Н. Б. Керимов, Т. И. Аллахвердиев, Об одной краевой задаче. II, *Дифференц. уравнения*, 1993, том 29, номер 6, 952–960

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ИЮНЬ 1993 г., ТОМ 29, № 6

УДК 517.927

Н. Б. КЕРИМОВ, Т. И. АЛЛАХВЕРДИЕВ

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ. II

Рассмотрим следующую краевую задачу с одним и тем же спектральным параметром в уравнении и в граничных условиях:

$$-u''(x)+q(x)u(x)=\lambda u(x), \tag{0.1}$$

$$-[\beta_{11}u(a)-\beta_{12}u'(a)]=\lambda[\alpha_{11}u(a)-\alpha_{12}u'(a)], \tag{0.2}$$

$$-[\beta_{21}u(b)-\beta_{22}u'(b)]=\lambda[\alpha_{21}u(b)-\alpha_{22}u'(b)], \tag{0.3}$$

где $a\leqslant x\leqslant b$, $[a, b]\subset R$, λ — спектральный параметр, $q(x)$ — действительнозначная функция из класса $C[a, b]$ и α_{ik}, $\beta_{ik}\in R$ $(i, k=1, 2)$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что выполняется условие

$$\alpha_{12}=0,\ (-1)^i(\beta_{i2}\alpha_{i1}-\beta_{i1}\alpha_{i2})>0,\ i=1, 2. \tag{0.4}$$

В работе [1] доказана следующая осцилляционная

Теорема 0.1. *Существует неограниченно возрастающая последовательность собственных значений $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ краевой задачи (0.1)—(0.3). При этом либо при любом $n=0, 1, \ldots$ собственная функция, соответствующая собственному значению λ_n, имеет ровно n простых нулей в интервале (a, b), либо существует такое число $n_0\in N\cup\{0\}$, что собственная функция, соответствующая собственному значению λ_n, при $n\leqslant n_0$ имеет ровно n простых нулей, а при $n>n_0$ ровно $(n-1)$ простых нулей в интервале (a, b).*

В настоящей работе, являющейся продолжением работы [1], установлены асимптотические формулы для собственных значений и нулей собственных функций краевой задачи (0.1)—(0.3) при выполнении условия (0.4).

1. Определение и свойства функции $\Theta_n(x)$. Пусть $u_n(x)$ — собственная функция краевой задачи (0.1)—(0.3), соответствующая собственному значению λ_n $(n\in N\cup\{0\})$.

Обозначим через Δ наибольший элемент множества корней линейных функций $\alpha_{mk}t+\beta_{mk}$ $(m, k=1, 2)$. Очевидно, что дробно-линейная функция $P_m(t)=(\alpha_{m2}t+\beta_{m2})(\alpha_{m1}t+\beta_{m1})^{-1}$, $m=1, 2$, имеет постоянный знак в интервале $(\Delta, +\infty)$. Пусть $p_m=\lim\limits_{t\to+\infty}\operatorname{sgn}P_m(t)$ и N_0 — такое натуральное число, что при $n\geqslant N_0$ справедливо $\lambda_n>\Delta_0$, где $\Delta_0=\max\{\Delta, 2c+1\}$, $c=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|q(x)|$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $n\geqslant N_0$.

Введем угловую переменную $\Theta_n(x)=\operatorname{Arctg}\dfrac{u_n(x)}{u_n'(x)}$, или, точнее,

$$\Theta_n(x)=\arg\{u_n'(x)+iu_n(x)\}. \tag{1.1}$$

Учитывая (0.2), определяем начальное значение

$$\Theta_n(a)=\operatorname{arctg}\frac{\beta_{12}}{\lambda_n\alpha_{11}+\beta_{11}}+\frac{1-p_1}{2}\pi. \tag{1.2}$$

Для других x функция $\Theta_n(x)$ задается формулой (1.1) с точностью до произвольного слагаемого, кратного 2π, поскольку функции $u_n(x)$ и

$u'_n(x)$ не могут обращаться в нуль одновременно. Это выражение, кратное 2π, надлежит зафиксировать так, чтобы функция $\Theta_n(x)$ удовлетворяла условию (1.2) и была непрерывной по x. Этим функция $\Theta_n(x)$ определяется единственным образом [2, с. 244].

Лемма 1.1. *$\Theta_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\Theta'_n(x)=\cos^2\Theta_n(x)+(\lambda_n-q(x))\sin^2\Theta_n(x) \tag{1.3}$$

и является возрастающей функцией на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Равенство (1.3) доказано в [2, с. 245]. Поскольку $\lambda_n>\Delta_0\geqslant 2c+1$ при $n\geqslant N_0$, то при всех $x\in[a, b]$ имеем

$$\Theta'_n(x)\geqslant\cos^2\Theta_n(x)+(\lambda_n-|q(x)|)\sin^2\Theta_n(x)\geqslant\sin^2\Theta_n(x)+\cos^2\Theta_n(x)=1.$$

Этим доказано, что $\Theta_n(x)$ является возрастающей функцией на отрезке $[a, b]$.

Из (1.1) ясно, что нули функции $u_n(x)$ совпадают с точками, в которых $\Theta_n(x)$ кратно π. Рассматривая функцию $u_n(x)$, когда x возрастает от a до b, видим, что она имеет нуль в точке $x\in(a, b)$ в том и только в том случае, когда в этой точке $\Theta_n(x)$, возрастая, проходит значение, кратное π.

Так как $0<\Theta_n(a)<\pi$, видим, что при возрастании x от a до b функция $\Theta_n(x)$ последовательно принимает конечное число значений $\pi, 2\pi, \ldots$ Поскольку функция $\Theta_n(x)$ не может, убывая, стремиться к углу, кратному π, то она достигает углов, кратных π, в порядке возрастания.

Нетрудно заметить, что $u_n(a)\neq0$, $u'_n(a)\neq0$ при $n\geqslant N_0$, и поэтому функция $\Theta_n(x)$, вообще говоря, не принимает неположительных значений.

Обозначим через $x_{n,k}$ $(k=1, 2, \ldots, k_n)$ нули собственной функции $u_n(x)$ в интервале (a, b):

$$a<x_{n,1}<x_{n,2}<\cdots<x_{n,k_n}<b.$$

Из осцилляционной теоремы 0.1 следует, что $k_n=n$ или $k_n=n-1$ (для всех достаточно больших n). Кроме того, нетрудно видеть, что

$$\Theta_n(b)=\operatorname{arctg}\frac{\lambda_n\alpha_{22}+\beta_{22}}{\lambda_n\alpha_{21}+\beta_{21}}+\frac{1-p_2}{2}\pi+\pi k_n. \tag{1.4}$$

2. Некоторые вспомогательные соотношения.

Лемма 2.1. *Для собственных значений λ_n краевой задачи (0.1)—(0.3) при $n\geqslant N_0$ справедлива оценка*

$$c_1n^2\leqslant\lambda_n\leqslant c_2n^2, \tag{2.1}$$

где c_1 и c_2 — некоторые положительные постоянные.

Доказательство. Поскольку $\lambda_n>2c+1=2\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|q(x)|+1$ при $n\geqslant N_0$, то из (1.3) имеем

$$\cos^2\Theta_n(x)+\frac{1}{2}\lambda_n\sin^2\Theta_n(x)\leqslant\Theta'_n(x)\leqslant\cos^2\Theta_n(x)+\frac{3}{2}\lambda_n\sin^2\Theta_n(x).$$

Отсюда легко получить неравенство

$$\frac{1}{2}\leqslant\frac{\Theta'_n(x)}{\cos^2\Theta_n(x)+\lambda_n\sin^2\Theta_n(x)}\leqslant\frac{3}{2}.$$

Проинтегрировав обе части последнего неравенства от a до b, будем иметь

$$\frac{b-a}{2}\leqslant\int\limits_a^b\frac{\Theta'_n(x)\,dx}{\cos^2\Theta_n(x)+\lambda_n\sin^2\Theta_n(x)}\leqslant\frac{3(b-a)}{2}.$$

Производя в интеграле замену $\Theta_n(x)=\varphi$, получим

$$\frac{b-a}{2}\leqslant T_n\leqslant\frac{3(b-a)}{2}, \tag{2.2}$$

где

$$T_n=\int\limits_{\Theta_n(a)}^{\Theta_n(b)}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi+\lambda_n\sin^2\varphi}.$$

Поскольку в силу (1.2) и (1.4) имеем $0<\Theta_n(a)<\pi$, $\pi n<\Theta_n(b)<$ $<\pi(n+1)$, то справедливы оценки

$$T_n\geqslant\int\limits_{\pi}^{\pi n}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi+\lambda_n\sin^2\varphi}=\frac{\pi(n-1)}{\sqrt{\lambda_n}},$$

$$T_n\leqslant\int\limits_{0}^{\pi(n+1)}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi+\lambda_n\sin^2\varphi}=\frac{\pi(n+1)}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Отсюда и из (2.2) получаем

$$\frac{\pi(n-1)}{\sqrt{\lambda_n}}\leqslant\frac{3(b-a)}{2},\quad\frac{\pi(n+1)}{\sqrt{\lambda_n}}\geqslant\frac{b-a}{2}.$$

Из последних двух неравенств следует оценка

$$\frac{2\pi(n-1)}{3(b-a)}\leqslant\sqrt{\lambda_n}\leqslant\frac{2\pi(n+1)}{b-a}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть* $q(x)\in C[a,b]$ *и* $a=t_0<t_1<\ldots<t_m<t_{m+1}=b$. *Тогда*

$$\int\limits_a^b q(x)\,dx-\sum_{k=1}^{m-1}q(t_k)\Delta t_k=O(\omega(\delta)), \tag{2.3}$$

где $\Delta t_k=t_{k+1}-t_k$, $\delta=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant m}\Delta t_k$, $\omega(\delta)=\delta+\omega_1(\delta)$ *и* $\omega_1(\delta)$ — *модуль непрерывности функции* $q(x)$ *на отрезке* $[a,b]$.

Доказательство.

$$\Big|\int\limits_a^b q(x)\,dx-\sum_{k=1}^{m-1}q(t_k)\Delta t_k\Big|=\Big|\int\limits_a^{t_1}q(x)\,dx+\Big[\sum_{k=1}^{m-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}q(x)\,dx-$$
$$-\sum_{k=1}^{m-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}q(t_k)\,dx\Big]+\int\limits_{t_m}^{b}q(x)\,dx\Big|\leqslant\int\limits_a^{t_1}|q(x)|\,dx+\sum_{k=1}^{m-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}|q(x)-$$
$$-q(t_k)|\,dx+\int\limits_{t_m}^{b}|q(x)|\,dx\leqslant c(t_1-a)+\omega_1(\delta)\sum_{k=1}^{m-1}\Delta t_k+$$
$$+c(b-t_m)\leqslant 2c\delta+(b-a)\,\omega_1(\delta)\leqslant(2c+b-a)\,\omega(\delta).$$

Лемма 2.2 доказана.

Замечание 2.1. При выполнении дополнительного условия $q(x)\not\equiv\mathrm{const}$ функция $\omega(\delta)$ в равенстве (2.3) может быть заменена функцией $\omega_1(\delta)$. Это следует из того факта [3, с. 109], что функция $\dfrac{\omega_1(\delta)}{\delta}$ на промежутке $0<\delta\leqslant b-a$ не возрастает, поэтому

$$\delta\leqslant\frac{b-a}{\omega_1(b-a)}\,\omega_1(\delta)=\mathrm{const}\,\omega_1(\delta),\quad 0<\delta\leqslant b-a.$$

Последнее неравенство равносильно соотношению $\omega(\delta)=O(\omega_1(\delta))$, $0<\delta\leqslant b-a$.

3. Асимптотические формулы для собственных значений и нулей собственных функций. Всюду в этом пункте предполагается, что $n\geqslant\geqslant\max(N_0, n_0)$, где n_0 — число, фигурирующее в теореме 0.1.

Пусть $w_n(x)$ — собственная функция краевой задачи (0.1)—(0.3), имеющая n нулей в интервале (a, b). Через Λ_n обозначим собственное значение, соответствующее собственной функции $w_n(x)$. Из осцилляционной теоремы 0.1 следует, что или $\Lambda_n=\lambda_n$ (в этом случае $w_n(x)=u_n(x)$), или $\Lambda_n=\lambda_{n+1}$ (в этом случае $w_n(x)=u_{n+1}(x)$). Как и раньше, нули функции $w_n(x)$ обозначим через $x_{n,k}$:

$$a<x_{n,1}<x_{n,2}<\ldots<x_{n,n}<b.$$

Имеет место следующая

Теорема 3.1. *Если $q(x)\in C[a, b]$ и выполняется условие (0.4), то справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$\Lambda_n=\left(\frac{\pi(n-\sigma)}{b-a}\right)^2\left[1+\frac{b-a}{(\pi(n-\sigma))^2}\left\{\int_a^b q(t)\,dt+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2(l_1-l_2)\right\}+O(n^{-2}\omega(n^{-1}))\right],$$

$$x_{n,k}=a+\frac{(b-a)(k-1)}{n-\sigma}+O(n^{-2}),$$

где $\omega(\delta)=\delta+\omega_1(\delta)$, $\omega_1(\delta)$ — *модуль непрерывности функции* $q(x)$ *на отрезке* $[a, b]$ *и*

$$\sigma=1-\frac{1}{2}|\operatorname{sgn}\alpha_{22}|,\ l_1=-\frac{\beta_{12}}{\alpha_{11}},$$

$$l_2=\begin{cases}\dfrac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}}, & \textit{если } \alpha_{22}\neq 0,\\ -\dfrac{\beta_{22}}{\alpha_{21}}, & \textit{если } \alpha_{22}=0.\end{cases}$$

Доказательство. Теорему 3.1 будем доказывать только в случае $\alpha_{22}\neq 0$. Случай $\alpha_{22}=0$ рассматривается совершенно аналогично.

Как и раньше, введем функцию $\Theta_n(x)=\arg(w_n'(x)+iw_n(x))$. В силу леммы 1.1 она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Theta_n'(x)=\cos^2\Theta_n(x)+(\Lambda_n-q(x))\sin^2\Theta_n(x) \tag{3.1}$$

и является возрастающей функцией на отрезке $[a, b]$. Кроме того, справедливы равенства (1.2), (1.4) и

$$\Theta_n(x_{n,k})=\pi k \quad (1\leqslant k\leqslant n). \tag{3.2}$$

В силу условия (0.4) в рассматриваемом случае $p_1=-1$ и

$$p_2=\begin{cases}\operatorname{sgn}(\alpha_{21}\alpha_{22}), & \text{если } \alpha_{21}\neq 0,\\ -1, & \text{если } \alpha_{21}=0.\end{cases}$$

Для простоты записи индекс n при $\Theta_n(x)$ и Λ_n в дальнейшем будем опускать.

Из (3.1) получаем

$$\frac{\Theta'(x)}{\cos^2\Theta(x)+\Lambda\sin^2\Theta(x)}=1-\frac{q(x)\sin^2\Theta(x)}{\cos^2\Theta(x)+\Lambda\sin^2\Theta(x)}. \tag{3.3}$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства от a до $x_{n,1}$:

$$\int_a^{x_{n,1}}\frac{\Theta'(x)\,dx}{\cos^2\Theta(x)+\Lambda\sin^2\Theta(x)}=x_{n,1}-a-\int_a^{x_{n,1}}\frac{q(x)\sin^2\Theta(x)\,dx}{\cos^2\Theta(x)+\Lambda\sin^2\Theta(x)}.$$

Производя в первом интеграле последнего равенства замену $\Theta(x)=\varphi$ и учитывая (3.2), получим

$$\int_{\Theta(a)}^{\pi}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi+\Lambda\sin^2\varphi}=x_{n,1}-a-\int_{a}^{x_{n,1}}\frac{q(x)\sin^2\Theta(x)\,dx}{\cos^2\Theta(x)+\Lambda\sin^2\Theta(x)}.$$

Действуя аналогичным образом, получим

$$\int_{\pi n}^{\Theta(b)}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi+\Lambda\sin^2\varphi}=b-x_{n,n}-\int_{x_{n,n}}^{b}\frac{q(x)\sin^2\Theta(x)\,dx}{\cos^2\Theta(x)+\Lambda\sin^2\Theta(x)},$$

$$\int_{\pi k}^{\pi(k+1)}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi+\Lambda\sin^2\varphi}=x_{n,k+1}-x_{n,k}-$$

$$-\int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}}\frac{q(x)\sin^2\Theta(x)\,dx}{\cos^2\Theta(x)+\Lambda\sin^2\Theta(x)}\quad(1\leqslant k\leqslant n-1).$$

Учитывая (1.2) и (1.4), непосредственным вычислением легко можно убедиться в том, что

$$\int_{\Theta(a)}^{\pi}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi+\Lambda\sin^2\varphi}=-\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\beta_{12}\sqrt{\Lambda}}{\alpha_{11}\Lambda+\beta_{11}}\right)=-\frac{\beta_{12}}{\alpha_{11}\Lambda}+O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right),$$

$$\int_{\pi n}^{\Theta(b)}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi+\Lambda\sin^2\varphi}=\frac{\pi(1-p_2)}{2\sqrt{\Lambda}}+\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\Lambda}\frac{\alpha_{22}\Lambda+\beta_{22}}{\alpha_{21}\Lambda+\beta_{21}}\right),$$

$$\int_{\pi k}^{\pi(k+1)}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi+\Lambda\sin^2\varphi}=\frac{\pi}{\sqrt{\Lambda}}\quad(1\leqslant k\leqslant n-1),$$

$$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\Lambda}\frac{\alpha_{22}\Lambda+\beta_{22}}{\alpha_{21}\Lambda+\beta_{21}}\right)=\frac{\pi}{2}p_2-\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}\sqrt{\Lambda}}+O\left(\frac{1}{\Lambda\sqrt{\Lambda}}\right).$$

Из последних семи равенств и из леммы 2.1 следует

$$x_{n,1}-a-\int_{a}^{x_{n,1}}\frac{q(x)\sin^2\Theta(x)\,dx}{\cos^2\Theta(x)+\Lambda\sin^2\Theta(x)}=-\frac{\beta_{12}}{\alpha_{11}\Lambda}+O(n^{-4}),\tag{3.4}$$

$$b-x_{n,n}-\int_{x_{n,n}}^{b}\frac{q(x)\sin^2\Theta(x)}{\cos^2\Theta(x)+\Lambda\sin^2\Theta(x)}\,dx=\frac{\pi}{2\sqrt{\Lambda}}-\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}\Lambda}+O(n^{-4}),\tag{3.5}$$

$$x_{n,k+1}-x_{n,k}-\int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}}\frac{q(x)\sin^2\Theta(x)\,dx}{\cos^2\Theta(x)+\Lambda\sin^2\Theta(x)}=\frac{\pi}{\sqrt{\Lambda}}.\tag{3.6}$$

Докажем справедливость следующих соотношений:

$$x_{n,k+1}-x_{n,k}=\frac{\pi}{\sqrt{\Lambda}}+O(n^{-3})\quad(1\leqslant k\leqslant n-1),\tag{3.7}$$

$$x_{n,1}-a=-\frac{\beta_{12}}{\alpha_{11}\Lambda}+O(n^{-4}), \qquad (3.8)$$

$$b-x_{n,n}=\frac{\pi}{2\sqrt{\Lambda}}-\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}\Lambda}+O(n^{-3}). \qquad (3.9)$$

Обозначим интеграл в (3.6) через $P_{n,k}$ и оценим его. Так как

$$\frac{\sin^2\Theta(x)}{\cos^2\Theta(x)+\Lambda\sin^2\Theta(x)}\leqslant\frac{1}{\Lambda}, \qquad (3.10)$$

то имеем оценку

$$|P_{n,k}|\leqslant\frac{1}{\Lambda}\int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}}|q(x)|\,dx\leqslant\frac{1}{\Lambda}\int_a^b|q(x)|\,dx\leqslant\text{const}\,n^{-2}.$$

Следовательно, справедлива формула

$$x_{n,k+1}-x_{n,k}=\frac{\pi}{\sqrt{\Lambda}}+O(n^{-2}) \quad (1\leqslant k\leqslant n-1)$$

и, в частности,

$$x_{n,k+1}-x_{n,k}=O(n^{-1}) \quad (1\leqslant k\leqslant n-1). \qquad (3.11)$$

Используя последнее соотношение и (3.10), получаем

$$|P_{n,k}|\leqslant\frac{1}{\Lambda}\int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}}|q(x)|\,dx\leqslant\text{const}\,\frac{x_{n,k+1}-x_{n,k}}{\Lambda}\leqslant\text{const}\,n^{-3}.$$

Отсюда и из (3.6) получим справедливость формулы (3.7). Формулы (3.8) и (3.9) доказываются совершенно аналогично.

Оценим разность

$$J_{n,k}=\int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}}\frac{q(x)\sin^2\Theta(x)\,dx}{\cos^2\Theta(x)+\Lambda\sin^2\Theta(x)}-$$
$$-q(x_{n,k})\int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}}\frac{\sin^2\Theta(x)\,dx}{\cos^2\Theta(x)+\Lambda\sin^2\Theta(x)} \quad (1\leqslant k\leqslant n-1).$$

Учитывая (3.11), (3.10) и используя хорошо известные свойства [3, с. 108] модуля непрерывности непрерывных функций, получим

$$|J_{n,k}|\leqslant\int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}}\frac{|q(x)-q(x_{n,k})|\sin^2\Theta(x)\,dx}{\cos^2\Theta(x)+\Lambda\sin^2\Theta(x)}\leqslant$$
$$\leqslant\Lambda^{-1}\omega_1(\Delta x_{n,k})\Delta x_{n,k}\leqslant\text{const}\,n^{-3}\omega_1(n^{-1}) \quad (1\leqslant k\leqslant n-1),$$

где $\Delta x_{n,k}=x_{n,k+1}-x_{n,k}$ и $\omega_1(\delta)$ — модуль непрерывности функции $q(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Отсюда следует, что при $1\leqslant k\leqslant n-1$ справедливо соотношение

$$\int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}}\frac{q(x)\sin^2\Theta(x)\,dx}{\cos^2\Theta(x)+\Lambda\sin^2\Theta(x)}=q(x_{n,k})E_{n,k}+O(n^{-3}\omega_1(n^{-1})), \qquad (3.12)$$

где

$$E_{n,k}=\int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}}\frac{\sin^2\Theta(x)\,dx}{\cos^2\Theta(x)+\Lambda\sin^2\Theta(x)}. \qquad (3.13)$$

Теперь займемся преобразованием выражения $E_{n,k}$. Используя (1.3), получим

$$E_{n,k}=\int\limits_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}}\frac{\Theta'(x)\sin^2\Theta(x)\,dx}{[\cos^2\Theta(x)+\Lambda\sin^2\Theta(x)]\,[\cos^2\Theta(x)+(\Lambda-q(x))\sin^2\Theta(x)]}=$$

$$=\int\limits_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}}\frac{\sin^2\Theta(x)\,d\Theta(x)}{[\cos^2\Theta(x)+\Lambda\sin^2\Theta(x)]^2}+$$

$$+\int\limits_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}}\frac{q(x)\sin^4\Theta(x)\,d\Theta(x)}{[\cos^2\Theta(x)+\Lambda\sin^2\Theta(x)]^2[\cos^2\Theta(x)+(\Lambda-q(x))\sin^2\Theta(x)]}.$$

Таким образом,

$$E_{n,k}=\frac{\pi}{2\Lambda\sqrt{\Lambda}}+$$

$$+\int\limits_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}}\frac{q(x)\sin^4\Theta(x)\,d\Theta(x)}{[\cos^2\Theta(x)+\Lambda\sin^2\Theta(x)]^2[\cos^2\Theta(x)+(\Lambda-q(x))\sin^2\Theta(x)]},\tag{3.14}$$

поскольку

$$\int\limits_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}}\frac{\sin^2\Theta(x)\,d\Theta(x)}{[\cos^2\Theta(x)+\Lambda\sin^2\Theta(x)]^2}=\int\limits_{\pi k}^{\pi(k+1)}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{(\cos^2\varphi+\Lambda\sin^2\varphi)^2}=\frac{\pi}{2\Lambda\sqrt{\Lambda}}.$$

Оценим интеграл в (3.14). Имеем

$$\left|\int\limits_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}}\frac{q(x)\sin^4\Theta(x)\,d\Theta(x)}{[\cos^2\Theta(x)+\Lambda\sin^2\Theta(x)]^2[\cos^2\Theta(x)+(\Lambda-q(x))\sin^2\Theta(x)]}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\mathrm{const}\int\limits_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}}\frac{\sin^4\Theta(x)\,d\Theta(x)}{[\cos^2\Theta(x)+\Lambda\sin^2\Theta(x)]^3}=$$

$$=\mathrm{const}\int\limits_{\pi k}^{\pi(k+1)}\frac{\sin^4\varphi\,d\varphi}{(\cos^2\varphi+\Lambda\sin^2\varphi)^3}=\frac{\mathrm{const}}{\Lambda^2\sqrt{\Lambda}}\leqslant\mathrm{const}\,n^{-5}.$$

Отсюда и из (3.14) следует, что при $1\leqslant k\leqslant n-1$ справедливо соотношение

$$E_{n,k}=\frac{\pi}{2\Lambda\sqrt{\Lambda}}+O(n^{-5}).\tag{3.15}$$

В силу (3.12) и (3.15)

$$\int\limits_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}}\frac{q(x)\sin^2\Theta(x)\,dx}{\cos^2\Theta(x)+\Lambda\sin^2\Theta(x)}=\frac{\pi q(x_{n,k})}{2\Lambda\sqrt{\Lambda}}+O(n^{-3}\omega(n^{-1})),$$

где $\omega(\delta)=\delta+\omega_1(\delta)$. Отсюда и из (3.6) приходим к выводу, что при $1\leqslant k\leqslant n-1$ имеет место равенство

$$x_{n,k+1}-x_{n,k}-\frac{\pi q(x_{n,k})}{2\Lambda\sqrt{\Lambda}}=\frac{\pi}{\sqrt{\Lambda}}+O(n^{-3}\omega(n^{-1})).$$

Следовательно,

$$x_{n,\,n}-x_{n,\,1}-\frac{1}{2\Lambda}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\pi q(x_{n,\,k})}{\sqrt{\Lambda}}=\frac{\pi(n-1)}{\sqrt{\Lambda}}+O(n^{-2}\omega(n^{-1})). \tag{3.16}$$

Из (3.7) получаем формулу

$$\frac{\pi}{\sqrt{\Lambda}}=\Delta x_{n,\,k}+O(n^{-3}) \quad (1\leqslant k\leqslant n-1).$$

Отсюда и из леммы 2.2 следует, что

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\pi q(x_{n,\,k})}{\sqrt{\Lambda}}=\sum_{k=1}^{n-1}q(x_{n,\,k})\Delta x_{n,\,k}+O(n^{-2})=\int_a^b q(x)\,dx+O(\omega(n^{-1})).$$

В силу последнего и (3.16)

$$x_{n,\,n}-x_{n,\,1}-\frac{1}{2\Lambda}\int_a^b q(x)\,dx=\frac{\pi(n-1)}{\sqrt{\Lambda}}+O(n^{-2}\omega(n^{-1})). \tag{3.17}$$

Суммируя (3.8), (3.9) и (3.17), получим

$$b-a-\frac{1}{2\Lambda}\int_a^b q(x)\,dx=\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\Lambda}}-\frac{1}{\Lambda}\left(\frac{\beta_{12}}{\alpha_{11}}+\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}}\right)+O(n^{-2}\omega(n^{-1})),$$

или

$$\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\Lambda}}=(b-a)\left[1-\frac{c_0}{2\Lambda}+O(n^{-2}\omega(n^{-1}))\right], \tag{3.18}$$

где

$$c_0=\frac{1}{b-a}\left[\int_a^b q(x)\,dx-2\left\{\frac{\beta_{12}}{\alpha_{11}}+\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}}\right\}\right].$$

Из (3.18) следует справедливость следующих соотношений:

$$\Lambda=\left(\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{b-a}\right)^2\left[1+\frac{c_0}{\Lambda}+O(n^{-2}\omega(n^{-1}))\right], \tag{3.19}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}=\frac{b-a}{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}+O(n^{-3}), \tag{3.20}$$

$$\frac{1}{\Lambda}=\left(\frac{b-a}{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}\right)^2+O(n^{-4}). \tag{3.21}$$

Принимая во внимание (3.19) и (3.21), окончательно получаем асимптотическую формулу для собственных значений в рассматриваемом случае:

$$\Lambda=\left(\frac{\pi(n-1/2)}{b-a}\right)^2\left[1+c_0\left(\frac{b-a}{\pi(n-1/2)}\right)^2+O(n^{-2}\omega(n^{-1}))\right].$$

Перейдем к выводу асимптотических формул для нулей собственных функций.

Воспользовавшись равенством (3.20), из (3.7) и (3.8) получим формулы

$$x_{n,1}=a+O(n^{-2}), \tag{3.22}$$

$$x_{n,k+1}-x_{n,k}=\frac{b-a}{n-1/2}+O(n^{-3}) \quad (1\leqslant k\leqslant n-1). \tag{3.23}$$

В силу (3.23) имеем

$$\sum_{k=1}^{m}(x_{n,k+1}-x_{n,k})=\frac{m(b-a)}{n-1/2}+O(n^{-2}) \quad (1\leqslant m\leqslant n-1),$$

или, что то же самое,

$$x_{n,m+1}=x_{n,1}+\frac{m(b-a)}{n-1/2}+O(n^{-2}) \quad (1\leqslant m\leqslant n-1).$$

Используя (3.22), из последнего соотношения получаем

$$x_{n,m+1}=a+\frac{(b-a)m}{n-1/2}+O(n^{-2}) \quad (1\leqslant m\leqslant n-1). \tag{3.24}$$

Сравнивая (3.22) и (3.24), приходим к формуле

$$x_{n,k}=a+\frac{(b-a)(k-1)}{n-1/2}+O(n^{-2}) \quad (1\leqslant k\leqslant n).$$

Теорема 3.1 доказана.

Замечание 3.1. При выполнении дополнительного условия $q(x)\not\equiv\text{const}$ функция $\omega(\delta)$ в асимптотической формуле для собственных значений может быть заменена функцией $\omega_1(\delta)$ (см. замечание 2.1).

Замечание 3.2. Асимптотические формулы для нулей $x_{n,1}$ и $x_{n,n}$ могут быть уточнены. Например, в случае $\alpha_{22}\neq 0$, используя (3.8), (3.9), (3.20) и (3.21), легко можно получить следующие формулы:

$$x_{n,1}=a-\frac{\beta_{12}}{\alpha_{11}}\left(\frac{b-a}{\pi(n-1/2)}\right)^2+O(n^{-4}),$$

$$x_{n,n}=a+\frac{(b-a)(n-1)}{n-1/2}+\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}}\left(\frac{b-a}{\pi(n-1/2)}\right)^2+O(n^{-3}).$$

Литература

1. Керимов Н. Б., Аллахвердиев Т. И. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 1. С. 54—60.
2. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. М., 1968.
3. Тиман А. Ф. Теория приближения действительного переменного. М., 1960.

Бакинский государственный университет им. М. Э. Расулзаде

Поступила в редакцию 11 июня 1992 г.