Н. Б. Керимов, О базисности и равномерной минимальности систем корневых функций дифференциальных операторов. II, *Дифференц. уравнения*, 1996, том 32, номер 4, 470–476

1996. Т. 32, № 4. С. 470 — 476

УДК 517.984.5

О БАЗИСНОСТИ И РАВНОМЕРНОЙ МИНИМАЛЬНОСТИ СИСТЕМ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ. II

Н. Б. Керимов

Настоящая работа является непосредственным продолжением [1], в которой получены оценки норм корневых функций оператора $Lu = u^{(n)} + p_1(x)u^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)u$ с комплекснозначными коэффициентами $p_j(x) \in L_1(G)$ $(j = \overline{1,n})$ и рассмотрен вопрос об отсутствии конечных точек сгущения последовательности собственных значений. Корневые функции оператора L понимаются в обобщенной трактовке В.А. Ильина.

5. Определение и свойства ядра $K_{\nu ns}^{(d)}(x,t,\rho)$. Пусть $w_1, w_2, \ldots, w_n$ — все различные корни n-й степени из -1. Известно [2, с. 53], что для сектора $S_\nu = \{\rho : \nu\pi/n \le \arg\rho \le (\nu+1)\pi/n\}$ $(\nu = \overline{0,2n-1})$ существует такое расположение чисел $w_1, w_2, \ldots, w_n$, что для всех $\rho \in S_\nu$ выполняются неравенства

$$\mathrm{Re}\,(\rho w_1) \le \mathrm{Re}\,(\rho w_2) \le \ldots \le \mathrm{Re}\,(\rho w_n). \tag{5.1}$$

Пусть $\nu = \overline{0,2n-1}$, $r \in \mathbb{N}$ и $T_{\nu,1} = T_{\nu,2} = S_\nu$ (если n четно), $T_{\nu,1} = \{\rho\colon \nu\pi/n \le \arg\rho \le (2\nu+1)\pi/(2n)\}$ (если n нечетно), $T_{\nu,2} = \{\rho\colon (2\nu+1)\pi/(2n) \le \arg\rho \le (\nu+1)\pi/n\}$ (если n нечетно), $m(\nu,1) = m(\nu,2) = n/2 = [(n+1)/2]$ (если n четно), $m(\nu,1) = (n+1)/2$ (если $n = 4r-1$ и ν нечетно и если $n = 4r+1$ и ν четно), $m(\nu,1) = (n-1)/2$ (если $n = 4r+1$ и ν нечетно и если $n = 4r-1$ и ν четно), $m(\nu,2) = (n-1)/2$ (если $n = 4r-1$ и ν нечетно и если $n = 4r+1$ и ν четно), $m(\nu,2) = (n+1)/2$ (если $n = 4r+1$ и ν нечетно и если $n = 4r-1$ и ν четно).

Здесь $[(n+1)/2]$ означает целую часть числа $(n+1)/2$.

Заметим, что $S_\nu = T_{\nu,1} \cup T_{\nu,2}$ $(\nu = \overline{0,2n-1})$. Функции $K_{\nu ns}^{(d)}(x,t,\rho)$, где $x,t \in \mathbb{R}^1$, $x \ne t$, $\rho \in T_{\nu,d}$, $\nu = \overline{0,2n-1}$, $s = \overline{0,n-1}$ и $d = 1,2$, определим следующим образом:

$$K_{\nu ns}^{(d)}(x,t,\rho) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{m(\nu,d)} w_\alpha(\rho w_\alpha)^s \exp[\rho w_\alpha(x-t)], & \text{если } t < x, \\ \displaystyle -\sum_{\alpha=m(\nu,d)+1}^{n} w_\alpha(\rho w_\alpha)^s \exp[\rho w_\alpha(x-t)], & \text{если } x < t. \end{cases} \tag{5.2}$$

Лемма 5.1. *Справедливы следующие соотношения:*

$$|K_{\nu ns}^{(d)}(x,t,\rho)| \le \Big[(n+1)/2\Big]|\rho|^s, \tag{5.3}$$

$$\partial^{k-1}K_{\nu ns}^{(d)}(x,x-0,\rho)/\partial t^{k-1} - \partial^{k-1}K_{\nu ns}^{(d)}(x,x+0,\rho)/\partial t^{k-1} = (-1)^{n-s}n\rho^{n-1}\delta_{k,n-s} \quad (k = \overline{1,n}), \tag{5.4}$$

$$(-1)^n\partial^n K_{\nu ns}^{(d)}(x,t,\rho)/\partial t^n + \rho^n K_{\nu ns}^{(d)}(x,t,\rho) = 0, \tag{5.5}$$

$$\partial^{k-1}K_{\nu ns}^{(d)}(x,t,\rho)/\partial t^{k-1} = (\partial^s/\partial x^s)\Big(\partial^{k-1}K_{\nu n0}^{(d)}(x,t,\rho)/\partial t^{k-1}\Big) \quad (k = \overline{1,n}), \tag{5.6}$$

где $\delta_{m,j}$ — символ Кронекера.

Доказательство. Из определения следует, что

$$|K_{\nu n s}^{(d)}(x,t,\rho)| \le |\rho|^s \begin{cases} \sum\limits_{\alpha=1}^{m(\nu,d)} |\exp[\rho w_\alpha(x-t)]|, & \text{если } t < x, \\ \sum\limits_{\alpha=m(\nu,d)+1}^{n} |\exp[\rho w_\alpha(x-t)]|, & \text{если } x < t. \end{cases} \tag{5.7}$$

Заметим, что $\max\limits_{\nu,d}\{m(\nu,d), n-m(\nu,d)\} = [(n+1)/2]$. Отсюда и из неравенств (5.1), (5.7) вытекает, что для установления неравенства (5.3) достаточно доказать неравенства

$$\mathrm{Re}\,(\rho w_{m(\nu,d)}) \le 0, \quad \mathrm{Re}\,(\rho w_{m(\nu,d)+1}) \ge 0 \quad (\rho \in T_{\nu,d}). \tag{5.8}$$

В случае четного n выполняется $m(\nu,d) = n/2$, и в силу (5.1) $w_{n-j+1} = -w_j$ ($j = \overline{1,n/2}$). Следовательно, при $\rho \in S_\nu$ имеем $\mathrm{Re}\,(\rho w_{n/2}) \le 0 \le -\mathrm{Re}\,(\rho w_{n/2}) = \mathrm{Re}\,(\rho w_{n/2+1})$, что и доказывает неравенства (5.8).

Теперь рассмотрим случай нечетного n. Пусть $n = 2m-1$ ($m = 2,3,\ldots$) и числа $w_1, w_2, \ldots, w_n$ так расположены, что для всех $\rho \in S_\nu = T_{\nu,1} \cup T_{\nu,2}$ выполняются неравенства (5.1). Как доказано в [2, с. 75], точки $\rho w_1, \rho w_2, \ldots, \rho w_{m-1}$ находятся в левой открытой полуплоскости, аналогично последние $m-1$ точек $\rho w_{m+1}, \rho w_{m+2}, \ldots, \rho w_n$ находятся в правой открытой полуплоскости. Следовательно,

$$\mathrm{Re}\,(\rho w_{m-1}) < 0 < \mathrm{Re}\,(\rho w_{m+1}). \tag{5.9}$$

Неравенства (5.8) достаточно доказать, например, для секторов $T_{2n-1,d}$ и $T_{0,d}$, где $d = 1,2$ (см. [2, с. 54]). В случае области S_{2n-1} неравенства (5.1) будут выполняться, если в качестве $w_1, w_2, \ldots, w_n$ взять числа (см. [2, с. 67]) $w_k = \exp\left(i\pi + (-1)^k \cdot 2[k/2]\pi i/n\right)$ ($k = \overline{1, 2m-1}$), где $[p]$ — целая часть числа p. Таким образом, при $\rho \in S_{2n-1}$ имеем

$$\mathrm{Re}\,(\rho w_m) = \begin{cases} -|\rho|\cos(\arg\rho + 2r\pi/n), & \text{если } m = 2r, \\ -|\rho|\cos(\arg\rho - 2r\pi/n), & \text{если } m = 2r+1, \end{cases} \tag{5.10}$$

где $r = 1,2,\ldots$

Неравенства (5.8) в случае области $T_{2n-1,1}$ и $m = 2r$ примут вид

$$\mathrm{Re}\,(\rho w_m) \le 0, \quad \mathrm{Re}\,(\rho w_{m+1}) \ge 0. \tag{5.8а}$$

В силу (5.9) следует доказать только первое неравенство из (5.8а). При $\rho \in T_{2n-1,1}$ справедливо неравенство $2\pi - \pi/n \le \arg\rho \le 2\pi - \pi/(2n)$. Отсюда в случае $m = 2r$ ($n = 4r-1$) получим $\arg\rho + 2r\pi/n \ge 2\pi - \pi/n + 2r\pi/n \ge 2\pi$, $\arg\rho + 2r\pi/n \le 2\pi - \pi/(2n) + 2r\pi/n = 2\pi + \pi/2$. Справедливость первого неравенства из (5.8а) в рассматриваемом случае следует из двух последних неравенств и из (5.10).

Неравенства (5.8) в случае области $T_{2n-1,1}$ и $m = 2r+1$ примут вид

$$\mathrm{Re}\,(\rho w_{m-1}) \le 0, \quad \mathrm{Re}\,(\rho w_m) \ge 0. \tag{5.8б}$$

В силу (5.9) следует доказать только второе неравенство из (5.8б). При $\rho \in T_{2n-1,1}$ и $m = 2r+1$ ($n = 4r+1$) имеем $\arg\rho - 2r\pi/n \ge 2\pi - \pi/n - 2r\pi/n = 3\pi/2 - \pi/(2n)$, $\arg\rho - 2r\pi/n \le 2\pi - \pi/(2n) - 2r\pi/n = 3\pi/2$. Отсюда и из (5.10) следует справедливость доказываемого неравенства в случае $\rho \in T_{2n-1,1}$ и $m = 2r+1$. Случаи $\rho \in T_{2n-1,2}$, $\rho \in T_{0,d}$ ($d = 1,2$) рассматриваются совершенно аналогично. Доказательство оценки (5.3) завершено.

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\frac{\partial^{k-1} K_{\nu n s}^{(d)}(x, x-0, \rho)}{\partial t^{k-1}} - \frac{\partial^{k-1} K_{\nu n s}^{(d)}(x, x+0, \rho)}{\partial t^{k-1}} =$$

$$= (-1)^{k-1}\sum_{\alpha=1}^{m(\nu,d)} w_\alpha(\rho w_\alpha)^{k+s-1} + (-1)^{k-1}\sum_{\alpha=m(\nu,d)+1}^{n} w_\alpha(\rho w_\alpha)^{k+s-1} = (-1)^{k-1}\rho^{k+s-1}\sum_{\alpha=1}^{n} w_\alpha^{k+s}.$$

Отсюда и из равенства $\sum\limits_{\alpha=1}^{n} w_\alpha^{k+s} = -n\delta_{k,n-s}$ $(k=\overline{1,n})$ следует (5.4).

Докажем (5.5). Из определения функции $K^{(d)}_{\nu ns}(x,t,\rho)$ для $x>t$ получим

$$\frac{\partial^n K^{(d)}_{\nu ns}(x,t,\rho)}{\partial t^n} = (-1)^n \sum_{\alpha=1}^{m(\nu,d)} w_\alpha(\rho w_\alpha)^{s+n}\exp[\rho w_\alpha(x-t)] =$$

$$= -(-1)^n\rho^n \sum_{\alpha=1}^{m(\nu,d)} w_\alpha(\rho w_\alpha)^{s}\exp[\rho w_\alpha(x-t)] = -(-1)^n\rho^n K^{(d)}_{\nu ns}(x,t,\rho).$$

Случай $x<t$ рассматривается аналогично. Соотношение (5.6) доказывается прямым вычислением.

6. Формула для решения уравнения $u^{(n)}+\rho^n u = F$. Имеет место

Лемма 6.1. *Пусть $F(x)\in L_1(G)$ и $\rho\in T_{\nu,d}$. Тогда для любого регулярного на G решения уравнения*

$$u^{(n)}+\rho^n u = F \tag{6.1}$$

справедливо представление

$$u^{(s)}(x) = \sum_{j=1}^{n} B_j(\rho w_j)^s\exp(\rho w_j x) - \frac{1}{n\rho^{n-1}}\int_a^b F(t)K^{(d)}_{\nu ns}(x,t,\rho)\,dt, \tag{6.2}$$

где $s=\overline{0,n-1}$, a и b — произвольные точки отрезка $\overline{G}$, $a\le x\le b$ и $B_1,B_2,\ldots,B_n$ — некоторые постоянные, зависящие от a,b.

Доказательство. Из (6.1) следует

$$\int_a^b [u^{(n)}(t)+\rho^n u(t)]K^{(d)}_{\nu ns}(x,t,\rho)\,dt = \int_a^b F(t)K^{(d)}_{\nu ns}(x,t,\rho)\,dt. \tag{6.3}$$

Проинтегрируем левую часть (6.3) по частям:

$$\int_a^b [u^{(n)}(t)+\rho^n u(t)]K^{(d)}_{\nu ns}(x,t,\rho)\,dt =$$

$$= \int_a^x u^{(n)}(t)K^{(d)}_{\nu ns}(x,t,\rho)\,dt + \int_x^b u^{(n)}(t)K^{(d)}_{\nu ns}(x,t,\rho)\,dt + \rho^n\int_a^b u(t)K^{(d)}_{\nu ns}(x,t,\rho)\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}u^{(n-k)}(x)\left[\frac{\partial^{k-1}K^{(d)}_{\nu ns}(x,x-0,\rho)}{\partial t^{k-1}} - \frac{\partial^{k-1}K^{(d)}_{\nu ns}(x,x+0,\rho)}{\partial t^{k-1}}\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left[u^{(n-k)}(b)\frac{\partial^{k-1}K^{(d)}_{\nu ns}(x,b,\rho)}{\partial t^{k-1}} - u^{(n-k)}(a)\frac{\partial^{k-1}K^{(d)}_{\nu ns}(x,a,\rho)}{\partial t^{k-1}}\right] +$$

$$+\int_a^b u(t)\left[(-1)^n\frac{\partial^n K^{(d)}_{\nu ns}(x,t,\rho)}{\partial t^n} + \rho^n K^{(d)}_{\nu ns}(x,t,\rho)\right]dt.$$

Отсюда и из (6.3), (5.4) — (5.6) следует

$$\int_a^b F(t)K^{(d)}_{\nu ns}(x,t,\rho)\,dt = -n\rho^{n-1}u^{(s)}(x) +$$

$$+\frac{\partial^s}{\partial x^s}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Big[u^{(n-k)}(b)\frac{\partial^{k-1}K^{(d)}_{\nu n0}(x,b,\rho)}{\partial t^{k-1}}-u^{(n-k)}(a)\frac{\partial^{k-1}K^{(d)}_{\nu n0}(x,a,\rho)}{\partial t^{k-1}}\Big].$$

Представление (6.2) вытекает из последней формулы. При этом дополнительно надо учесть, что функции $\partial^{k-1}K^{(d)}_{\nu n0}(x,b,\rho)/\partial t^{k-1}$, $\partial^{k-1}K^{(d)}_{\nu n0}(x,a,\rho)/\partial t^{k-1}$ $(k=\overline{1,n})$ являются линейными комбинациями функций $\exp(\rho w_j x)$ $(j=\overline{1,n})$.

7. О равномерной ограниченности ранга собственных функций. Справедлива

Теорема 7.1. *Пусть $\{u_k(x)\}$ — произвольная равномерно минимальная в $L_p(G)$ система СПФ оператора (1.1) и выполнена антиаприорная оценка (1.6). Тогда ранг собственных функций равномерно ограничен.*

Доказательство. Пусть

$$\sigma=\inf\{\operatorname{dist}(u_k\|u_k\|^{-1}_{L_p(G)},\ V(u_j\colon j\in\mathbb{N}\setminus\{k\}))\colon k\in\mathbb{N}\}. \tag{7.1}$$

Так как $\{u_k(x)\}$ — равномерно минимальное в $L_p(G)$ семейство, то очевидно, что $\sigma>0$.

Пусть $G=(a;b)$. Положим $x_{\nu,j}=a+(b-a)j/\nu$ $(\nu\in\mathbb{N}, j=\overline{0,\nu})$,

$$r_0=\min\Big\{\nu\in\mathbb{N}\colon \frac{1}{n}\Big[\frac{n+1}{2}\Big]\int\limits_{x_{\nu,m}}^{x_{\nu,m+1}}|p_1(t)|\,dt<1,\ m=\overline{0,\nu-1}\Big\}, \tag{7.2}$$

$$c_0=\frac{1}{n}\Big[\frac{n+1}{2}\Big]\max_{0\le m\le r_0-1}\int\limits_{x_{r_0,m}}^{x_{r_0,m+1}}|p_1(t)|\,dt,\quad Q_1(x)=\sum_{\tau=2}^{n}|p_\tau(x)|,$$

$$c_1=2(n(1-c_0))^{-1}\Big[(n+1)/2\Big],\quad \rho_0=\max\Big\{1,c_1\|Q_1\|_{L_1(G)}\Big\},$$

$$r_1=\min\Big\{m\in\mathbb{N}\colon l\ge m\Rightarrow \sigma/(nl^2+1)>l\Big(2^{n-1}c_1C_2(b-a)/l\Big)^l\Big\},\quad r=r_0r_1.$$

Пусть $|\lambda_k|\ge\rho_0^n$ и $u_k(x)$ — собственная функция. Докажем, что ранг собственной функции $u_k(x)$ не превосходит nr^2. Предположим, что это утверждение неверно. Тогда существуют функции $u_{k_m}(x)$ $(m=\overline{1,nr^2+1})$ такие, что $u_{k_1}(x)\equiv u_k(x)$ $(x\in\overline{G})$ и почти всюду в G справедливы соотношения

$$Lu_{k_1}+\lambda_k u_{k_1}=0,\quad Lu_{k_{m+1}}+\lambda_k u_{k_{m+1}}=u_{k_m}\quad (m=\overline{1,nr^2}). \tag{7.3}$$

Положим

$$W_m(x)=u_{k_m}(x)\quad (m=\overline{1,nr^2+1}). \tag{7.4}$$

В силу (7.3), (7.4) почти всюду в G выполнены равенства $LW_m+\rho_k^nW_m=W_{m-1}$ $(m==\overline{1,nr^2+1})$, где $W_0(x)\equiv 0$ $(x\in\overline{G})$ и $\rho_k^n=\lambda_k$.

Пусть $\rho_k\in T_{\nu,d}$. Для функций $W_m(x)$ $(m=\overline{1,nr^2+1})$ будем использовать представление (6.2). Для каждого отрезка $[x_j;x_{j+1}]$ $(j=\overline{1,r})$, где $x_j=a+(b-a)(j-1)/r$ и $x_{r+1}=b$, имеем

$$W_m^{(s)}(x)=\sum_{\alpha=1}^{n}B^{(m)}_{\alpha,j}(\rho_k w_\alpha)^s\exp(\rho_k w_\alpha x)-$$

$$-\frac{1}{n\rho_k^{n-1}}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\Big\{W_{m-1}(t)-\sum_{\tau=1}^{n}p_\tau(t)W_m^{(n-\tau)}(t)\Big\}K^{(d)}_{\nu ns}(x,t,\rho_k)\,dt. \tag{7.5}$$

Постоянные $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_{nr^2+1}$ определим из следующей системы уравнений $(\alpha=\overline{1,n};\ j==\overline{1,r})$:

$$\sum_{m=1}^{nr^2+1}\beta_mB^{(m)}_{\alpha,j}=0,\quad \sum_{m=2}^{nr^2+1}\beta_mB^{(m-1)}_{\alpha,j}=0,\ \dots,\ \sum_{m=r}^{nr^2+1}\beta_mB^{(m-r+1)}_{\alpha,j}=0, \tag{7.6}$$

которая является линейной, однородной и состоит из nr^2 уравнений, а число неизвестных равно nr^2+1. Следовательно, система (7.6) имеет нетривиальные решения, и поэтому можно считать, что

$$\sum_{m=1}^{nr^2+1} |\beta_m| \neq 0. \tag{7.7}$$

Из представления (7.5) следует, что при $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ справедливо

$$W^{(s)}_{m-\gamma+1}(x) = \sum_{\alpha=1}^{n} B^{(m-\gamma+1)}_{\alpha,j}(\rho_k w_\alpha)^s \exp(\rho_k w_\alpha x) -$$

$$-\frac{1}{n\rho_k^{n-1}} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \left\{ W_{m-\gamma}(t) - \sum_{\tau=1}^{n} p_\tau(t) W^{(n-\tau)}_{m-\gamma+1}(t) \right\} K^{(d)}_{\nu n s}(x,t,\rho_k)\, dt.$$

Таким образом,

$$\sum_{m=\gamma}^{nr^2+1} \beta_m W^{(s)}_{m-\gamma+1}(x) = \sum_{m=\gamma}^{nr^2+1} \sum_{\alpha=1}^{n} \beta_m B^{(m-\gamma+1)}_{\alpha,j}(\rho_k w_\alpha)^s \exp(\rho_k w_\alpha x) +$$

$$+\frac{1}{n\rho_k^{n-1}} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} K^{(d)}_{\nu n s}(x,t,\rho_k) \sum_{\tau=1}^{n} p_\tau(t) \left(\sum_{m=\gamma}^{nr^2+1} \beta_m W^{(n-\tau)}_{m-\gamma+1}(t) \right) dt -$$

$$-\frac{1}{n\rho_k^{n-1}} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} K^{(d)}_{\nu n s}(x,t,\rho_k) \sum_{m=\gamma+1}^{nr^2+1} \beta_m W_{m-\gamma}(t)\, dt, \tag{7.8}$$

где $x_j \leq x \leq x_{j+1}$. В силу (7.6) при $\gamma = \overline{1,r}$ выполняется равенство

$$\sum_{m=\gamma}^{nr^2+1} \sum_{\alpha=1}^{n} \beta_m B^{(m-\gamma+1)}_{\alpha,j}(\rho_k w_\alpha)^s \exp(\rho_k w_\alpha x) = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\sum_{m=\gamma}^{nr^2+1} \beta_m B^{(m-\gamma+1)}_{\alpha,j} \right) (\rho_k w_\alpha)^s \exp(\rho_k w_\alpha x) = 0,$$

с учетом которого и оценки (5.3) при $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ и $\gamma = \overline{1,r}$ из (7.8) имеем

$$\left| \sum_{m=\gamma}^{nr^2+1} \beta_m W^{(s)}_{m-\gamma+1}(x) \right| \leq \frac{1}{n} \left[\frac{n+1}{2} \right] |\rho_k|^{s+1-n} \left\{ M_\gamma + \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \left| \sum_{m=\gamma+1}^{nr^2+1} \beta_m W_{m-\gamma}(t) \right| dt \right\}, \tag{7.9}$$

где

$$M_\gamma = \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \sum_{\tau=1}^{n} |p_\tau(t)| \left| \sum_{m=\gamma}^{nr^2+1} \beta_m W^{(n-\tau)}_{m-\gamma+1}(t) \right| dt. \tag{7.10}$$

Умножая обе части неравенства (7.9) на функцию $|p_{n-s}(x)|$ и интегрируя полученное неравенство по x от x_j до x_{j+1} с последующим суммированием по индексу s ($s = \overline{0, n-1}$), получим

$$M_\gamma \leq \frac{1}{n} \left[\frac{n+1}{2} \right] \sum_{s=0}^{n-1} |\rho_k|^{s+1-n} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} |p_{n-s}(x)|\, dx \times \left[M_\gamma + \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \left| \sum_{m=\gamma+1}^{nr^2+1} \beta_m W_{m-\gamma}(t) \right| dt \right]. \tag{7.11}$$

Оценим коэффициент в правой части неравенства (7.11) с учетом определения величин $r_0, c_0, Q_1(x), \rho_0$ и r из (7.2):

$$\frac{1}{n} \left[\frac{n+1}{2} \right] \sum_{s=0}^{n-1} |\rho_k|^{s+1-n} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} |p_{n-s}(x)|\, dx = \frac{1}{n} \left[\frac{n+1}{2} \right] \left\{ \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} |p_1(t)|\, dt + \sum_{s=2}^{n} |\rho_k|^{1-s} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} |p_s(x)|\, dx \right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\Big[\frac{n+1}{2}\Big]\Big\{\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} |p_1(t)|\,dt + \rho_0^{-1}\|Q_1\|_{L_1(G)}\Big\} \leq c_0 + \frac{1-c_0}{2} = \frac{1+c_0}{2}.$$

Отсюда и из оценки (7.11) для $\gamma = \overline{1,r}$ следует

$$M_\gamma \leq \frac{1+c_0}{1-c_0}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\Big|\sum_{m=\gamma+1}^{nr^2+1}\beta_m W_{m-\gamma}(t)\Big|\,dt. \qquad (7.12)$$

Используя (7.9) при $s=0$ и (7.10), (7.12), получим оценку

$$\Big|\sum_{m=\gamma}^{nr^2+1}\beta_m W_{m-\gamma+1}(x)\Big| \leq c_1|\rho_k|^{1-n}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\Big|\sum_{m=\gamma+1}^{nr^2+1}\beta_m W_{m-\gamma}(t)\Big|\,dt, \qquad (7.13)$$

где $\gamma = \overline{1,r}$, $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ и c_1 — число из формулы (7.2), с помощью которой последовательно при $\gamma = 1,2,\ldots,r$ для $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ получим

$$\Big|\sum_{m=1}^{nr^2+1}\beta_m W_m(x)\Big| \leq c_1|\rho_k|^{1-n}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\Big|\sum_{m=2}^{nr^2+1}\beta_m W_{m-1}(t)\Big|\,dt \leq$$

$$\leq (c_1|\rho_k|^{1-n})^2(x_{j+1}-x_j)\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\Big|\sum_{m=3}^{nr^2+1}\beta_m W_{m-2}(t)\Big|\,dt \leq \ldots$$

$$\ldots \leq (c_1|\rho_k|^{1-n})^r(x_{j+1}-x_j)^{r-1}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\Big|\sum_{m=r+1}^{nr^2+1}\beta_m W_{m-r}(t)\Big|\,dt.$$

Таким образом, при $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ имеем

$$\Big|\sum_{m=1}^{nr^2+1}\beta_m W_m(x)\Big| \leq (c_1|\rho_k|^{1-n})^r\Big(\frac{b-a}{r}\Big)^{r-1}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\Big|\sum_{m=r+1}^{nr^2+1}\beta_m W_{m-r}(t)\Big|\,dt. \qquad (7.14)$$

Из антиаприорной оценки (1.6), в частности, вытекает $\|W_{m-r}\|_{L_p(G)} \leq C_2^r(1+|\rho_k|)^{(n-1)r}\times$ $\times\|W_m\|_{L_p(G)}$. Отсюда и из (7.14) получим

$$\Big|\sum_{m=1}^{nr^2+1}\beta_m W_m(x)\Big| \leq (c_1|\rho_k|^{1-n})^r\Big(\frac{b-a}{r}\Big)^{r-1}\sum_{m=r+1}^{nr^2+1}|\beta_m|\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}|W_{m-r}(t)|\,dt \leq$$

$$\leq (c_1|\rho_k|^{1-n})^r\Big(\frac{b-a}{r}\Big)^{r-1/p}\sum_{m=r+1}^{nr^2+1}|\beta_m|\,\|W_{m-r}\|_{L_p(G)} \leq$$

$$\leq (c_1C_2)^r\Big(\frac{b-a}{r}\Big)^{r-1/p}\Big(1+\frac{1}{|\rho_k|}\Big)^{(n-1)r}\sum_{m=r+1}^{nr^2+1}|\beta_m|\,\|W_m\|_{L_p(G)},$$

и окончательно при $a \leq x \leq b$ имеем неравенство

$$\Big|\sum_{m=1}^{nr^2+1}\beta_m W_m(x)\Big| \leq (2^{n-1}c_1C_2)^r\Big(\frac{b-a}{r}\Big)^{r-1/p}\sum_{m=r+1}^{nr^2+1}|\beta_m|\,\|W_m\|_{L_p(G)},$$

из которого очевидным образом следует оценка

$$\Big\|\sum_{m=1}^{nr^2+1}\beta_m W_m\Big\|_{L_p(G)} \leq r\Big(\frac{2^{n-1}(b-a)c_1C_2}{r}\Big)^r\sum_{m=1}^{nr^2+1}|\beta_m|\,\|W_m\|_{L_p(G)}.$$

В силу (7.1), (7.4) и леммы 2.1 $\left\|\sum_{m=1}^{nr^2+1}\beta_m W_m\right\|_{L_p(G)} \geq (\sigma/(nr^2+1))\sum_{m=1}^{nr^2+1}|\beta_m|\,\|W_m\|_{L_p(G)}$. Сопоставляя последние два неравенства и учитывая, что в силу (7.7) $\sum_{m=1}^{nr^2+1}|\beta_m|\,\|W_m\|_{L_p(G)} > 0$, получим соотношение $\sigma/(nr^2+1) \leq r\left(2^{n-1}c_1C_2(b-a)/r\right)^r$, противоречащее определению числа r (см. (7.2)). Таким образом, доказано, что ранги собственных функций $u_k(x)$, где $|\rho_k| \geq \rho_0$, равномерно ограничены.

Для завершения доказательства остается только заметить, что при выполнении условий настоящей теоремы в силу теоремы 4.2 последовательность собственных значений не имеет конечных точек сгущения.

З а м е ч а н и е 7.1. В [3] равномерная ограниченность ранга собственных функций доказана для систем СПФ оператора второго порядка при условии, что эта система образует почти нормированный базис в $L_p(G)$, $1 < p < \infty$.

Литература

1. *Керимов Н. Б.* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 3. С. 318 — 323.
2. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
3. *Крицков Л. В.* // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311, № 6. С. 1306 — 1309.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 7 февраля 1996 г.