Н. Б. Керимов, К вопросу о необходимых условиях базисности, *Дифференц. уравнения*, 1990, том 26, номер 6, 943–953

Литература

1. Ляпунов А. М. Собр. соч.: В 6 т. М.; Л., 1956. Т. 2.
2. Гробман Д. М. // Мат. сб. 1952. Т. 30, № 1. С. 121—166.
3. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
4. Богданов Ю. С. // Мат. сб. 1957. Т. 41, № 4. С. 481—498.
5. Миллионщиков В. М. // Мат. заметки. 1968. Т. 4, № 2. С. 173—180.
6. Миллионщиков В. М. // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 1. С. 99—104.
7. Изобов Н. А. // Итоги науки и техники. Мат. анализ. 1974. Т. 12. С. 71—146.

Институт математики АН БССР *Поступила в редакцию 31 мая 1989 г.*

УДК 517.927.25

Н. Б. КЕРИМОВ

К ВОПРОСУ О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ БАЗИСНОСТИ

1. Основные определения. Формулировка результатов. На произвольном конечном интервале G вещественной оси рассмотрим оператор

$$Lu(x) = u''(x) + q(x)u(x) \tag{1.1}$$

с комплекснозначным потенциалом $q(x) \in L_1(G)$. Следуя работам В. А. Ильина [1, 2], будем исходить из обобщенной трактовки собственных и присоединенных функций (СПФ) оператора (1.1), допускающей рассмотрение совершенно произвольных краевых условий.

Обозначим через D класс функций, абсолютно непрерывных вместе со своими первыми производными в замкнутом интервале $\overline{G}$.

Под собственной функцией оператора (1.1), отвечающей комплексному собственному значению λ, будем понимать любую не равную тождественному нулю функцию $y_0(x) \in D$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $Ly_0(x) + \lambda y_0(x) = 0$.

Аналогично под присоединенной функцией этого оператора порядка m ($m \geqslant 1$), отвечающей тому же значению λ и собственной функции $y_0(x)$, будем понимать любую комплекснозначную функцию $y_m(x) \in D$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $Ly_m(x) + \lambda y_m(x) = y_{m-1}(x)$.

Каждой собственной функции может соответствовать одна или более присоединенных функций, отвечающих тому же собственному значению.

Рассмотрим произвольную систему $\{u_n(x)\}$, состоящую из понимаемых в указанном нами обобщенном смысле СПФ оператора (1.1). Потребуем, чтобы вместе с каждой присоединенной функцией порядка $m \geqslant 1$ эта система содержала также соответствующие ей собственную функцию и все присоединенные функции порядка меньше m. Это означает, что каждый элемент $u_n(x)$ системы $\{u_n(x)\}$ принадлежит D и почти всюду в G удовлетворяет уравнению

$$Lu_n(x) + \lambda_n u_n(x) = \theta_n u_{n-1}(x), \tag{1.2}$$

где число θ_n равно либо нулю (в этом случае называем $u_n(x)$ собственной функцией оператора L), либо единице (в этом случае требуем, чтобы $\lambda_n = \lambda_{n-1}$, и называем $u_n(x)$ присоединенной функцией оператора L).

Порядок присоединенной функции $u_n(x)$ обозначим через m_n (если $u_n(x)$ — собственная функция, то считаем, что $m_n = 0$).

Хорошо известно (см., например, [3, с. 306]), что если система $\{u_n(x)\}$ полна в $L_2(G)$ и минимальна, то существует и притом единственная система $\{v_n(x)\}$, биортогонально сопряженная к $\{u_n(x)\}$ в $L_2(G)$.

Символом L^* обозначим оператор, формально сопряженный к оператору L, а именно $L^*v(x) = v''(x) + \overline{q(x)}v(x)$.

В дальнейшем наряду с собственными значениями λ_n будем использовать спектральный параметр $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$, где $\sqrt{r \exp(i\varphi)} = \sqrt{r} \exp(i\varphi/2)$ при $-\pi/2 \leqslant \varphi < 3\pi/2$.

Сформулируем теперь основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $\{u_n(x)\}$ — произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система, состоящая из СПФ оператора (1.1). Пусть выполняются следующие два условия:*

1) существует целое неотрицательное число N_0, такое, что для всех $n \geqslant 1$ справедливо $m_n \leqslant N_0$;

2) система $\{v_n(x)\}$, биортогонально сопряженная к $\{u_n(x)\}$ в $L_2(G)$, состоит из СПФ оператора L^*.

Если $\{u_n(x)\}$ образует базис пространства $L_2(G)$, то существует постоянная C_0 такая, что для всех $n \geqslant 1$

$$|\operatorname{Im} \mu_n| \leqslant C_0. \tag{1.3}$$

Второе условие теоремы 1 означает, что каждая функция $v_n(x)$ принадлежит D и почти всюду в G удовлетворяет уравнению $L^* v_n(x) + \bar{\lambda}_n v_n(x) = \hat{\theta}_n v_{n+1}(x)$, где число $\hat{\theta}_n$ равно либо нулю (в этом случае называем $v_n(x)$ собственной функцией оператора L^*), либо единице (в этом случае требуем, чтобы $\lambda_n = \lambda_{n+1}$, и называем $v_n(x)$ присоединенной функцией оператора L^*). Число $\hat{\theta}_n$ связано с введенным выше числом θ_n соотношением $\hat{\theta}_n = \theta_{n+1}$.

Нетрудно показать, что второе условие теоремы 1 выполняется для любой полной в $L_2(G)$ и минимальной системы СПФ произвольной краевой задачи с локальными краевыми условиями.

Замечание 1.1. В работе [4] получен аналогичный результат для оператора $lu(x) = u''(x) + q(x)u(x)$, $x \in (0, 1)$, где $q(x) \in L_2(0, 1)$; $K_i(u) = 0$ $(i = 1, 2)$ — краевые условия, где $K_i(u) = a_{i1}u(0) + a_{i2}u'(0) + a_{i3}u(1) + a_{i4}u'(1)$, причем $K_1(u)$, $K_2(u)$ линейно независимы и $N_0 = 1$ (см. первое условие теоремы 1 настоящей работы).

Теорема 2. *Пусть $\{u_n(x)\}$ — произвольная система, состоящая из СПФ оператора (1.1), и выполняется первое условие теоремы 1. Если $\{u_n(x)\}$ образует базис пространства $L_2(G)$, то последовательность $\{\mu_n\}$ не имеет конечных точек сгущения.*

Теорема 3. *Пусть $\{u_n(x)\}$ — произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система, состоящая из СПФ оператора (1.1). Если выполняются все условия теоремы 1 и система $\{v_n(x)\}$ полна в $L_2(v)$, то необходимым и достаточным условием безусловной базисности в $L_2(G)$ системы $\{u_n(x)\}$ является существование постоянных C_0, C_1 и C_2, обеспечивающих справедливость неравенств*

$$|\operatorname{Im} \mu_n| \leqslant C_0 \quad (\textit{для всех номеров } n), \tag{1.3a}$$

$$\sum_{\mu \leqslant |\mu_n| \leqslant \mu+1} 1 \leqslant C_1 \quad (\textit{для любого } \mu \geqslant 0), \tag{1.4}$$

$$\|u_n\|_{L_2(G)} \|v_n\|_{L_2(G)} \leqslant C_2 \quad (\textit{для всех номеров } n). \tag{1.5}$$

Замечание 1.2. Сформулированные выше результаты легко переносятся на случай оператора $Lu(x) = u''(x) + p_1(x)u'(x) + p_2(x)u(x)$, где $p_1(x)$ абсолютно непрерывна на замкнутом интервале $\bar{G}$ и $p_2(x) \in L_1(G)$ (см. [1]).

2. Некоторые вспомогательные результаты. Для простоты записи норму в пространстве $L_2(G)$ будем обозначать через $\|\cdot\|$, и, как обычно, $(f, g) = \int_G f(x)\overline{g(x)}dx$ для $f, g \in L_2(G)$. Всюду в дальнейшем под C будем понимать положительную постоянную, не обязательно одну и ту же.

Лемма 2.1. *Пусть $\{u_n(x)\}$ — произвольная система, состоящая из СПФ оператора (1.1). Если $G = (-R, R)$, где $0 < R < \infty$, то при $-R \leqslant t \leqslant R$ справедливо следующее представление:*

$$\pm 2i\mu_n u_n(t) = [u'_n(-R) \pm i\mu_n u_n(-R)] \exp[\pm i\mu_n(R+t)] +$$
$$+ [-u'_n(R) \pm i\mu_n u_n(R)] \exp[\pm i\mu_n(R-t)] + \tag{2.1}$$
$$+ \int_{-R}^{R} [\theta_n u_{n-1}(x) - q(x) u_n(x)] \exp[\pm i\mu_n |x-t|] dx.$$

Доказательство. Чтобы доказать справедливость представления (2.1), умножим (1.2) на функцию $\exp[\pm i\mu_n |x-t|]$, где $-R \leqslant x$, $t \leqslant R$, проинтегрируем полученное тождество по x от $(-R)$ до R и применим формулу интегрирования по частям.

Лемма 2.2. *Пусть $\{u_n(x)\}$ — произвольная система, состоящая из СПФ оператора (1.1). Если выполняется первое условие теоремы 1, то для всех номеров n справедливы неравенства*

$$\max_{x \in \bar{G}} |u_n^{(s)}(x)| \leqslant C(1+|\mu_n|)^s (1+|\operatorname{Im}\mu_n|)^{1/2} \|u_n\| \quad (s=0,\ 1), \tag{2.2}$$

$$\|\theta_n u_{n-1}\| \leqslant C(1+|\mu_n|)(1+|\operatorname{Im}\mu_n|)\|u_n\|. \tag{2.3}$$

Оценки (2.2) и (2.3) установлены В. В. Тихомировым [5].

Лемма 2.3. *Пусть $\{u_n(x)\}$ — произвольная система, состоящая из СПФ оператора (1.1), и выполняется первое условие теоремы 1. Если для произвольной $f(x) \in L_2(G)$*

$$\lim_{n\to\infty} (u_n,\ f)\|u_n\|^{-1} = 0, \tag{2.4}$$

то последовательность $\{\mu_n\}$ не имеет конечных точек сгущения.

Доказательство. Пусть утверждение леммы 2.3 не верно. Тогда существуют конечное число a и подпоследовательность $\{\mu_{n_k}\}$ такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_{n_k} = a$ и система $\{u_{n_k}(x)\}$ состоит только из собственных функций.

Очевидно, что последовательность $\{\mu_{n_k}\}$ ограничена. Следовательно, в силу леммы 2.2 при всех $k \geqslant 1$ и $s=0,1$ имеем

$$|u_{n_k}^{(s)}(x)|\,\|u_{n_k}\|^{-1} \leqslant C, \quad x \in \bar{G}. \tag{2.5}$$

Далее, используя (2.5) при $s=1$, получаем

$$|u_{n_k}(x) - u_{n_k}(y)|\,\|u_{n_k}\|^{-1} = \left| \int_y^x u'_{n_k}(t)\,dt \right| \|u_{n_k}\|^{-1} \leqslant C|x-y|,$$

где $x,\ y \in \bar{G}$ и $k \geqslant 1$.

Таким образом, мы доказали, что $\{u_{n_k}(x)\|u_{n_k}\|^{-1}\}$ — равномерно ограниченное равностепенно непрерывное семейство функций на $\bar{G}$. Следовательно, в силу теоремы Асколи [6, с. 44] можно считать (при необходимости переходя к подпоследовательности), что имеет место

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_k}(x)\|u_{n_k}\|^{-1} = \psi(x) \quad (\text{равномерно по } x \in \bar{G}), \tag{2.6}$$

где $\psi(x)$ — некоторая функция из класса $C(\bar{G})$.

Согласно (2.6) и (2.4), имеем $\|\psi\|^2 = \lim\limits_{k\to\infty} (u_{n_k},\ \psi)\|u_{n_k}\|^{-1} = 0$. Кроме того, из (2.6) следует, что $\|\psi\| = 1$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Прежде чем перейти к формулировке последнего вспомогательного утверждения, введем некоторые обозначения. Пусть $0 < R < \infty$, α и β — комплексные числа. Положим

$$D_n(\alpha,\ \beta) = \int_0^{2R} \dots \int_0^{2R} \exp(-\alpha t_0 - \beta\tau_n)\,dt_0 \dots dt_n, \tag{2.7}$$

$$P_n(\alpha, \beta)=\int_0^{2R}\dots\int_0^{2R}\exp\left[i\alpha t_0+i\beta(2R-t_n+\tau_n)\right]dt_0\dots dt_n, \qquad (2.8)$$

$$J_n(\alpha, \beta)=\int_0^{2R}\dots\int_0^{2R}\exp\left[i\alpha t_0+i\beta(t_n+\tau_n)\right]dt_0\dots dt_n, \qquad (2.9)$$

где $\tau_n=|t_0-t_1|+|t_1-t_2|+\dots+|t_{n-1}-t_n|$ при $n\geqslant 1$ и $\tau_0=0$.

Лемма 2.4. *Справедливы следующие оценки:*

$$0<D_n(0, \beta)\leqslant 2^{n+1}R\beta^{-n} \quad \text{при} \quad \beta>0, \qquad (2.10)$$

$$0<D_n(\alpha, \beta)\leqslant 2^{n+1}\alpha^{-1}\beta^{-n} \quad \text{при} \quad \alpha, \beta>0, \qquad (2.11)$$

$$0<P_n(i\alpha, i\alpha)\leqslant(2R)^{n+1}\exp(-2\alpha R) \quad \text{при} \quad \alpha\geqslant 0, \qquad (2.12)$$

$$0<P_n(i\alpha, i\beta)\leqslant 2(2R)^n\alpha^{-1}\exp(-2\beta R) \quad \text{при} \quad \alpha\geqslant 2\beta>0, \qquad (2.13)$$

$$|J_n(\alpha, \alpha)|\leqslant 2^{n+3}|\alpha|^{-1}(\operatorname{Im}\alpha)^{-n} \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}\alpha>0, \qquad (2.14)$$

$$0<J_n(i\alpha, i\beta)\leqslant 2^{n+3}\alpha^{-1}\beta^{-n} \quad \text{при} \quad \alpha, \beta>0. \qquad (2.15)$$

Доказательство. Пусть $a\geqslant 0$, $0\leqslant t\leqslant 2R$ и

$$L(a, t)=\int_0^{2R}\exp(-a|t-x|)\,dx. \qquad (2.16)$$

Нетрудно убедиться, что при $0\leqslant t\leqslant 2R$

$$0<L(a, t)\leqslant\begin{cases}2R, & \text{если} \quad a=0,\\ 2a^{-1}, & \text{если} \quad a>0.\end{cases} \qquad (2.17)$$

В силу (2.7), (2.16) и (2.17) при $\alpha\geqslant 0$, $\beta>0$ имеем

$$0<D_n(\alpha, \beta)=\int_0^{2R}\dots\int_0^{2R}\exp(-\alpha t_0-\beta\tau_{n-1})L(\beta, t_{n-1})\,dt_0\dots dt_{n-1}\leqslant$$
$$\leqslant 2\beta^{-1}D_{n-1}(\alpha, \beta),$$

и, следовательно,

$$D_n(\alpha, \beta)\leqslant(2\beta^{-1})^n D_0(\alpha, \beta). \qquad (2.18)$$

Оценки (2.10) и (2.11) следуют из равенства $D_0(\alpha, \beta)=L(\alpha, 0)$ и из неравенств (2.17), (2.18).

Докажем (2.12) и (2.13). Поскольку $t_0-t_n+\tau_n\geqslant 0$, то при $\alpha, \beta\geqslant 0$ имеем

$$0<P_n(i\alpha, i\beta)=\int_0^{2R}\dots\int_0^{2R}\exp\left[(\beta-\alpha)t_0-\beta(2R+t_0-t_n+\tau_n)\right]dt_0\dots dt_n\leqslant$$
$$\leqslant(2R)^n\exp(-2\beta R)\int_0^{2R}\exp\left[(\beta-\alpha)t_0\right]dt_0. \qquad (2.19)$$

Поскольку

$$\int_0^{2R}\exp\left[(\beta-\alpha)t_0\right]dt_0\leqslant\begin{cases}2R, & \text{если} \quad \alpha=\beta,\\ 2\alpha^{-1}, & \text{если} \quad \alpha\geqslant 2\beta>0,\end{cases}$$

то отсюда и из (2.19) следуют (2.12) и (2.13).

Пусть

$$E_m(\alpha,\ t)=\int\limits_t^{2R}\frac{x^m}{m!}\exp\,[i\alpha(2x-t)]dx, \tag{2.20}$$

$$L_{n,k}(\alpha,\ \beta)=\int\limits_0^{2R}\ldots\int\limits_0^{2R}\frac{t_k^{n-k}}{(n-k)!}\exp\,[i\alpha t_0+i\beta(t_k+\tau_k)]dt_0\ldots dt_k, \tag{2.21}$$

где $0\leqslant t\leqslant 2R$, $m\geqslant 0$ и $n\geqslant k\geqslant 0$. Заметим, что

$$J_n(\alpha,\ \beta)=L_{n,n}(\alpha,\ \beta). \tag{2.22}$$

Легко проверить, что при $m\geqslant 0$, $\operatorname{Im}\alpha>0$ и $0\leqslant t\leqslant 2R$ справедливо неравенство

$$|E_m(\alpha,\ t)|\leqslant 2|\alpha|^{-1}(\operatorname{Im}\alpha)^{-m}. \tag{2.23}$$

Преобразуем $L_{n,k}(\alpha,\beta)$ при $n\geqslant k\geqslant 1$:

$$L_{n,k}(\alpha,\ \beta)=\int\limits_0^{2R}\ldots\int\limits_0^{2R}\exp\,(i\alpha t_0+i\beta\tau_{k-1})\left\{\int\limits_0^{t_{k-1}}\frac{t_k^{n-k}}{(n-k)!}\exp\,(i\beta t_{k-1})dt_k+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{t_{k-1}}^{2R}\frac{t_k^{n-k}}{(n-k)!}\exp\,[i\beta(2t_k-t_{k-1})]dt_k\right\}dt_0\ldots dt_{k-1}=L_{n,k-1}(\alpha,\ \beta)+$$

$$+\int\limits_0^{2R}\ldots\int\limits_0^{2R}\exp\,(i\alpha t_0+i\beta\tau_{k-1})E_{n-k}(\beta,\ t_{k-1})dt_0\ldots dt_{k-1}.$$

Отсюда и из (2.7), (2.11), (2.23) заключаем, что при $\operatorname{Im}\alpha$, $\operatorname{Im}\beta>0$ и $1\leqslant k\leqslant n$ справедливо

$$|L_{n,k}(\alpha,\ \beta)|\leqslant D_{k-1}(\operatorname{Im}\alpha,\ \operatorname{Im}\beta)\max_{0\leqslant t\leqslant 2R}|E_{n-k}(\beta,\ t)|+$$

$$+|L_{n,k-1}(\alpha,\ \beta)|\leqslant 2^{k+1}|\beta|^{-1}(\operatorname{Im}\alpha)^{-1}(\operatorname{Im}\beta)^{-n+1}+|L_{n,k-1}(\alpha,\ \beta)|,$$

и, следовательно, при $n\geqslant 1$ и $\operatorname{Im}\alpha$, $\operatorname{Im}\beta>0$

$$|L_{n,n}(\alpha,\ \beta)|\leqslant 2^{n+2}|\beta|^{-1}(\operatorname{Im}\alpha)^{-1}(\operatorname{Im}\beta)^{-n+1}+|L_{n,0}(\alpha,\ \beta)|. \tag{2.24}$$

Учитывая (2.20) и (2.21), получаем

$$L_{n,0}(\alpha,\ \beta)=E_n\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ 0\right). \tag{2.25}$$

Из последнего равенства с учетом (2.23) следует, что при $\operatorname{Im}\alpha>0$ имеет место $L_{n,0}(\alpha,\ \alpha)\leqslant 2|\alpha|^{-1}(\operatorname{Im}\alpha)^{-n}$. Отсюда и из (2.24) вытекает справедливость (2.14).

При $\alpha,\beta>0$ из (2.25) и (2.23) получаем

$$0<L_{n,0}(i\alpha,\ i\beta)=E_n\left(\frac{i\alpha+i\beta}{2},\ 0\right)\leqslant 2^{n+2}\alpha^{-1}\beta^{-n}. \tag{2.26}$$

Оценка (2.15) следует из (2.22), (2.24) и (2.26).

3. Доказательство теоремы 1. Пусть (1.3) не верно. Тогда из последовательности $\{\mu_n\}$ можно выбрать такую подпоследовательность $\{\mu_{n_k}\}$, что

$$\lim_{k\to\infty}|\operatorname{Im}\mu_{n_k}|=\infty, \tag{3.1}$$

и, кроме того, система $\{u_{n_k}(x)\}$ будет состоять только из собственных функций.

Согласно первому условию теоремы 1, существует такое неотрицательное целое число N $(N\leqslant N_0)$ и такая бесконечная подсистема M системы $\{u_{n_k}(x)\}$, что каждой собственной функции из M соответствует точно N присоединенных функций. Для простоты записи элементы системы M опять обозначим через $u_{n_k}(x)$.

Положим

$$u_{k,m}(x)=u_{n_k+m}(x) \quad (0\leqslant m\leqslant N;\ k\geqslant 1), \tag{3.2}$$

$$V_k(x)=v_{n_k+N}(x) \quad (k\geqslant 1), \tag{3.3}$$

$$\Lambda_k=\mu_{n_k} \quad (k\geqslant 1). \tag{3.4}$$

Очевидно, что $V_k(x)$ является собственной функцией оператора L^*, соответствующей собственному значению Λ_k. Кроме того,

$$\lim_{k\to\infty}|\operatorname{Im}\Lambda_k|=\infty. \tag{3.1a}$$

Будем считать (при необходимости переходя к подпоследовательности), что

$$0<\operatorname{Im}\Lambda_k(\operatorname{Im}\Lambda_{k+1})^{-1}\leqslant 1/2 \quad (k\geqslant 1), \tag{3.5}$$

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{Im}\Lambda_k(\operatorname{Im}\Lambda_{k+1})^{-1}=0, \tag{3.6}$$

$$|\operatorname{Im}\Lambda_k|>1 \quad (k\geqslant 1). \tag{3.7}$$

Так как по выбору последовательность $\{\operatorname{Im}\Lambda_k\}$ знакопостоянная, то будем рассматривать только случай

$$\operatorname{Im}\Lambda_k>1 \quad (k\geqslant 1). \tag{3.7a}$$

Случай $\operatorname{Im}\Lambda_k<-1$ $(k\geqslant 1)$ рассматривается совершенно аналогично.

В силу наших обозначений и второго условия теоремы 1 при $k\geqslant 1$ и $0\leqslant m\leqslant N$ имеем

$$(u_{k,m},\ V_k)=\delta_{m,N}, \tag{3.8}$$

$$(u_{k,m},\ V_{k+1})=0, \tag{3.9}$$

где $\delta_{m,N}$ — символ Кронекера.

Не ограничивая общности, будем считать, что $G=(-R,\ R)$, где $0<R<\infty$. Ввиду обозначений (3.2)—(3.4) и леммы 2.1 при $x\in\bar{G}$, $0\leqslant m\leqslant N$ и $k\geqslant 1$ справедливо представление

$$\begin{aligned} u_{k,m}(x)&=H^{(1)}_{k,m}\sqrt{2\operatorname{Im}\Lambda_k}\exp[i\Lambda_k(R+x)]+\\ &+H^{(2)}_{k,m}\sqrt{2\operatorname{Im}\Lambda_k}\exp[i\Lambda_k(R-x)]+\\ &+\frac{1}{2i\Lambda_k}\int\limits_{-R}^{R}[u_{k,m-1}(t)-q(t)u_{k,m}(t)]\exp[i\Lambda_k|x-t|]dt, \end{aligned} \tag{3.10}$$

где $u_{k,-1}(x)\equiv 0$ и при $j=1,\ 2$

$$H^{(j)}_{k,m}=\frac{(-1)^{j+1}u'_{k,m}((-1)^jR)+i\Lambda_k u_{k,m}((-1)^jR)}{2i\Lambda_k\sqrt{2\operatorname{Im}\Lambda_k}}. \tag{3.11}$$

Из леммы 2.2 и из (3.7a) следует

$$\max_{-R\leqslant x\leqslant R}|u^{(s)}_{k,m}(x)|\leqslant C|\Lambda_k|^s\sqrt{\operatorname{Im}\Lambda_k}\|u_{k,m}\|, \tag{3.12}$$

где $0 \leqslant m \leqslant N$, $k \geqslant 1$ и $s=0, 1$. Принимая во внимание (3.11) и (3.12), приходим к выводу, что при $0 \leqslant m \leqslant N$ и $k \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$|H_{k,m}^{(j)}| \leqslant C \|u_{k,m}\| \quad (j=1, 2). \tag{3.13}$$

Используя (3.7а) и (3.12), легко можно показать, что при $x \in \bar{G}$, $0 \leqslant m \leqslant N$ и $k \geqslant 1$ справедливо

$$\int_{-R}^{R} q(t) u_{k,m}(t) \exp (i\Lambda_k |x-t|) dt = \sqrt{2 \operatorname{Im} \Lambda_k} \|u_{k,m}\| O_1(1), \tag{3.14}$$

где $O_1(1)$ — ограниченная функция от x, m и k.

Из (3.10) и (3.14) получаем

$$\begin{gathered} u_{k,m}(x) = \sqrt{2 \operatorname{Im} \Lambda_k} \Big\{ H_{k,m}^{(1)} \exp [i\Lambda_k (R+x)] + \\ + H_{k,m}^{(2)} \exp [i\Lambda_k (R-x)] + \frac{\|u_{k,m}\|}{\Lambda_k} O_1(1) \Big\} + \\ + \frac{1}{2i\Lambda_k} \int_{-R}^{R} u_{k,m-1}(t) \exp (i\Lambda_k |x-t|) dt, \end{gathered} \tag{3.15}$$

где $x \in \bar{G}$, $0 \leqslant m \leqslant N$ и $k \geqslant 1$.

Совершенно аналогично при $x \in \bar{G}$ и $k \geqslant 1$

$$\begin{gathered} \overline{V_k(x)} = \sqrt{2 \operatorname{Im} \Lambda_k} \Big\{ G_k^{(1)} \exp [i\Lambda_k (R+x)] + \\ + G_k^{(2)} \exp [i\Lambda_k (R-x)] + \frac{\|V_k\|}{\Lambda_k} O_2(1) \Big\}, \end{gathered} \tag{3.16}$$

где $G_k^{(j)}$ — некоторые комплексные числа, причем

$$|G_k^{(j)}| \leqslant C \|V_k\| \quad (j=1, 2;\ k \geqslant 1), \tag{3.17}$$

а $O_2(1)$ — ограниченная функция от k и x.

Согласно (3.13) и (3.17), можем считать (при необходимости переходя к подпоследовательности), что при $0 \leqslant m \leqslant N$ и $j=1, 2$ справедливы

$$\lim_{k \to \infty} H_{k,m}^{(j)} \| u_{k,m} \|^{-1} = h_m^{(j)}, \tag{3.18}$$

$$\lim_{k \to \infty} G_k^{(j)} \| V_k \|^{-1} = g^{(j)}, \tag{3.19}$$

где $h_m^{(j)}$ и $g^{(j)}$ — конечные числа.

Выражение, заключенное в фигурные скобки в (3.15), вместе с множителем $\sqrt{2 \operatorname{Im} \Lambda_k}$ обозначим через $T_{k,m}(x)$. Тогда при $x \in \bar{G}$, $0 \leqslant m \leqslant N$ и $k \geqslant 1$ имеем

$$u_{k,m}(x) = T_{k,m}(x) + \frac{1}{2i\Lambda_k} \int_{-R}^{R} u_{k,m-1}(t) \exp (i\Lambda_k |t-x|) dt. \tag{3.20}$$

Положим

$$\beta_{k,m}^{(j)} = [H_{k,m}^{(1)} G_k^{(j)} + H_{k,m}^{(2)} G_k^{(3-j)}] \| u_{k,m} \|^{-1} \| V_k \|^{-1}, \tag{3.21}$$

$$\beta_{k,m}^{(2+j)} = [H_{k,m}^{(1)} G_{k+1}^{(j)} + H_{k,m}^{(2)} G_{k+1}^{(3-j)}] \| u_{k,m} \|^{-1} \| V_{k+1} \|^{-1}, \tag{3.22}$$

$$\beta_{k,m} = [|H_{k,m}^{(1)}| + |H_{k,m}^{(2)}|] \|u_{k,m}\|^{-1}, \tag{3.23}$$

$$\beta_k = [\,|G_k^{(1)}| + |G_k^{(2)}|\,]\,\|V_k\|^{-1}, \tag{3.24}$$

где $0 \leqslant m \leqslant N$, $j=1$, 2 и $k \geqslant 1$. Согласно (3.18) и (3.19), при $0 \leqslant m \leqslant N$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} \beta_{k,m}^{(1)} = \lim_{k\to\infty} \beta_{k,m}^{(3)} = h_m^{(1)} g^{(1)} + h_m^{(2)} g^{(2)}, \tag{3.25}$$

$$\sum_{j=1}^{4} |\beta_{k,m}^{(j)}| + \beta_{k,m} + \beta_k \leqslant C \quad (k \geqslant 1). \tag{3.26}$$

Используя введенные выше обозначения, непосредственным вычислением можно убедиться в том, что при $0 \leqslant m \leqslant N$ и $k \geqslant 1$ справедливы

$$\frac{(T_{k,m}, V_k)}{\|u_{k,m}\|\,\|V_k\|} = \frac{\operatorname{Im}\Lambda_k}{i\Lambda_k}\,[\exp(4i\Lambda_k R) - 1]\,\beta_{k,m}^{(1)} +$$
$$+ 4R\exp(2i\Lambda_k R)\,\beta_{k,m}^{(2)} + \frac{\beta_{k,m}}{\Lambda_k}\,O(1) + \frac{\beta_k O(1)}{\Lambda_k} + \frac{\operatorname{Im}\Lambda_k}{\Lambda_k^2}\,O(1), \tag{3.27}$$

$$\frac{(T_{k,m}, V_{k+1})}{\|u_{k,m}\|\,\|V_{k+1}\|} =$$
$$= 2\sqrt{\operatorname{Im}\Lambda_k \operatorname{Im}\Lambda_{k+1}}\left\{\frac{\exp[2iR(\Lambda_k+\Lambda_{k+1})] - 1}{i(\Lambda_k+\Lambda_{k+1})}\,\beta_{k,m}^{(3)} + \right.$$
$$+ \frac{\exp(2i\Lambda_{k+1}R) - \exp(2i\Lambda_k R)}{i(\Lambda_{k+1}-\Lambda_k)}\,\beta_{k,m}^{(4)} + \frac{\beta_{k,m} O(1)}{\Lambda_{k+1}\operatorname{Im}\Lambda_k} + \tag{3.28}$$
$$\left. + \frac{\beta_{k+1} O(1)}{\Lambda_k \operatorname{Im}\Lambda_{k+1}} + \frac{O(1)}{\Lambda_k \Lambda_{k+1}}\right\},$$

где $O(1)$ означает ограниченную функцию от m и k.

Из (3.26)—(3.28) заключаем, что при $0 \leqslant m \leqslant N$ и $k \geqslant 1$

$$\frac{(T_{k,m}, V_k)}{\|u_{k,m}\|\,\|V_k\|} = -\frac{\operatorname{Im}\Lambda_k}{i\Lambda_k}\,\beta_{k,m}^{(1)} + \frac{O(1)}{\operatorname{Im}\Lambda_k}, \tag{3.29}$$

$$\frac{(T_{k,m}, V_{k+1})}{\|u_{k,m}\|\,\|V_{k+1}\|}\;\frac{i(\Lambda_{k+1}+\Lambda_k)}{2\sqrt{\operatorname{Im}\Lambda_k \operatorname{Im}\Lambda_{k+1}}} = -\beta_{k,m}^{(3)} +$$
$$+ \frac{\Lambda_{k+1}+\Lambda_k}{\Lambda_{k+1}-\Lambda_k}\,[\exp(2i\Lambda_{k+1}R) - \exp(2i\Lambda_k R)]\,\beta_{k,m}^{(4)} + \tag{3.30}$$
$$+ \frac{i\Lambda_k}{\Lambda_{k+1}\operatorname{Im}\Lambda_k}\,O(1) + \frac{i\Lambda_{k+1}}{\Lambda_k \operatorname{Im}\Lambda_{k+1}}\,O(1) + \frac{O(1)}{\operatorname{Im}\Lambda_k}.$$

Поскольку $\{u_{k,N}(x)\}$ является частью базиса $L_2(G)$, а $\{V_k(x)\}$ — соответствующей частью биортогонально сопряженной системы, то хорошо известно (см., например, [6, с. 372]), что $1 \leqslant \|u_{k,N}\|\,\|V_k\| \leqslant C$ $(k \geqslant 1)$. Следовательно, можно считать (при необходимости переходя к подпоследовательности), что

$$\lim_{k\to\infty} \|u_{k,N}\|\,\|V_k\| = \alpha, \tag{3.31}$$

где $\alpha \geqslant 1$ — конечное число.

Случай $N=0$. Согласно (3.20), (3.8) и (3.9), при $k \geqslant 1$

$$u_{k,0}(x) = T_{k,0}(x) \quad (x \in \bar{G}), \tag{3.20a}$$

$$(u_{k,0}, V_k) = 1, \tag{3.8a}$$

$$(u_{k,0},\ V_{k+1})=0. \tag{3.9a}$$

Отсюда и из (3.29) заключаем

$$\|u_{k,0}\|^{-1}\|V_k\|^{-1}=-\frac{\operatorname{Im}\Lambda_k}{i\Lambda_k}\beta^{(1)}_{k,0}+\frac{O(1)}{\operatorname{Im}\Lambda_k}\quad (k\geqslant 1),$$

и, следовательно, в силу (3.31)

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\operatorname{Im}\Lambda_k}{i\Lambda_k}\beta^{(1)}_{k,0}=-\alpha^{-1}\neq 0.$$

Учитывая последнее соотношение и (3.25), получаем

$$\lim_{k\to\infty}\beta^{(1)}_{k,0}=h^{(1)}_0 g^{(1)}+h^{(2)}_0 g^{(2)}\equiv\beta\neq 0, \tag{3.32}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\operatorname{Im}\Lambda_k}{i\Lambda_k}=-(\alpha\beta)^{-1}\neq 0. \tag{3.33}$$

Далее, согласно (3.5), (3.6), (3.7а) и (3.33), при $k\geqslant 1$

$$\frac{\Lambda_{k+1}+\Lambda_k}{\Lambda_{k+1}-\Lambda_k}[\exp(2i\Lambda_{k+1}R)-\exp(2i\Lambda_k R)]=\frac{O(1)}{\Lambda_k}, \tag{3.34}$$

$$\frac{i\Lambda_k}{\Lambda_{k+1}\operatorname{Im}\Lambda_k}=\frac{O(1)}{\Lambda_k},\quad \frac{i\Lambda_{k+1}}{\Lambda_k\operatorname{Im}\Lambda_{k+1}}=\frac{O(1)}{\Lambda_k}, \tag{3.35}$$

и, следовательно, в силу (3.20а), (3.9а), (3.30) и (3.26) $0=-\beta^{(3)}_{k,0}+$ $+O(1)/\Lambda_k$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty}\beta^{(3)}_{k,0}=0$. Тогда в силу (3.25) имеем $\lim\limits_{k\to\infty}\beta^{(1)}_{k,0}=0$, что противоречит (3.32).

Случай $N\geqslant 1$. Ввиду (3.20) при $x\in\bar{G}$, $1\leqslant m\leqslant N$ и $k\geqslant 1$ имеем

$$\begin{gathered}u_{k,m}(x)=T_{k,m}(x)+\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{(2i\Lambda_k)^n}\int\limits_{-R}^{R}\ldots\int\limits_{-R}^{R}T_{k,m-n}(t_n)\times\\ \times\exp[i\Lambda_k(|x-t_1|+|t_1-t_2|+\ldots+|t_{n-1}-t_n|)]dt_1\ldots dt_n,\end{gathered} \tag{3.36}$$

и, кроме того,

$$u_{k,0}(x)=T_{k,0}(x). \tag{3.20б}$$

Используя (3.8), (3.9) и (3.36), получаем

$$\delta_{k,p}\delta_{m,N}=(T_{k,m},\ V_p)+\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{(2i\Lambda_k)^n}\int\limits_{-R}^{R}\ldots\int\limits_{-R}^{R}\overline{V_p(t_0)}T_{k,m-n}(t_n)\times$$
$$\times\exp(i\Lambda_k\tau_n)dt_0\ldots dt_n,$$

или, что то же самое,

$$\begin{gathered}\delta_{k,p}\delta_{m,N}=(T_{k,m},\ V_p)+\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{(2i\Lambda_k)^n}\int\limits_{0}^{2R}\ldots\int\limits_{0}^{2R}\overline{V_p(t_0-R)}\times\\ \times T_{k,m-n}(t_n-R)\exp(i\Lambda_k\tau_n)dt_0\ldots dt_n,\end{gathered} \tag{3.37}$$

где $1\leqslant m\leqslant N$ и k, $p\geqslant 1$.

Из леммы 2.2 и из (3.7а) следует, что при $k\geqslant 1$ и $1\leqslant n\leqslant m\leqslant N$ справедливо $\|u_{k,m-n}\|\leqslant C|\Lambda_k\operatorname{Im}\Lambda_k|^n\|u_{k,m}\|$. Тогда, согласно (3.37), при $1\leqslant m\leqslant N$ и k, $p\geqslant 1$ имеем

$$|(T_{k,m},\ V_p)-\delta_{k,p}\delta_{m,N}|\,\|u_{k,m}\|^{-1}\|V_p\|^{-1}\leqslant C\sum_{n=1}^{m}(\operatorname{Im}\Lambda_k)^n|A^{(p)}_{k,m-n}|, \tag{3.38}$$

где

$$A^{(p)}_{k,m-n}=\int_0^{2R}\ldots\int_0^{2R}\overline{V_p(t_0-R)T_{k,m-n}(t_n-R)}\exp(i\Lambda_k\tau_n)\,dt_0\ldots dt_n/\|u_{k,m}\|\,\|V_p\|.$$

Кроме того, из (3.8), (3.9) и (3.20б) следует, что при $k,\ p\geqslant 1$

$$(T_{k,0},\ V_p)\|u_{k,0}\|^{-1}\|V_p\|^{-1}=0. \tag{3.39}$$

Используя обозначения леммы 2.4 и (3.21)—(3.24), после несложных выкладок получаем

$$\begin{gathered}A^{(k)}_{k,m-n}=2\operatorname{Im}\Lambda_k\{\beta^{(1)}_{k,m-n}J_n(\Lambda_k,\ \Lambda_k)+\beta^{(2)}_{k,m-n}P_n(i\operatorname{Im}\Lambda_k,\ i\operatorname{Im}\Lambda_k)O(1)+\\+(\beta_{k,m-n}+\beta_k)\Lambda_k^{-1}D_n(\operatorname{Im}\Lambda_k,\ \operatorname{Im}\Lambda_k)O(1)+\Lambda_k^{-2}D_n(0,\ \operatorname{Im}\Lambda_k)O(1)\},\end{gathered} \tag{3.40}$$

$$\begin{gathered}A^{(k+1)}_{k,m-n}=2\sqrt{\operatorname{Im}\Lambda_k\operatorname{Im}\Lambda_{k+1}}\,\{\beta^{(3)}_{k,m-n}J_n(\Lambda_{k+1},\ \Lambda_k)+\\+\beta^{(4)}_{k,m-n}P_n(i\operatorname{Im}\Lambda_{k+1},\ i\operatorname{Im}\Lambda_k)O(1)+\beta_{k,m-n}\Lambda_{k+1}^{-1}\times\\\times D_n(\operatorname{Im}\Lambda_k,\ \operatorname{Im}\Lambda_k)O(1)+\beta_{k+1}\Lambda_k^{-1}D_n(\operatorname{Im}\Lambda_{k+1},\ \operatorname{Im}\Lambda_k)O(1)+\\+(\Lambda_k\Lambda_{k+1})^{-1}D_n(0,\ \operatorname{Im}\Lambda_k)O(1)\},\end{gathered} \tag{3.41}$$

где $1\leqslant n\leqslant m\leqslant N$ и $k\geqslant 1$. Из (3.40) в силу леммы 2.4 и неравенства (3.26) следует, что при $1\leqslant n\leqslant m\leqslant N$ и $k\geqslant 1$ имеет место

$$|A^{(k)}_{k,m-n}|\leqslant C(\operatorname{Im}\Lambda_k)^{-n}\left\{\left|\beta^{(1)}_{k,m-n}\frac{\operatorname{Im}\Lambda_k}{i\Lambda_k}\right|+(\operatorname{Im}\Lambda_k)^{-1}\right\}. \tag{3.42}$$

Используя (3.38) при $p=k$ и принимая во внимание (3.29), (3.42), заключаем, что при $1\leqslant m\leqslant N$ и $k\geqslant 1$

$$\begin{gathered}\left|\beta^{(1)}_{k,m}\frac{\operatorname{Im}\Lambda_k}{i\Lambda_k}+\frac{\delta_{m,N}}{\|u_{k,m}\|\,\|V_k\|}\right|\leqslant\\\leqslant C\left\{\sum_{n=1}^{m}\left|\beta^{(1)}_{k,m-n}\frac{\operatorname{Im}\Lambda_k}{i\Lambda_k}\right|+(\operatorname{Im}\Lambda_k)^{-1}\right\}.\end{gathered} \tag{3.43}$$

Далее, из (3.39) и (3.29) получаем

$$\beta^{(1)}_{k,0}\frac{\operatorname{Im}\Lambda_k}{i\Lambda_k}+\frac{O(1)}{\operatorname{Im}\Lambda_k}=0\quad(k\geqslant 1). \tag{3.44}$$

Согласно (3.43), (3.44) и (3.31),

$$\lim_{k\to\infty}\beta^{(1)}_{k,m}\frac{\operatorname{Im}\Lambda_k}{i\Lambda_k}=0\quad(0\leqslant m\leqslant N-1),$$

$$\lim_{k\to\infty}\beta^{(1)}_{k,N}\frac{\operatorname{Im}\Lambda_k}{i\Lambda_k}=-\alpha^{-1}\neq 0.$$

Ввиду последних двух соотношений и (3.25)

$$\lim_{k\to\infty}\beta^{(1)}_{k,m}=h^{(1)}_m g^{(1)}+h^{(2)}_m g^{(2)}=0\quad(0\leqslant m\leqslant N-1), \tag{3.32а}$$

$$\lim_{k\to\infty}\beta^{(1)}_{k,N}=h^{(1)}_N g^{(1)}+h^{(2)}_N g^{(2)}\equiv\beta\neq 0, \tag{3.32б}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\operatorname{Im}\Lambda_k}{i\Lambda_k}=-(\alpha\beta)^{-1}\neq 0. \tag{3.33а}$$

Из (3.5), (3.6), (3.7а) и (3.33а) следует справедливость (3.34), (3.35), и, следовательно, в силу (3.30) имеем

$$|\beta_{k,N}^{(3)}|\leqslant C\left\{\frac{|(T_{k,N},\ V_{k+1})|}{\|u_{k,N}\|\,\|V_{k+1}\|}\ \frac{|\Lambda_k|+|\Lambda_{k+1}|}{\sqrt{|\Lambda_k\Lambda_{k+1}|}}+\frac{1}{|\Lambda_k|}\right\}, \tag{3.45}$$

где $k\geqslant 1$. Ввиду (3.41), (3.33а), (3.26) и леммы 2.4 при $k\geqslant 1$ и $1\leqslant n\leqslant N$ справедливо

$$|A_{k,N-n}^{(k+1)}|\leqslant\frac{C\sqrt{|\Lambda_k\Lambda_{k+1}|}}{|\Lambda_k|^n|\Lambda_{k+1}|}\left\{|\beta_{k,N-n}^{(3)}|+\frac{1}{|\Lambda_k|}\right\}. \tag{3.46}$$

Из (3.38) при $p=k+1$ $(k\geqslant 1)$ и $m=N$ получаем

$$\frac{|(T_{k,N},\ V_{k+1})|}{\|u_{k,N}\|\,\|V_{k+1}\|}\leqslant C\sum_{n=1}^{N}|\Lambda_k|^n|A_{k,N-n}^{(k+1)}|. \tag{3.47}$$

Следствием неравенств (3.45)—(3.47) является неравенство

$$|\beta_{k,N}^{(3)}|\leqslant C\left\{\sum_{n=1}^{N}|\beta_{k,N-n}^{(3)}|+\frac{1}{|\Lambda_k|}\right\}\quad(k\geqslant 1). \tag{3.48}$$

В силу (3.25) и (3.32а) при $1\leqslant n\leqslant N$ имеем $\lim\limits_{k\to\infty}\beta_{k,N-n}^{(3)}=0$. Отсюда и из (3.48) получаем $\lim\limits_{k\to\infty}\beta_{k,N}^{(3)}=0$. Тогда ввиду (3.25) получим $\lim\limits_{k\to\infty}\beta_{k,N}^{(1)}=0$, что противоречит (3.32б).

Теорема 1 полностью доказана.

4. Доказательство теорем 2 и 3. Утверждение теоремы 2 следует из леммы 2 и из следующих очевидных соотношений:

$$\lim_{n\to\infty}(u_n,\ f)\,\|v_n\|=0,\quad \|u_n\|\,\|v_n\|\geqslant(u_n,\ v_n)=1,$$

$$(u_n,\ f)\,\|u_n\|^{-1}=(u_n,\ f)\,\|v_n\|\,(\|u_n\|\,\|v_n\|)^{-1},$$

где $f(x)$ — произвольная функция из $L_2(G)$ и $\{v_n(x)\}$ — система, биортогонально сопряженная к $\{u_n(x)\}$ в $L_2(G)$.

Докажем теорему 3. Достаточность условий (1.3а), (1.4) и (1.5) доказана в работе [1]. Необходимость условия (1.3а) следует из теоремы 1, а необходимость условия (1.4) доказана в работе [2] (см. также [7]). Необходимость условия (1.5) хорошо известна не только для безусловной, но также для обычной базисности произвольной системы функций (см., например, [8, с. 372]).

Часть результатов настоящей работы впервые анонсирована в [9].

Автор выражает благодарность В. А. Ильину за постановку задачи и внимание к работе, а также В. В. Тихомирову за полезное обсуждение.

Литература

1. Ильин В. А. // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 5. С. 1048—1053.
2. Ильин В. А. // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 12. С. 2059—2071.
3. Качмаж Г., Штейнгауз С. Теория ортогональных рядов. М., 1958.
4. Воронина С. К. // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 3. С. 407—417.
5. Тихомиров В. В. // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 4. С. 807—810.
6. Рид М., Саймон В. Методы современной математической физики. М., 1977. Т. 1.
7. Будаев В. Д. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 6. С. 941—952.
8. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., 1965.
9. Керимов Н. Б. // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299, № 4. С. 809—811.

Азербайджанский государственный университет им. С. М. Кирова

Поступила в редакцию 6 апреля 1989 г.