Н. Б. Керимов, О базисности и равномерной минимальности систем корневых функций дифференциальных операторов. III, *Дифференц. уравнения*, 1996, том 32, номер 5, 591–598

1996. Т. 32, № 5. С. 591 — 598

УДК 517.984.5

О БАЗИСНОСТИ И РАВНОМЕРНОЙ МИНИМАЛЬНОСТИ СИСТЕМ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ. III

Н. Б. Керимов

Настоящая работа является непосредственным продолжением [1, 2], в которых рассмотрен вопрос об отсутствии конечных точек сгущения последовательности собственных значений и равномерной ограниченности ранга собственных функций оператора $Lu=u^{(n)}+p_1(x)u^{(n-1)}+\ldots$ $\ldots+p_n(x)u$ с комплекснозначными коэффициентами $p_j(x)\in L_1(G)$ $(j=\overline{1,n})$. Здесь исследуется распределение собственных значений оператора L и, в частности, доказано, что известное условие о "сумме единиц" (см. [3, 4]) является необходимым условием для равномерной минимальности в $L_p(G)$, $1\le p\le\infty$ (а следовательно, и базисности в $L_p(G)$, $1<p<\infty$), систем корневых функций оператора L.

8. Распределение собственных значений. Справедлива

Теорема 8.1. *Пусть $\{u_k(x)\}$ — произвольная равномерно минимальная в $L_p(G)$ система СПФ оператора* (1.1). *Тогда существует положительная постоянная Δ такая, что для произвольной $\lambda\in\mathbb{C}$ количество собственных функций, соответствующих тем собственным значениям λ_k, для которых $|\lambda_k-\lambda|\le\Delta(1+|\lambda|^{(n-1)/n})$, не превосходит n.*

Доказательство. Пусть

$$c_0=(1/n)[(n+1)/2]\|p_1\|_{L_1(G)},\quad \sigma=\inf\{\operatorname{dist}(u_k\|u_k\|^{-1}_{L_p(G)},\quad V(u_j\colon j\in\mathbb{N}\setminus\{k\}))\colon k\in\mathbb{N}\}. \tag{8.1}$$

Так как $\{u_k(x)\}$ — равномерно минимальное в $L_p(G)$ семейство, то очевидно, что $\sigma>0$. Рассмотрим случай $c_0<1$. Пусть $G=(a;b)$. Положим

$$Q_1(x)=\sum_{\tau=2}^{n}|p_\tau(x)|,\quad c_2=\sigma n(1-c_0)/(4(b-a)(n+1)[(n+1)/2]),$$

$$R_0=\max\Big\{1,\Big(2(n(1-c_0))^{-1}[(n+1)/2]\|Q_1\|_{L_1(G)}\Big)^n\Big\}. \tag{8.2}$$

Сначала докажем справедливость следующего утверждения:

E_1) для произвольной $\lambda\in\mathbb{C}$, $|\lambda|\ge R_0$, количество собственных функций, соответствующих тем собственным значениям λ_k, для которых $|\lambda_k-\lambda|\le c_2|\lambda|^{(n-1)/n}$, не превосходит n.

Предположим, что это утверждение неверно. Тогда существуют число $\lambda_0\in\mathbb{C}$, $|\lambda_0|\ge R_0$, и собственные значения λ_{k_m} $(m=\overline{1,n+1})$ такие, что $|\lambda_{k_m}-\lambda_0|\le c_2|\lambda_0|^{(n-1)/n}$, и система $\{u_{k_m}(x)\}$ состоит только из собственных функций. Очевидно, что $\lambda_{k_m}=\lambda_0+c_2\eta_m|\lambda_0|^{(n-1)/n}$, и, следовательно,

$$Lu_{k_m}+\lambda_0u_{k_m}=-c_2\eta_m|\lambda_0|^{(n-1)/n}u_{k_m}, \tag{8.3}$$

где $|\eta_m|\le 1$ $(m=\overline{1,n+1})$.

Положим $W_m(x)=u_{k_m}(x)$ $(m=\overline{1,n+1})$. Тогда из (8.3) получим, что почти всюду в G выполнены равенства $LW_m+\lambda_0W_m=-c_2\eta_m|\lambda_0|^{(n-1)/n}W_m$ $(m=\overline{1,n+1})$ или, что то же самое,

$$W_m^{(n)}(x)+\lambda_0W_m(x)=-c_2\eta_m|\lambda_0|^{(n-1)/n}W_m(x)-\sum_{\tau=1}^{n}p_\tau(x)W_m^{(n-\tau)}(x)\quad (m=\overline{1,n+1}). \tag{8.4}$$

Пусть $\rho_0^n = \lambda_0$ и $\rho_0 \in T_{\nu,d}$. Для функций $W_m(x)$ ($m = \overline{1, n+1}$) будем использовать представление (6.2). В силу (8.4) имеем

$$W_m^{(s)}(x) = \sum_{\alpha=1}^{n} B_\alpha^{(m)} (\rho_0 w_\alpha)^s \exp(\rho_0 w_\alpha x) + \frac{1}{n\rho_0^{n-1}} \int_a^b K_{\nu n s}^{(d)}(x,t,\rho_0) \sum_{\tau=1}^{n} p_\tau(t) W_m^{(n-\tau)}(t)\, dt +$$

$$+ \frac{c_2 \theta_m}{n} \int_a^b K_{\nu n s}^{(d)}(x,t,\rho_0) W_m(t)\, dt, \tag{8.5}$$

где $a \le x \le b$, $s = \overline{0, n-1}$, $m = \overline{1, n+1}$, $|\theta_m| \le 1$.

Постоянные $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1}$ определим из системы уравнений

$$\sum_{m=1}^{n+1} \beta_m B_\alpha^{(m)} = 0 \quad (\alpha = \overline{1, n}), \tag{8.6}$$

которая является линейной однородной и состоит из n уравнений, а число неизвестных равно $n+1$. Следовательно, эта система имеет нетривиальные решения, и поэтому можно считать, что

$$\sum_{m=1}^{n+1} |\beta_m| \ne 0. \tag{8.7}$$

Из представления (8.5) следует, что при $a \le x \le b$ и $s = \overline{0, n-1}$ справедливы

$$\sum_{m=1}^{n+1} \beta_m W_m^{(s)}(x) = \sum_{m=1}^{n+1} \sum_{\alpha=1}^{n} \beta_m B_\alpha^{(m)} (\rho_0 w_\alpha)^s \exp(\rho_0 w_\alpha x) +$$

$$+ \frac{1}{n\rho_0^{n-1}} \int_a^b K_{\nu n s}^{(d)}(x,t,\rho_0) \sum_{\tau=1}^{n} p_\tau(t) \sum_{m=1}^{n+1} \beta_m W_m^{(n-\tau)}(t)\, dt + \frac{c_2}{n} \int_a^b K_{\nu n s}^{(d)}(x,t,\rho_0) \sum_{m=1}^{n+1} \beta_m \theta_m W_m(t)\, dt. \tag{8.8}$$

Поскольку первое слагаемое в правой части (8.8) в силу (8.6) равно нулю, то с учетом оценки (5.3) при $a \le x \le b$ и $s = \overline{0, n-1}$ имеем

$$\left| \sum_{m=1}^{n+1} \beta_m W_m^{(s)}(x) \right| \le \frac{1}{n} \left[\frac{n+1}{2} \right] \left\{ |\rho_0|^{s+1-n} T + c_2 |\rho_0|^s \int_a^b \sum_{m=1}^{n+1} |\beta_m| |W_m(t)|\, dt \right\}, \tag{8.9}$$

где

$$T = \int_a^b \sum_{\tau=1}^{n} |p_\tau(t)| \left| \sum_{m=1}^{n+1} \beta_m W_m^{(n-\tau)}(t) \right| dt. \tag{8.10}$$

Умножая обе части соотношения (8.9) на функцию $|p_{n-s}(x)|$ и интегрируя полученное неравенство по x от a до b с последующим суммированием по индексу s ($s = \overline{0, n-1}$), получим

$$T \le \frac{1}{n} \left[\frac{n+1}{2} \right] \sum_{s=0}^{n-1} |\rho_0|^{s+1-n} \int_a^b |p_{n-s}(x)|\, dx \left\{ T + c_2 |\rho_0|^{n-1} \int_a^b \sum_{m=1}^{n+1} |\beta_m| |W_m(t)|\, dt \right\}. \tag{8.11}$$

Оценим коэффициент в правой части неравенства (8.11). Поскольку $|\rho_0| \ge R_0^{1/n}$, то, согласно определению $Q_1(x)$ и R_0 из (8.2) и c_0 из (8.1), имеем

$$\frac{1}{n} \left[\frac{n+1}{2} \right] \sum_{s=0}^{n-1} |\rho_0|^{s+1-n} \int_a^b |p_{n-s}(x)|\, dx = \frac{1}{n} \left[\frac{n+1}{2} \right] \left\{ \|p_1\|_{L_1(G)} + \sum_{s=2}^{n} |\rho_0|^{1-s} \int_a^b |p_s(x)|\, dx \right\} \le$$

$$\le \frac{1}{n} \left[\frac{n+1}{2} \right] \left\{ \|p_1\|_{L_1(G)} + R_0^{-1/n} \|Q_1\|_{L_1(G)} \right\} \le c_0 + \frac{1-c_0}{2} = \frac{1+c_0}{2}.$$

Отсюда и из неравенства (8.11), учитывая, что $c_0 < 1$, следует оценка

$$T \le \frac{c_2(1+c_0)}{1-c_0}|\rho_0|^{n-1}\int_a^b \sum_{m=1}^{n+1}|\beta_m||W_m(t)|\,dt. \tag{8.12}$$

Используя (8.9) при $s = 0$, а также (8.10), (8.12), получим для $a \le x \le b$ оценку

$$\left|\sum_{m=1}^{n+1}\beta_m W_m(x)\right| \le \frac{2c_2}{n(1-c_0)}\left[\frac{n+1}{2}\right]\int_a^b\sum_{m=1}^{n+1}|\beta_m||W_m(t)|\,dt,$$

из которой очевидным образом следует оценка

$$\left|\sum_{m=1}^{n+1}\beta_m W_m(x)\right| \le \frac{2c_2(b-a)^{1/q}}{n(1-c_0)}\left[\frac{n+1}{2}\right]\sum_{m=1}^{n+1}|\beta_m|\|W_m\|_{L_p(G)}.$$

Таким образом,

$$\left\|\sum_{m=1}^{n+1}\beta_m W_m\right\|_{L_p(G)} \le \frac{2c_2(b-a)}{n(1-c_0)}\left[\frac{n+1}{2}\right]\sum_{m=1}^{n+1}|\beta_m|\|W_m\|_{L_p(G)}.$$

С другой стороны, в силу леммы 2.1 справедливо неравенство $\left\|\sum\limits_{m=1}^{n+1}\beta_m W_m\right\|_{L_p(G)} \ge (\sigma/(n+1))\sum\limits_{m=1}^{n+1}|\beta_m|\|W_m\|_{L_p(G)}$. Сравнение последних двух неравенств с учетом справедливого в силу условия (8.7) неравенства $\sum\limits_{m=1}^{n+1}|\beta_m|\|W_m\|_{L_p(G)} > 0$ дает $\sigma/(n+1) \le (2c_2(b-a)/(n(1-c_0)))[(n+1)/2]$, что противоречит определению числа c_2 (см. (8.2)). Таким образом, утверждение E_1) доказано.

Пусть $\{u_{k_r}(x)\}$ — система, состоящая из всех собственных функций $u_{k_r}(x)$, принадлежащих системе $\{u_k(x)\}$. В силу теоремы 4.2 последовательность $\{\lambda_{k_r}\}$ не имеет конечных точек сгущения. Из утверждения E_1) следует, что если $\lambda \in \mathbb{C}$ и $|\lambda| \ge R_0$, то количество собственных значений λ_{k_r}, удовлетворяющих неравенству

$$|\lambda_{k_r} - \lambda| \le c_2|\lambda|^{(n-1)/n}, \tag{8.13}$$

не превосходит n. Пусть $\delta_1 = \min\left\{|\lambda_{k_r} - \lambda_{k_m}|/3\colon\ \lambda_{k_r} \ne \lambda_{k_m},\ |\lambda_{k_r}| \le 2R_0,\ |\lambda_{k_m}| \le 2R_0\right\}$, $\delta_2 = \min\{\delta_1, R_0\}$. Очевидно, что $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$.

Докажем справедливость утверждения

E_2) если $\lambda \in \mathbb{C}$ и $|\lambda| \le R_0$, то количество собственных значений λ_{k_r}, удовлетворяющих неравенству $|\lambda_{k_r} - \lambda| \le \delta_2$, не превосходит n.

Поскольку одному собственному значению может соответствовать не более чем n собственных функций, достаточно доказать, что из неравенств $|\lambda| \le R_0$, $|\lambda_{k_r} - \lambda| \le \delta_2$, $|\lambda_{k_m} - \lambda| \le \delta_2$ следует $\lambda_{k_r} = \lambda_{k_m}$. Пусть $\lambda_{k_r} \ne \lambda_{k_m}$. Тогда в силу определения числа δ_2 имеем $|\lambda_{k_r}| \le |\lambda_{k_r} - \lambda| + |\lambda| \le \delta_2 + R_0 \le 2R_0$, $|\lambda_{k_m}| \le |\lambda_{k_m} - \lambda| + |\lambda| \le \delta_2 + R_0 \le 2R_0$. Отсюда и из определения числа δ_1 получим, что $0 < 3\delta_1 \le |\lambda_{k_r} - \lambda_{k_m}| \le |\lambda_{k_r} - \lambda| + |\lambda_{k_m} - \lambda| \le 2\delta_2 \le 2\delta_1$. Полученное противоречие доказывает равенство $\lambda_{k_r} = \lambda_{k_m}$.

Положим

$$\Delta = \min\{\delta_2/(1 + R_0^{(n-1)/n}), c_2/2\}. \tag{8.14}$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и

$$|\lambda_{k_r} - \lambda| \le \Delta(1 + |\lambda|^{(n-1)/n}). \tag{8.15}$$

Докажем, что если $|\lambda| \le R_0$, то из неравенства (8.15) следует $|\lambda_{k_r} - \lambda| \le \delta_2$. Действительно, в силу (8.14) $|\lambda_{k_r} - \lambda| \le \Delta(1 + R_0^{(n-1)/n}) \le \delta_2(1 + R_0^{(n-1)/n})/(1 + R_0^{(n-1)/n}) = \delta_2$.

Теперь докажем, что если $|\lambda| \geq R_0$, то из неравенства (8.15) следует (8.13). В самом деле, поскольку $R_0 \geq 1$, то в силу (8.15), (8.14) имеет место неравенство $|\lambda_{k_r} - \lambda| \leq 2\Delta|\lambda|^{(n-1)/n} \leq 2(c_2/2)|\lambda|^{(n-1)/n} = c_2|\lambda|^{(n-1)/n}$. Доказательство теоремы 8.1 в случае $c_0 < 1$ завершено.

Пусть c_0 определено равенством (8.1) и $c_0 \geq 1$. Докажем, что теорема 8.1 справедлива и в этом случае. Известно [5, с. 15], что существует многочлен $\Phi(x)$, обладающий свойством *)

$$(1/n)[(n+1)/2]\|p_1 - \Phi\|_{L_1(G)} < 1. \tag{8.16}$$

Полагая

$$V_k(x) = u_k(x)\exp\left(\frac{1}{n}\int_a^x \Phi(t)\,dt\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{8.17}$$

получаем, что $\{V_k(x)\}$ является в указанном нами обобщенном смысле системой СПФ некоторого оператора $lV = V^{(n)} + q_1(x)V^{(n-1)} + \ldots + q_n(x)V$, где $q_1(x) = p_1(x) - \Phi(x)$, функции $q_2(x), \ldots, q_n(x)$ принадлежат классу $L_1(G)$ и выражаются через функции $p_j(x)$ ($j = \overline{1,n}$), $\Phi^{(s)}(x)$ ($s = \overline{0, n-1}$). Кроме того, почти всюду в G удовлетворяются уравнения: $lV_k + \lambda_k V_k = 0$ (если $u_k(x)$ — собственная функция) и $lV_k + \lambda_k V_k = V_{r(k)}$ (если $u_k(x)$ — присоединенная функция). Из (8.17) и оценки

$$0 < \min_{a \leq x \leq b}\left|\exp\left(\frac{1}{n}\int_a^x \Phi(t)\,dt\right)\right| \leq \max_{a \leq x \leq b}\left|\exp\left(\frac{1}{n}\int_a^x \Phi(t)\,dt\right)\right| < \infty$$

следует, что семейства $\{u_k(x)\}$ и $\{V_k(x)\}$ одновременно равномерно минимальные в $L_p(G)$.

Заметим, что если $V_k(x)$ — собственная функция оператора l, соответствующая собственному значению λ_k, то $u_k(x)$ — собственная функция оператора L, соответствующая собственному значению λ_k. Верно и обратное утверждение. Кроме того, в силу (8.16) справедливо равенство $c_0' = (1/n)[(n+1)/2]\|q_1\|_{L_1(G)} = (1/n)[(n+1)/2]\|p_1 - \Phi\|_{L_1(G)} < 1$. Отсюда и из сказанного выше следует справедливость утверждения теоремы 8.1 и в случае $c_0 \geq 1$. Теорема 8.1 полностью доказана.

Теорема 8.2. *Пусть $\{u_k(x)\}$ — произвольная равномерно минимальная в $L_p(G)$ система СПФ оператора (1.1). Тогда существует положительная постоянная δ такая, что для произвольного $\mu \in \mathbb{C}$ количество собственных функций, соответствующих тем спектральным параметрам μ_k, для которых*

$$|\mu_k - \mu| \leq \delta, \tag{8.18}$$

не превосходит n и $2n$ при четных и нечетных n соответственно.

Доказательство. Пусть δ является положительным корнем уравнения

$$2^{n-1}n\delta(1+\delta)^{n-1} = \Delta, \tag{8.19}$$

где Δ — число, фигурирующее в формулировке теоремы 8.1. Поскольку $F(t) = 2^{n-1}nt(1+t)^{n-1}$, $t \geq 0$, — строго возрастающая функция и $F(0) = 0$, то уравнение (8.19) имеет единственный корень.

Используя (8.18) и (8.19), оценим модуль разности $\mu_k^n - \mu^n$:

$$|\mu_k^n - \mu^n| = |\mu_k - \mu|\left|\sum_{j=0}^{n-1}\mu_k^{n-1-j}\mu^j\right| \leq \delta\sum_{j=0}^{n-1}|\mu_k|^{n-1-j}|\mu|^j \leq \delta\sum_{j=0}^{n-1}(\delta + |\mu|)^{n-1-j}|\mu|^j \leq$$

$$\leq n\delta(\delta + |\mu|)^{n-1} \leq n\delta(1+\delta)^{n-1}(1+|\mu|)^{n-1} \leq 2^{n-1}n\delta(1+\delta)^{n-1}(1+|\mu|^{n-1}) = \Delta(1+|\mu|^{n-1}). \tag{8.20}$$

Предположим, что n — четное число и выполнено (8.18). В силу (1.4) собственное значение λ_k связано с числом μ_k соотношением $\lambda_k = -(-1)^{n/2}\mu_k^n$. Пусть $\lambda = -(-1)^{n/2}\mu^n$. Используя (8.20), оценим модуль разности $\lambda_k - \lambda$:

$$|\lambda_k - \lambda| = |-(-1)^{n/2}\mu_k^n + (-1)^{n/2}\mu^n| = |\mu_k^n - \mu^n| \leq \Delta(1 + |\mu|^{n-1})$$

*) Идея исследовать случай $c_0 \geq 1$ с помощью аппроксимирующего многочлена принадлежит Л. В. Крицкову.

или, что то же самое, $|\lambda_k - \lambda| \le \Delta(1 + |\lambda|^{(n-1)/n})$. Отсюда и из теоремы 8.1 получаем справедливость утверждения теоремы 8.2 при четных n.

Предположим, что n — нечетное число и выполнено (8.18). В силу (1.4) собственное значение λ_k связано с числом μ_k соотношением

$$\lambda_k = \begin{cases} i\mu_k^n, & \text{если } \operatorname{Im}\lambda_k \ge 0, \\ -i\mu_k^n, & \text{если } \operatorname{Im}\lambda_k < 0. \end{cases} \tag{8.21}$$

Числа λ_* и λ^* определим следующим образом: $\lambda_* = i\mu^n$, $\lambda^* = -i\mu^n$. Докажем, что справедливо или неравенство

$$|\lambda_k - \lambda_*| \le \Delta(1 + |\lambda_*|^{(n-1)/n}), \tag{8.22}$$

или

$$|\lambda_k - \lambda^*| \le \Delta(1 + |\lambda^*|^{(n-1)/n}). \tag{8.23}$$

Действительно, в силу (8.21) и (8.20) имеем $|\lambda_k - \lambda_*| = |i\mu_k^n - i\mu^n| = |\mu_k^n - \mu^n| \le \Delta(1+|\mu|^{n-1}) = \Delta(1 + |\lambda_*|^{(n-1)/n})$ (если $\operatorname{Im}\lambda_k \ge 0$) и $|\lambda_k - \lambda^*| = |-i\mu_k^n + i\mu^n| = |\mu_k^n - \mu^n| \le \Delta(1 + |\mu|^{n-1}) = \Delta(1+|\lambda^*|^{(n-1)/n})$ (если $\operatorname{Im}\lambda_k < 0$). Таким образом, из соотношения (8.18) следует или (8.22), или (8.23). Отсюда и из теоремы 8.1 получаем справедливость утверждения теоремы 8.2 и при нечетных n. Доказательство теоремы 8.2 завершено.

Замечание 8.1. Теорема 8.2 допускает уточнение. В действительности, как видно из доказательства теоремы 8.2, при нечетных n для произвольного $\mu \in \mathbb{C}$ количество собственных функций, соответствующих тем спектральным параметрам μ_k, для которых $|\mu_k - \mu| \le \delta$ и $\operatorname{Im}\lambda_k \ge 0$ или $\operatorname{Im}\lambda_k < 0$, не превосходит n.

Замечание 8.2. Аналогичный теореме 8.2 результат для дифференциального оператора порядка $n \le 4$ при условии $p_1(x) \equiv 0$ получен в [6].

Из теорем 7.1, 8.1 и 8.2 вытекают

Следствие 8.1. *Пусть $\{u_k(x)\}$ — произвольная равномерно минимальная в $L_p(G)$ система СПФ оператора (1.1) и выполнена антиаприорная оценка (1.6). Тогда существует положительная постоянная Δ такая, что для произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$ количество тех собственных значений λ_k, для которых $|\lambda_k - \lambda| \le \Delta(1 + |\lambda|^{(n-1)/n})$, равномерно ограничено.*

Следствие 8.2. *Пусть выполнены условия следствия 8.1. Тогда существует положительная постоянная δ такая, что для произвольного $\mu \in \mathbb{C}$ количество тех μ_k, для которых $|\mu_k - \mu| \le \delta$, равномерно ограничено.*

9. Вспомогательное утверждение о покрытиях. Прежде чем перейти к формулировке вспомогательного утверждения, введем некоторые обозначения. Пусть $\mu \ge 0$, $0 \le b \le \mu+1$, $D(\mu, b) = \{z \in \mathbb{C}\colon \mu \le |z| \le \mu + 1,\ \operatorname{Re} z \ge 0,\ 0 \le \operatorname{Im} z \le b\}$, $N(\mu, b, \varepsilon)$ — минимальное количество квадратов со стороной $\varepsilon > 0$, покрывающих множество $D(\mu, b)$.

Лемма 9.1. ***Имеет место неравенство** $N(\mu, b, \varepsilon) \le C(\varepsilon)(1 + b)$, **где** $C(\varepsilon)$ **— постоянная, зависящая только от** ε.*

Доказательство. Пусть $\mu \le \varepsilon$. Нетрудно видеть, что множество $D(\mu, b)$ содержится в квадрате $\Pi = \{z \in \mathbb{C}\colon 0 \le \operatorname{Re} z \le 1 + \varepsilon,\ 0 \le \operatorname{Im} z \le 1 + \varepsilon\}$. Множество Π, а следовательно, и $D(\mu, b)$ при $\mu \le \varepsilon$ могут быть покрыты $([(1 + \varepsilon)/\varepsilon] + 1)^2$ квадратами со стороной ε. Таким образом,

$$N(\mu, b, \varepsilon) \le (2 + 1/\varepsilon)^2 \quad (\mu \le \varepsilon). \tag{9.1}$$

Пусть $b \le \varepsilon \le \mu$. Заметим, что множество $D(\mu, b)$ содержится в прямоугольнике $\Pi' = \{z \in \mathbb{C}\colon \sqrt{\mu^2 - \varepsilon^2} \le \operatorname{Re} z \le \mu + 1,\ 0 \le \operatorname{Im} z \le \varepsilon\}$, который может быть покрыт не более чем $[(\mu + 1 - \sqrt{\mu^2 - \varepsilon^2})/\varepsilon] + 1$ квадратами со стороной ε, где квадратная скобка означает целую часть. Следовательно, в рассматриваемом случае $N(\mu, b, \varepsilon) \le [(\mu + 1 - \sqrt{\mu^2 - \varepsilon^2})/\varepsilon] + 1 \le 1/\varepsilon + \varepsilon/(\mu + \sqrt{\mu^2 - \varepsilon^2}) + 1 \le 1/\varepsilon + \varepsilon/\mu + 1 \le 2 + 1/\varepsilon$. Таким образом,

$$N(\mu, b, \varepsilon) \le 2 + 1/\varepsilon \quad (b \le \varepsilon \le \mu). \tag{9.2}$$

Пусть $\varepsilon \le b \le \mu$ и $\Pi_0 = \{z \in \mathbb{C}\colon \sqrt{\mu^2 - b^2} \le \operatorname{Re} z \le \sqrt{(\mu + 1)^2 - (b - \varepsilon)^2},\ b - \varepsilon \le \operatorname{Im} z \le b\}$, $\Pi_j = \{z \in \mathbb{C}\colon \sqrt{\mu^2 - (j\varepsilon)^2} \le \operatorname{Re} z \le \sqrt{(\mu + 1)^2 - ((j - 1)\varepsilon)^2},\ (j - 1)\varepsilon \le \operatorname{Im} z \le j\varepsilon\}$, где $j =$

$= 1, 2, \ldots, [b/\varepsilon]$. Легко проверить, что

$$D(\mu, b) \subset \bigcup_{j=0}^{[b/\varepsilon]} \Pi_j. \tag{9.3}$$

Каждый прямоугольник Π_j $(j = \overline{1, [b/\varepsilon]})$ можно покрыть не более чем $n_j = [(\sqrt{(\mu+1)^2 - ((j-1)\varepsilon)^2} - \sqrt{\mu^2 - (j\varepsilon)^2})/\varepsilon] + 1$, а прямоугольник Π_0 — не более чем $n_0 = [(\sqrt{(\mu+1)^2 - (b-\varepsilon)^2} - \sqrt{\mu^2 - b^2})/\varepsilon] + 1$ квадратами со стороной ε. Отсюда и из (9.3) следует, что

$$N(\mu, b, \varepsilon) \le \sum_{j=0}^{[b/\varepsilon]} n_j \quad (\varepsilon \le b \le \mu). \tag{9.4}$$

Оценим сверху величины n_j:

$$n_j \le 1 + \Big((\mu+1)^2 - \mu^2 + (j\varepsilon)^2 - ((j-1)\varepsilon)^2\Big) / \Big(\varepsilon(\sqrt{(\mu+1)^2 - ((j-1)\varepsilon)^2} + \sqrt{\mu^2 - (j\varepsilon)^2})\Big) \le$$

$$\le 1 + \Big(2\mu + 1 + 2j\varepsilon^2\Big) / \Big(\varepsilon\sqrt{(\mu+1)^2 - ((j-1)\varepsilon)^2}\Big) \le$$

$$\le 1 + \Big(2\mu + 1 + 2b\varepsilon\Big) / \Big(\varepsilon\sqrt{(\mu+1)^2 - ((j-1)\varepsilon)^2}\Big) \quad (j = \overline{1, [b/\varepsilon]}),$$

$$n_0 \le 1 + \Big((\mu+1)^2 - \mu^2 + b^2 - (b-\varepsilon)^2\Big) / \Big(\varepsilon(\sqrt{(\mu+1)^2 - (b-\varepsilon)^2} + \sqrt{\mu^2 - b^2})\Big) \le$$

$$\le 1 + \Big(2\mu + 1 + 2b\varepsilon\Big) / \Big(\varepsilon\sqrt{(\mu+1)^2 - b^2}\Big).$$

Следовательно, в силу (9.4) при $\varepsilon \le b \le \mu$ имеем

$$N(\mu, b, \varepsilon) \le 1 + \left[\frac{b}{\varepsilon}\right] + \frac{2\mu + 1 + 2b\varepsilon}{\varepsilon\sqrt{(\mu+1)^2 - b^2}} + \frac{2\mu + 1 + 2b\varepsilon}{\varepsilon^2} \sum_{j=1}^{[b/\varepsilon]} \frac{\varepsilon}{\sqrt{(\mu+1)^2 - ((j-1)\varepsilon)^2}} \le$$

$$\le 1 + \frac{b}{\varepsilon} + \frac{2\mu + 1 + 2b\varepsilon}{\varepsilon\sqrt{(\mu+1)^2 - b^2}} + \frac{2\mu + 1 + 2b\varepsilon}{\varepsilon^2} \sum_{j=1}^{[b/\varepsilon]} \int_{(j-1)\varepsilon}^{j\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{(\mu+1)^2 - x^2}} \le$$

$$\le 1 + \frac{b}{\varepsilon} + \frac{2\mu + 1 + 2b\varepsilon}{\varepsilon\sqrt{(\mu+1)^2 - b^2}} + \frac{2\mu + 1 + 2b\varepsilon}{\varepsilon^2} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{(\mu+1)^2 - x^2}}.$$

Таким образом,

$$N(\mu, b, \varepsilon) \le 1 + b/\varepsilon + \Big(2\mu + 1 + 2b\varepsilon\Big) / \Big(\varepsilon\sqrt{(\mu+1)^2 - b^2}\Big) +$$

$$+ ((2\mu + 1 + 2b\varepsilon)/\varepsilon^2) \arcsin(b/(\mu+1)) \quad (\varepsilon \le b \le \mu). \tag{9.5}$$

Будем использовать следующие легко доказываемые неравенства:

$\arcsin t \le 2t$ $(0 \le t \le 1)$, $2\mu + 1 + 2b\varepsilon \le \mu(2 + 2\varepsilon + 1/\varepsilon)$ и $2\mu + 1 + 2b\varepsilon \le (\mu+1)(2 + 2\varepsilon)$ $(\varepsilon \le b \le \mu)$,

$$\frac{\mu}{\sqrt{(\mu+1)^2 - b^2}} \le \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{если } \mu \le 1 \text{ и } 0 \le b \le \mu \\ 2, & \text{если } \mu \ge 1 \text{ и } 0 \le b \le (\mu+1)/2 \\ 2b - 1, & \text{если } \mu \ge 1 \text{ и } (\mu+1)/2 \le b \le \mu \end{array} \right\} \le 2b + 2 \quad (0 \le b \le \mu).$$

Из последних неравенств и (9.5) получим, что при $\varepsilon \le b \le \mu$ имеет место оценка

$$N(\mu, b, \varepsilon) \le 1 + b/\varepsilon + (1/\varepsilon)(2 + 2\varepsilon + 1/\varepsilon)(2b + 2) + 2b(2 + 2\varepsilon)/\varepsilon^2 \le (5 + 9/\varepsilon + 6/\varepsilon^2)(1 + b). \tag{9.6}$$

Пусть $\varepsilon \le \mu \le b \le \mu + 1$. В этом случае область $D(\mu, b)$ содержится в объединении областей $D(\mu, \mu)$ и $\Pi'_0 = \{z \in \mathbb{C}\colon 0 \le \operatorname{Re} z \le \mu + 1,\ \mu \le \operatorname{Im} z \le \mu + 1\}$. Прямоугольник Π'_0

можно покрыть не более чем $(1+[1/\varepsilon])(1+[(\mu+1)/\varepsilon])$ квадратами со стороной ε. Отсюда и из (9.6) получим, что при $\varepsilon \le \mu \le b \le \mu+1$ справедлива оценка

$$N(\mu,b,\varepsilon) \le N(\mu,\mu,\varepsilon) + (1+1/\varepsilon)(1+(\mu+1)/\varepsilon) \le$$

$$\le (5+9/\varepsilon+6/\varepsilon^2)(1+\mu) + (1+1/\varepsilon)^2(1+\mu) \le (6+11/\varepsilon+7/\varepsilon^2)(1+b). \qquad (9.7)$$

Требуемая оценка следует из сопоставления оценок (9.1), (9.2), (9.6), (9.7) и при этом $C(\varepsilon) = 6+11/\varepsilon+7/\varepsilon^2$. Доказательство леммы 9.1 завершено.

10. Об условии "сумма единиц". Справедлива

Теорема 10.1. *Пусть $\{u_k(x)\}$ — произвольная равномерно минимальная в $L_p(G)$ система СПФ оператора (1.1) и выполнена антиаприорная оценка (1.6). Тогда существует положительная постоянная C_1^* такая, что для любого $\mu \ge 0$ справедливо неравенство*

$$\sum_{\mu\le|\mu_k|\le\mu+1} 1 \le C_1^*(1+\sup_{\mu\le|\mu_k|\le\mu+1}|\operatorname{Im}\mu_k|). \qquad (10.1)$$

Доказательство. Пусть $\mu \ge 0$ и $b(\mu) = \sup_{\mu\le|\mu_k|\le\mu+1}|\operatorname{Im}\mu_k|$, $D(\mu) = \{z \in \mathbb{C}\colon \mu \le |z| \le \mu+1,\ |\operatorname{Im} z| \le b(\mu),\ -\pi/(2n) < \arg z \le 3\pi/(2n)\}$. Из определения (1.4) числа μ_k следует, что $-\pi/(2n) < \arg\mu_k \le 3\pi/(2n)$, поэтому если $\mu \le |\mu_k| \le \mu+1$, то $\mu_k \in D(\mu)$. В силу леммы 9.1 область $D(\mu)$ можно покрыть не более чем $4C(\delta\sqrt{2})(1+b(\mu))$ квадратами, длины сторон которых $\delta\sqrt{2}$, где δ — число, фигурирующее в формулировке теоремы 8.2. Радиус окружности, описанной около квадрата со стороной $\delta\sqrt{2}$, равен δ. Таким образом, область $D(\mu)$ можно покрыть семейством кругов радиуса δ и количество $N(\mu)$ таких кругов не превосходит числа $4C(\delta\sqrt{2})(1+b(\mu))$. Пусть $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{N(\mu)}$ — центры этих кругов. В силу следствия 8.2 $\sum_{|\mu_k-\xi_j|\le\delta} 1 \le C_3$ $(j=\overline{1,N(\mu)})$, где C_3 — некоторая положительная постоянная. Таким образом,

$$\sum_{\mu\le|\mu_k|\le\mu+1} 1 = \sum_{\mu_k\in D(\mu)} 1 \le \sum_{j=1}^{N(\mu)} \sum_{|\mu_k-\xi_j|\le\delta} 1 \le$$

$$\le C_3\sum_{j=1}^{N(\mu)} 1 = C_3N(\mu) \le 4C_3C(\delta\sqrt{2})(1+b(\mu)) = C_1^*(1+\sup_{\mu\le|\mu_k|\le\mu+1}|\operatorname{Im}\mu_k|),$$

где $C_1^* = 4C_3C(\delta\sqrt{2})$. Доказательство теоремы 10.1 завершено.

Следствие 10.1. *Пусть выполнены условия теоремы 10.1 и справедливо карлеманово условие $\sup_k|\operatorname{Im}\mu_k| < \infty$. Тогда существует положительная постоянная C^* такая, что для любого $\mu \ge 0$ справедливо неравенство*

$$\sum_{\mu\le|\mu_k|\le\mu+1} 1 \le C^*. \qquad (10.2)$$

Доказательство. По предположению выполняется карлеманово условие, т. е. $|\operatorname{Im}\mu_k| \le C_4$, где C_4 — некоторая неотрицательная постоянная. Отсюда и из оценки (10.1) получаем неравенство (10.2), и при этом $C^* = C_1^*(1+C_4)$.

11. Некоторые замечания и частные случаи. В теоремах 4.1, 7.1, 8.1, 8.2 и следствиях 8.1, 8.2, 10.1 условие равномерной минимальности системы $\{u_k(x)\}$ может быть заменено на любое из следующих условий:

а) система $\{u_k(x)\}$ замкнута в $L_p(G)$ ($1 \le p < \infty$) и существует система $\{v_k(x)\}$, биортогонально сопряженная к системе $\{u_k(x)\}$ и такая, что $\sup_k \|u_k\|_{L_p(G)}\|v_k\|_{L_q(G)} < \infty$;

б) система $\{u_k(x)\}$ образует базис пространства $L_p(G)$, $1 < p < \infty$.

Справедливость этого утверждения следует из С) и Д) (см. [1]).

Особый интерес представляет случай $n=2$ и $p=2$. В дальнейшем символом L^* обозначим оператор, формально сопряженный к оператору L.

Теорема 11.1 (критерий базисности при $n = 2$). *Пусть $p_1(x) \in D_1(G)$, $p_2(x) \in L_1(G)$, $\{u_k(x)\}$ — произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система, состоящая из СПФ оператора $Lu = u'' + p_1(x)u' + p_2(x)u$, и пусть выполнены следующие условия:*

1) *ранг собственных функций равномерно ограничен;*

2) *система $\{v_k(x)\}$, биортогонально сопряженная в $L_2(G)$ к $\{u_k(x)\}$, состоит из СПФ оператора L^* и полна в $L_2(G)$.*

Тогда необходимым и достаточным условием базисности в $L_2(G)$ системы $\{u_k(x)\}$ является существование постоянных M_0 и M_1, обеспечивающих справедливость неравенств для всех номеров k

$$|\mathrm{Im}\,\mu_k| \le M_0, \quad \|u_k\|_{L_2(G)}\|v_k\|_{L_2(G)} \le M_1. \tag{11.1}$$

Доказательство. Необходимость первого условия (11.1) доказана в работе [7], а необходимость второго условия хорошо известна (см., например, [8, с. 372]).

В работе [9] доказано, что если выполняются все условия теоремы 11.1, то даже для безусловной базисности в $L_2(G)$ системы СПФ оператора $Lu = u'' + p_1(x)u' + p_2(x)u$ достаточно существования постоянных M_0, M_1 и C^*, обеспечивающих справедливость неравенств (11.1), (10.2). Кроме того, в силу следствия 10.1 и замечания, высказанного в начале настоящего пункта, из условий (11.1) вытекает условие (10.2). Следовательно, условия (11.1) достаточны для базисности в $L_2(G)$ системы СПФ оператора $Lu = u''+p_1(x)u'+p_2(x)u$. Теорема 11.1 доказана.

Теорема 11.2. *Пусть выполняются все условия теоремы 11.1. Если система $\{u_k(x)\}$ образует базис пространства $L_2(G)$, то она также образует безусловный базис этого пространства.*

Доказательство. Из теоремы 3 работы [7] и теоремы 11.1 следует, что необходимые условия для базисности в $L_2(G)$ системы СПФ оператора $Lu = u'' + p_1(x)u' + p_2(x)u$ одновременно являются достаточными условиями безусловной базисности этой же системы, что и доказывает теорему 11.2.

Отметим, что аналогичный теореме 11.2 результат для почти нормированных базисов пространства $L_2(G)$ из СПФ дифференциального оператора второго порядка получен в [10].

Автор признателен В.А. Ильину за полезные обсуждения результатов этой работы.

Литература

1. *Керимов Н. Б.* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 3. С. 317—322.
2. *Керимов Н. Б.* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 4. С. 470—476.
3. *Ломов И.С.* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 1. С. 74—86.
4. *Будаев В. Д.* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 1. С. 20—29.
5. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М., 1960.
6. *Крицков Л. В.* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 1. С. 62—70.
7. *Керимов Н. Б.* // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 6. С. 943—953.
8. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., 1965.
9. *Ильин В. А.* //Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 5. С. 1048—1058.
10. *Крицков Л. В.* // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311, № 6. С. 1306—1309.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
7 февраля 1995 г.