Н. Б. Керимов, О базисности систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка, *Докл. РАН*, 1996, том 349, номер 5, 596–597

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1996, том 349, № 5, с. 596–597

МАТЕМАТИКА

УДК 517.984.5

О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

 Н. Б. Керимов

Представлено академиком В.А. Ильиным 25.11.94 г.

Поступило 25.11.93 г.

Необходимые и достаточные условия безусловной базисности (и бесселевости) в пространстве L_2 систем корневых функций обыкновенного линейного, вообще говоря, несамосопряженного дифференциального оператора исследовались в работах [1–6]. В частности, показано, что известное условие "сумма единиц" является необходимым условием безусловной базисности.

В настоящей работе удалось показать, что упомянутое условие является необходимым условием не только для безусловной, но также для обычной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка.

На произвольном конечном интервале G вещественной оси рассмотрим оператор

$$Lu(x) = u''(x) + q(x)u(x) \tag{1}$$

с комплекснозначным потенциалом $q(x) \in L_1(G)$. Следуя работам В.А. Ильина [1, 2], будем исходить из обобщенной трактовки собственных и присоединенных функций (СПФ) оператора (1), допускающей рассмотрение совершенно произвольных краевых условий.

Обозначим: D – класс функций, абсолютно непрерывных вместе со своими первыми производными в замкнутом интервале.

Под собственной функцией оператора (1), отвечающей комплексному собственному значению λ, будем понимать любую, не равную тождественно нулю функцию $y_0(x) \in D$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $Ly_0(x) + \lambda y_0(x) = 0$.

Аналогично, под присоединенной функцией этого оператора порядка m, $m \geq 1$, отвечающей тому же собственному значению λ и собственной функции $y_0(x)$, будем понимать любую комплекснозначную функцию $y_m(x) \in D$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $Ly_m(x) + \lambda y_m(x) = y_{m-1}(x)$.

Бакинский государственный университет им. М.Э. Расулзаде, Азербайджан

Каждой собственной функции может соответствовать одна или более присоединенных функций, отвечающих тому же собственному значению.

Рассмотрим произвольную систему $\{u_n(x)\}$, состоящую из понимаемых в указанном нами обобщенном смысле СПФ оператора (1). Потребуем, чтобы вместе с каждой присоединенной функцией порядка $m \geq 1$ эта система содержала также соответствующие ей собственную функцию и все присоединенные функции порядка меньше m. Это означает, что каждый элемент $u_n(x)$ системы $\{u_n(x)\}$ принадлежит D и почти всюду в G удовлетворяет уравнению

$$Lu_n(x) + \lambda_n u_n(x) = \theta_n u_{n-1}(x), \tag{2}$$

где число θ_n равно либо нулю (в этом случае называем $u_n(x)$ собственной функцией оператора L), либо единице (в этом случае требуем, чтобы $\lambda_n = \lambda_{n-1}$, и называем $u_n(x)$ присоединенной функцией оператора L).

Порядок присоединенной функции $u_n(x)$ обозначим через m_n (если $u_n(x)$ – собственная функция, то считаем, что $m_n = 0$).

Хорошо известно (см., например, [7, с. 306]), что если система $\{u_n(x)\}$ полна в $L_2(G)$ и минимальна, то существует и притом единственная система $\{v_n(x)\}$, биортогонально сопряженная к $\{u_n(x)\}$ в $L_2(G)$.

Символом L^* обозначим оператор, формально сопряженный к оператору L, а именно: $L^*v(x) = v''(x) + \overline{q(x)}v(x)$.

В дальнейшем, наряду с собственными значениями λ_n будем использовать спектральный параметр $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$, где

$$\sqrt{r\exp(i\varphi)} = \sqrt{r}\exp\left(\frac{i\varphi}{2}\right) \text{ при } -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{3\pi}{2}.$$

В работе [4] показано, что при условии равномерной ограниченности длины цепочки корневых функций отсутствие конечных точек сгущения последовательности $\{\mu_n\}$ является необходимым условием базисности в $L_2(G)$ системы $\{u_n(x)\}$. Следовательно, в этом случае числа μ_n можно занумеровать в порядке неубывания их абсолютных величин с учетом кратности.

Сформулируем теперь основные результаты настоящей работы.

Основная теорема. *Пусть $\{u_n(x)\}$ – произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система, состоящая из СПФ оператора* (1), *и пусть выполнены три следующих условия*:

1) *существует целое неотрицательное число N_0 такое, что для всех $n \geq 1$ справедливо $m_n \leq N_0$*;

2) *последовательность $\{|\mu_n|\}$ является монотонно возрастающей*;

3) *система $\{v_n(x)\}$, биортогонально сопряженная к $\{u_n(x)\}$ в $L_2(G)$, состоит из СПФ оператора L^*.*

Если $\{u_n(x)\}$ образует базис пространства $L_2(G)$, то существует постоянная C_1 такая, что для любого $\mu \geq 0$

$$\sum_{\mu \leq |\mu_n| \leq \mu+1} 1 \leq C_1. \tag{3}$$

Третье условие основной теоремы означает, что каждая функция $v_n(x)$ принадлежит D и почти всюду в G удовлетворяет уравнению $L^*v_n(x) + \bar{\lambda}_n v_n(x) = \theta_n^* v_{n+1}(x)$, где число θ_n^* равно либо нулю (в этом случае $v_n(x)$ называем собственной функцией оператора L^*), либо единице (в этом случае требуем, чтобы $\lambda_n = \lambda_{n+1}$ и $v_n(x)$ называем присоединенной функцией оператора L^*). Число θ_n^* связано с введенным выше числом θ_n соотношением $\theta_n^* = \theta_{n+1}$.

Теорема 1. *Пусть $\{u_n(x)\}$ – произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система, состоящая из СПФ оператора* (1). *Если выполняются условия* 1)–3) *основной теоремы и система $\{v_n(x)\}$ полна в $L_2(G)$, то необходимым и достаточным условием базисности в $L_2(G)$ системы $\{u_n(x)\}$ является существование постоянных C_0, C_1 и C_2, обеспечивающих справедливость неравенств*

$$|\mathrm{Im}\mu_n| \leq C_0 \quad (\textit{для всех номеров } n), \tag{4}$$

$$\sum_{\mu \leq |\mu_n| \leq \mu+1} 1 \leq C_1 \quad (\textit{для любого } \mu \geq 0), \tag{3a}$$

$$\|u_n\|_{L_2(G)} \|v_n\|_{L_2(G)} \leq C_2 \quad (\textit{для всех номеров } n). \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть $\{u_n(x)\}$ – произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система, состоящая из СПФ оператора* (1). *Пусть выполняются условия* 1)–3) *основной теоремы и $\{v_n(x)\}$ полна в $L_2(G)$. Если $\{u_n(x)\}$ образует базис пространства $L_2(G)$, то она также образует безусловный базис этого пространства.*

Последние две теоремы являются следствиями из основной теоремы настоящей работы и теорем 1–3 работы [4].

Замечание 1. Второе условие основной теоремы может быть заменено на любое из следующих условий:

2а) существует натуральное число n_0 такое, что при всех $n \geq n_0$ справедливо неравенство $|\mu_{n+1}| \geq |\mu_n|$;

2б) существует натуральное число n_0 такое, что при всех $n \geq n_0$ справедливо неравенство $\mathrm{Re}\mu_{n+1} \geq \mathrm{Re}\mu_n$.

Замечание 2. Сформулированные выше результаты легко переносятся на случай оператора $Lu(x) = u''(x) + p_1(x)u'(x) + p_2(x)u(x)$, где $p_1(x)$ абсолютно непрерывна на замкнутом интервале $\bar{G}$ и $p_2(x) \in L_1(G)$ (см. [1]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В.А.* // ДАН. 1983. Т. 273. № 5. С. 1048–1053.
2. *Ильин В.А.* // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 12. С. 2059–2071.
3. *Керимов Н.Б.* Некоторые вопросы спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1985.
4. *Керимов Н.Б.* // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 6. С. 943–953.
5. *Ломов И.С.* // Вестн. МГХ. Сер. 1. Математика. Механика. 1992. № 5. С. 42–52.
6. *Будаев В.Д.* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 1. С. 20–29.
7. *Качмаж Г., Штейнгауз С.* Теория ортогональных рядов. М., 1958. 507 с.