Н. Б. Керимов, Необходимые условия базисности в $L_2(G)$ системы собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка, *Докл. АН СССР*, 1988, том 299, номер 4, 809–811

УДК 517.927.25

Н.Б. КЕРИМОВ

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ БАЗИСНОСТИ В $L_2(G)$ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 29 VIII 1986)

Пусть G – конечный интервал в R^1. Рассмотрим формальный дифференциальный оператор

(1) $\quad Lu = u'' + q(x)u$

с комплекснозначным потенциалом $q(x) \in L_1^{\mathrm{loc}}(G)$. Обозначим: D – класс функций, абсолютно непрерывных вместе со своими первыми производными в каждом замкнутом подынтервале интервала G. Следуя работам В.А. Ильина [1, 2], собственные и присоединенные функции оператора L будем понимать в более широком смысле, чем обычно. От этих функций не будем требовать подчинения каким-либо краевым условиям. Назовем *собственной функцией оператора* L, *отвечающей собственному значению* λ, любую функцию $y_0(x) \in D$ ($y_0(x) \not\equiv 0$), удовлетворяющую почти всюду в G уравнению

(2) $\quad Ly_0 + \lambda y_0 = 0.$

Присоединенной функцией порядка $m, m \geqslant 1$, *отвечающей тому же значению* λ *и собственной функции* $y_0(x)$, назовем любую функцию $y_m(x)$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению

(3) $\quad Ly_m + \lambda y_m = y_{m-1}.$

Каждой собственной функции может соответствовать одна или более присоединенных функций.

Замечание 1. Если $q(x) \in L_1(G)$, то значения функций $y_m(x)$, $m = 0, 1, \ldots$, в граничных точках интервала G можно определить таким образом, что эти функции будут абсолютно непрерывными вместе со своими первыми производными в замкнутом интервале $\overline{G}$ [3, с. 186].

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $q(x) \in L_1(G)$.

Рассмотрим совершенно произвольную полную в $L_2(G)$ и минимальную систему $\{u_n(x)\}$, состоящую из понимаемых в указанном нами обобщенном смысле собственных и присоединенных функций оператора (1). Будем требовать, чтобы вместе с каждой присоединенной функцией порядка $m \geqslant 1$ эта система обязательно включала в себя соответствующие ей собственную функцию и все присоединенные функции порядка меньше m. Это означает, что каждый элемент $u_n(x)$ системы $\{u_n(x)\}$ абсолютно непрерывен вместе со своей первой производной в замкнутом интервале $\overline{G}$ (см. замечание 1) и почти всюду в G удовлетворяет уравнению

$$Lu_n + \lambda_n u_n = \theta_n u_{n-1},$$

где число θ_n равно либо нулю (в этом случае мы называем $u_n(x)$ собственной функцией оператора L), либо единице (в этом случае мы требуем, чтобы $\lambda_n = \lambda_{n-1}$ и называем $u_n(x)$ *присоединенной функцией оператора* L).

Порядок присоединенной функции $u_n(x)$ обозначим m_n; если $u_n(x)$ – собственная функция, то считаем, что $m_n = 0$.

Поскольку система $\{u_n(x)\}$ полна в $L_2(G)$ и минимальна, то существует и притом единственная система $\{v_n(x)\}$, биортогонально сопряженная в $L_2(G)$ к системе $\{u_n(x)\}$.

Рассмотрим следующие условия:

а) существует целое неотрицательное число N такое, что для всех $n = 1, 2, \dots$ справедливо неравенство $m_n \leqslant N$;

б) система $\{v_n(x)\}$, биортогонально сопряженная в $L_2(G)$ к системе $\{u_n(x)\}$, состоит из понимаемых в указанном выше обобщенном смысле собственных и присоединенных функций дифференциального оператора

$$L^* v = v'' + \overline{q(x)}\, v,$$

формально сопряженного к дифференциальному оператору (1).

Условие б) означает, что каждый элемент $v_n(x)$ системы $\{v_n(x)\}$ абсолютно непрерывен вместе со своей первой производной в замкнутом интервале $\overline{G}$ и почти всюду в G удовлетворяет уравнению

$$L^* v_n + \overline{\lambda_n} v_n = \hat{\theta}_n v_{n+1},$$

где число $\hat{\theta}_n$ равно либо нулю (в этом случае мы называем $v_n(x)$ собственной функцией оператора L^*), либо единице (в этом случае мы требуем $\lambda_n = \lambda_{n+1}$ и называем $v_n(x)$ присоединенной функцией оператора L^*). Легко доказать, что число $\hat{\theta}_n$ связано с введенным выше числом θ_n соотношением $\hat{\theta}_n = \theta_{n+1}$.

Перейдем к формулировке основных результатов.

Т е о р е м а 1. *Пусть выполняются условия* а) *и* б). *Если* $\{u_n(x)\}$ *– базис пространства* $L_2(G)$, *то существует постоянная* C_0 *такая, что для всех собственных значений* λ_n *справедливо неравенство*

$$|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda_n}\,| \leqslant C_0,$$

где всюду $\sqrt{r \exp(i\varphi)} = \sqrt{r}\exp(i\varphi/2)$ *при* $-\pi/2 \leqslant \varphi < 3\pi/2$.

З а м е ч а н и е 2. В работе [4] получен аналогичный результат для оператора

$$l(u) = u'' + q(x)u, \quad x \in G = (0, 1),$$

$$U_j(u) = 0, \qquad j = 1, 2,$$

где $q(x) \in L_2(0, 1)$ и

$$U_j(u) = \alpha_{j_1} u(0) + \alpha_{j_2} u'(0) + \beta_{j_1} u(1) + \beta_{j_2} u'(1),$$

причем $U_1(u)$, $U_2(u)$ линейно независимы и $N = 1$ (см. условие а)).

Т е о р е м а 2. *При выполнении условий* а) *и* б) *необходимым и достаточным условием безусловной базисности в* $L_2(G)$ *системы* $\{u_n(x)\}$ *является существование постоянных* C_0, C *и* C_1, *обеспечивающих справедливость для всех номеров* n *и для всех* $t \geqslant 0$ *неравенств*

$$|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda_n}\,| \leqslant C_0, \qquad \sum_{t \leqslant |\sqrt{\lambda_n}| \leqslant t+1} 1 \leqslant C_1,$$

$$\|u_n\|_{L_2(G)} \cdot \|v_n\|_{L_2(G)} \leqslant C.$$

Теорема 2 является следствием теоремы 1 настоящей работы и основной теоремы работы [5].

З а м е ч а н и е 3. Теоремы 1 и 2 естественным образом обобщаются на случай оператора

$$Lu = u'' + p(x)u' + q(x)u$$

при некотором ограничении на коэффициент $p(x)$ (см. [5]).

Автор выражает глубокую признательность В.А. Ильину за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также В.В. Тихомирову за ценные советы и полезное обсуждение работы.

Азербайджанский государственный университет
им. С.М. Кирова
Баку

Поступило
16 IX 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В.А.* – ДАН, 1976, т. 227, № 4, с. 796–799. 2. *Ильин В.А.* – ДАН, 1976, т. 230, № 1, с. 30–33. 3. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с. 4. *Воронина С.К.* – Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 3, с. 407–417. 5. *Ильин В.А.* – ДАН, 1983, т. 273, № 5, с. 1048–1053.

УДК 517.95 МАТЕМАТИКА

И.С. ЛОМОВ

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЦЕЛЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 3 X 1986)

Известно, что каждый асимптотический ряд по степеням ϵ (см., например, [1, 2]), представляющий решение задачи

(1) $\quad \epsilon u' - A(x)u = h(x), \quad u(0, \epsilon) = u_0, \quad x \in (0, a)$

при $\epsilon \to 0$ в некотором банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, содержит так называемый основной ряд

(2) $$w(x, \epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k w_k(x), \quad w_0 = -A^{-1}h, \quad w_k = A^{-1}w'_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

(в случае необратимого оператора A этот ряд получается иначе; см. [3]). В работах [2–5] доказаны теоремы об аналитической или асимптотической сходимости регуляризованных рядов для решения задачи (1) в зависимости от аналитической или асимптотической сходимости основного ряда (2). В работах [2, 4, 5] получены некоторые достаточные условия аналитичности функции $w(x, \epsilon)$ в окрестности точки $\epsilon = 0$ в случаях, когда существует ограниченный оператор A^{-1}, а A – либо диагональная матрица, либо ограниченный оператор в $\mathfrak{B}$, либо постоянный оператор в гильбертовом пространстве.

В настоящей работе для некоторых классов операторов A получены необходимые и достаточные условия того, чтобы основной ряд (2) представлял собой целую аналитическую функцию (равномерно по $x \in [0, a]$).

Пусть оператор $A(x)$ (оператор-функция) при каждом фиксированном $x \in G = [0, a]$ действует из $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{B}$, область определения $\mathfrak{D}(A)$ оператора не зависит от x и плотна в $\mathfrak{B}$. Решением уравнения (1) на G назовем функцию $u(x, \epsilon)$ со значениями в $\mathfrak{D}(A)$, имеющую сильную производную u'_x и удовлетворяющую уравнению (1) всюду (или почти всюду) на G.