная, не зависящая от m, n и p.

Далее заметим, что при условии $|\operatorname{Im} \mu_n| \leqslant b$ ($n = 1, 2, \ldots$) для достаточно больших n справедливы неравенства $|x \exp(-\mu_n x)| \leqslant \tau_1 |\mu_n|^{-1}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ и

$|(1-x)\ \exp\ (\mu_n x)| \leqslant \tau_1 |\mu_n|^{-1}\ \exp\ (|\mu_n|)\ (0 \leqslant x \leqslant \leqslant 1)$, где τ_1 — постоянная, не зависящая от n. Учитывая это и асимптотические формулы (2.8), получим, что при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $m = 0, 1, 2, 3$ и для достаточно больших n

$$|x^s y_{k,n}^{(m)}(x)| \leqslant \beta_1 |\mu_n|^m \qquad (k = 2, 3; s = 0, 1), \tag{4.30}$$

$$|x^s y_{1,n}^{(m)}(x)| \leqslant \beta_1 |\mu_n|^{m-s} \qquad (s = 0, 1), \tag{4.31}$$

$$|(1-x)^s y_{4,n}^{(m)}(x)| \leqslant \beta_1 |\mu_n|^{m-s} \exp(|\mu_n|) \qquad (s = 0, 1), \tag{4.32}$$

где β_1 — постоянная, не зависящая от n и m.

В силу (4.30)—(4.32) и (2.25)—(2.27) при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $m = 0, 1, 2, 3$ и для достаточно больших n имеет место

$$|T_{1,n,m}^1(x)\, y_{1,n}^{(m)}(x)| \leqslant \beta_2 |\mu_n|^{m-5}, \tag{4.33}$$

$$|T_{k,n,m}^1(x)\, y_{k,n}^{(m)}(x)| \leqslant \beta_2 |\mu_n|^{m-4} \qquad (k = 2, 3), \tag{4.34}$$

$$|T_{4,n,m}^1(x)\, y_{4,n}^{(m)}(x)| \leqslant \beta_2 |\mu_n|^{m-5} \exp(|\mu_n|), \tag{4.35}$$

где β_2 — некоторая постоянная, не зависящая от n, m.

Неравенство (1.1) для присоединенных функций при достаточно больших n следует из асимптотической формулы (2.24) и из оценок (4.21)—(4.23), (4.27)—(4.29), (4.30)—(4.35). Это же неравенство для собственных функций при достаточно больших n доказывается аналогично.

Неравенство (1.2) для достаточно больших n следует из (2.4) и из оценок (4.21)—(4.23), (4.1)—(4.3).

Фиксируем любой отрезок $K = [c,\ d] \subset G = (0,1)$. Непосредственное вычисление показывает, что для достаточно больших n и при всех $p \geqslant 1$

$$\| y_{1,n} \|_{L_p(K)} \leqslant \beta_3 |\mu_n|^{-1/p} \exp(-c|\mu_n|), \tag{4.36}$$

$$\| y_{4,n} \|_{L_p(K)} \leqslant \beta_3 |\mu_n|^{-1/p} \exp(d|\mu_n|), \tag{4.37}$$

где β_3 — некоторая постоянная, не зависящая от n, p. Ввиду (2.4)

$$\| u_{n-1} \|_{L_p(K)} \leqslant \sum_{j=2}^{3} \| D_{j,n-1} y_{j,n} \|_{L_p(0,1)} + \\ + \| D_{1,n-1} y_{1,n} \|_{L_p(K)} + \| D_{4,n-1} y_{4,n} \|_{L_p(K)}. \tag{4.38}$$

Учитывая (4.36)—(4.38), (4.21)—(4.23) и (4.2), получаем, что при достаточно больших n имеет место (1.3).

Таким образом, мы доказали, что при $n \geqslant N$ (N — некоторое фиксированное достаточно большое натуральное число) и при всех $p \geqslant 1$ справедливы неравенства (1.1)—(1.3), где вместо C и $C(K)$ стоят соответственно некоторая постоянная C_0, не зависящая от n и p, и некоторая постоянная $C_0(K)$, зависящая только от K.

Заметим, что при $u(x) \in C[0, 1]$ функция $f(p) = \| u \|_{L_p(0,1)}$ $(p \geqslant 1)$ — неубывающая функция относительно p. Следовательно,

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |u_n^{(m)}(x)| \, \| u_n \|_{L_p(0,1)}^{-1} \leqslant \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |u_n^{(m)}(x)| \, \| u_n \|_{L_1(0,1)}^{-1} \equiv C_{nm},$$

$$\| \theta_n u_{n-1} \|_{L_p(0,1)} \| u_n \|_{L_p(0,1)}^{-1} \leqslant \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} | \theta_n u_{n-1}(x) | \, \| u_n \|_{L_1(0,1)}^{-1} \equiv C_n^1,$$

$$\| \theta_n u_{n-1} \|_{L_p(K)} \| u_n \|_{L_p(0,1)}^{-1} \leqslant \max_{x \in K} | \theta_n u_{n-1}(x) | \, \| u_n \|_{L_1(0,1)}^{-1} \equiv C_n^1(K),$$

где K — любой отрезок интервала $G = (0, 1)$.

Для завершения доказательства теоремы остается только взять C равным наибольшему из чисел C_0, C_{nm} ($n \leqslant N$; $m = 0, 1, 2, 3$), C_n^1 ($n \leqslant N$) и $C(K)$ равным наибольшему из чисел $C_0(K)$, $C_n^1(K)$, ($n \leqslant N$).

Автор выражает благодарность В. А. Ильину за внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
10.06.85

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. I // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 5. С. 771—794.
[2] Ломов И. С. Некоторые свойства собственных и присоединенных функций оператора Штурма — Лиувилля // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 10. С. 1684—1694.
[3] Тихомиров В. В. Точная оценка регулярных решений одномерного уравнения Шредингера со спектральным параметром // Докл. АН СССР. Т. 273, № 4. С. 807—810.
[4] Йо И. Некоторые вопросы спектральной теории для одномерного оператора Шредингера с потенциалом из L_1 // Докл. АН СССР. 1980. Т. 250. № 1. С. 29—31.
[5] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
[6] Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Т. I. Харьков: Вища школа, 1977.