

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. B. Kerimov, On necessary and sufficient conditions for the basis property of systems of root functions of a differential operator, *Differ. Uravn.*, 1996, Volume 32, Number 1, 37–43

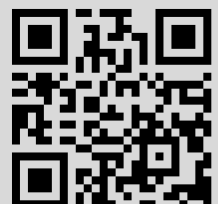
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 82.194.16.145

June 1, 2023, 09:40:15



УДК 517.984.5

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Н. Б. КЕРИМОВ

Необходимые и достаточные условия безусловной базисности (и бесселевости) в пространстве L_2 систем корневых функций обыкновенного линейного, вообще говоря, несамосопряженного дифференциального оператора исследовались в работах [1—6]. В частности, показано, что известное условие "сумма единиц" является необходимым условием безусловной базисности.

В настоящей работе удалось показать, что упомянутое условие является необходимым условием базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка.

1. Основные определения. Формулировка результатов. На произвольном конечном интервале G вещественной оси рассмотрим оператор

$$Lu(x) = u''(x) + q(x)u(x) \quad (1.1)$$

с комплекснозначным потенциалом $q(x) \in L_1(G)$. Следуя работам В.А.Ильина [1,2], будем исходить из обобщенной трактовки собственных и присоединенных функций (СПФ) оператора (1.1), допускающей рассмотрение совершенно произвольных краевых условий.

Обозначим через \mathcal{D} класс функций, абсолютно непрерывных вместе со своими первыми производными в замкнутом интервале \bar{G} . Под собственной функцией оператора (1.1), отвечающей комплексному собственному значению λ , будем понимать любую не равную тождественно нулю функцию $y_0(x) \in \mathcal{D}$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $Ly_0(x) + \lambda y_0(x) = 0$.

Аналогично под присоединенной функцией этого оператора порядка m ($m \geq 1$), отвечающей тому же собственному значению λ и собственной функции $y_0(x)$, будем понимать любую комплекснозначную функцию $y_m(x) \in \mathcal{D}$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $Ly_m(x) + \lambda y_m(x) = y_{m-1}(x)$.

Каждой собственной функции может соответствовать одна или более присоединенных функций, отвечающих тому же собственному значению.

Рассмотрим произвольную систему $\{u_n(x)\}$, состоящую из понимаемых в указанном нами обобщенном смысле СПФ оператора (1.1). Потребуем, чтобы вместе с каждой присоединенной функцией порядка $m \geq 1$ эта система содержала также соответствующие ей собственную функцию и все присоединенные функции порядка меньше m . Это означает, что каждый элемент $u_n(x)$ системы $\{u_n(x)\}$ принадлежит \mathcal{D} и почти всюду в G удовлетворяет уравнению

$$Lu_n(x) + \lambda_n u_n(x) = \theta_n u_{n-1}(x), \quad (1.2)$$

где число θ_n равно либо нулю (в этом случае называем $u_n(x)$ собственной функцией оператора L), либо единице (в этом случае требуем, чтобы $\lambda_n = \lambda_{n-1}$, и называем $u_n(x)$ присоединенной функцией оператора L).

Порядок присоединенной функции $u_n(x)$ обозначим через m_n (если $u_n(x)$ — собственная функция, то считаем, что $m_n = 0$).

Хорошо известно (см., например, [7, с. 306]), что если система $\{u_n(x)\}$ полна в $L_2(G)$ и минимальна, то существует и притом единственная система $\{v_n(x)\}$, биортогонально сопряженная к $\{u_n(x)\}$ в $L_2(G)$. Символом L^* обозначим оператор, формально сопряженный к оператору L : $L^*v(x) = v''(x) + \overline{q(x)}v(x)$. В дальнейшем наряду с собственными значениями λ_n будем использовать спектральный параметр $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$, где $\sqrt{r \exp(i\varphi)} = \sqrt{r} \exp(i\varphi/2)$ при $-\pi/2 \leq \varphi < 3\pi/2$.

В работе [4] доказано, что при условии равномерной ограниченности длины любой цепочки корневых функций отсутствие конечных точек сгущения последовательности $\{\mu_n\}$ является необходимым условием базисности в $L_2(G)$ системы $\{u_n(x)\}$. Следовательно, в этом случае числа μ_n можно занумеровать в порядке неубывания их абсолютных величин с учетом кратности.

Сформулируем теперь основные результаты настоящей работы.

Основная теорема. Пусть $\{u_n(x)\}$ — произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система, состоящая из СПФ оператора (1.1), и пусть выполнены следующие условия:

1) существует целое неотрицательное число N_0 такое, что для всех $n \geq 1$ справедливо $m_n \leq N_0$;

2) последовательность $\{|\mu_n|\}$ является монотонно возрастающей;

3) система $\{v_n(x)\}$, биортогонально сопряженная к $\{u_n(x)\}$ в $L_2(G)$, состоит из СПФ оператора L^* .

Если $\{u_n(x)\}$ образует базис пространства $L_2(G)$, то существует постоянная C_1 такая, что для любого $\mu \geq 0$

$$\sum_{\mu \leq |\mu_n| \leq \mu+1} 1 \leq C_1. \quad (1.3)$$

Третье условие основной теоремы означает, что каждая функция $v_n(x)$ принадлежит \mathcal{D} и почти всюду в G удовлетворяет уравнению

$$L^*v_n(x) + \overline{\lambda_n}v_n(x) = \hat{\theta}_n v_{n+1}(x),$$

где число $\hat{\theta}_n$ равно либо нулю (в этом случае $v_n(x)$ называем собственной функцией оператора L^*), либо единице (тогда требуем, чтобы $\lambda_n = \lambda_{n+1}$, и $v_n(x)$ называем присоединенной функцией оператора L^*). Число $\hat{\theta}_n$ связано с введенным выше числом θ_n соотношением $\hat{\theta}_n = \theta_{n+1}$.

Теорема 1.1. Пусть $\{u_n(x)\}$ — произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система, состоящая из СПФ оператора (1.1). Если выполняются условия 1) — 3) основной теоремы и система $\{v_n(x)\}$ полна в $L_2(G)$, то необходимым и достаточным условием базисности в $L_2(G)$ системы $\{u_n(x)\}$ является существование постоянных C_0 , C_1 и C_2 , обеспечивающих справедливость неравенств (1.3),

$$|\operatorname{Im} \mu_n| \leq C_0 \quad (\text{для всех номеров } n), \quad (1.4)$$

$$\|u_n\|_{L_2(G)} \|v_n\|_{L_2(G)} \leq C_2 \quad (\text{для всех номеров } n). \quad (1.5)$$

Теорема 1.2. Пусть $\{u_n(x)\}$ — произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система, состоящая из СПФ оператора (1.1). Пусть выполняются условия 1) — 3) основной теоремы и $\{v_n(x)\}$ полна в $L_2(G)$. Если $\{u_n(x)\}$ образует базис пространства $L_2(G)$, то она также образует безусловный базис этого пространства.

Последние две теоремы являются следствиями из основной теоремы настоящей работы и теорем 1 — 3 работы [4].

З а м е ч а н и е 1.1. Второе условие основной теоремы может быть заменено любым из следующих условий:

2а) существует натуральное число n_0 такое, что при всех $n \geq n_0$ справедливо неравенство $|\mu_{n+1}| \geq |\mu_n|$;

2б) существует натуральное число n_0 такое, что при всех $n \geq n_0$ справедливо неравенство $\operatorname{Re} \mu_{n+1} \geq \operatorname{Re} \mu_n$.

Замечание 1.2. Сформулированные выше результаты легко переносятся на случай оператора

$$Lu(x) = u''(x) + p_1(x)u'(x) + p_2(x)u(x),$$

где $p_1(x)$ абсолютно непрерывна на замкнутом интервале \bar{G} и $p_2(x) \in L_1(G)$ (см. [1]).

2. Некоторые вспомогательные утверждения. Всюду в дальнейшем, не нарушая общности, будем считать, что $G = (0; 1)$. Для простоты записи норму в пространстве $L_2(0; 1)$ будем обозначать через $\|\cdot\|$. Как обычно, (f, g) означает скалярное произведение в соответствующем гильбертовом пространстве. Везде под C (с индексом) будем понимать положительную постоянную, кроме того, $O(1)$ будет означать ограниченную функцию (не обязательно одну и ту же) своих аргументов.

Лемма 2.1. Пусть $\{u_n(x)\}$ — произвольная система, состоящая из СПФ оператора (1.1), и пусть имеет место (1.4). Тогда при $x, t, x+t \in [0; 1]$ и μ_n , удовлетворяющих условию $|\mu_n| \geq 1$, справедливо представление

$$u_n(x+t) = u_n(t) \cos \mu_n x + \mu_n^{-1} u_n'(t) \sin \mu_n x + (x + |\mu_n|^{-1}) \|u_n\| O(1). \quad (2.1)$$

Доказательство. Умножив обе части равенства

$$u_n''(\xi+t) + q(\xi+t)u_n(\xi+t) + \mu_n^2 u_n(\xi+t) = \theta_n u_{n-1}(\xi+t)$$

на функцию $\sin \mu_n(\xi-x)$, проинтегрировав полученное тождество по $\xi \in [0; x]$ и применив формулу интегрирования по частям к интегралу $\int_0^x u_n''(\xi+t) \sin \mu_n(\xi-x) d\xi$, после несложных выкладок получим

$$u_n(x+t) = u_n(t) \cos \mu_n x + \mu_n^{-1} u_n'(t) \sin \mu_n x + \mu_n^{-1} \int_0^x [\theta_n u_{n-1}(\xi+t) - q(\xi+t)u_n(\xi+t)] \sin \mu_n(\xi-x) d\xi. \quad (2.2)$$

В работе [8] (см. также [9]), в частности, доказаны оценки

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |u_n(x)| \leq C_3 \|u_n\|, \quad \max_{0 \leq x \leq 1} |u_n'(x)| \leq C_4 |\mu_n| \|u_n\|, \quad (2.3)$$

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |\theta_n u_{n-1}(x)| \leq C_5 |\mu_n| \|u_n\|. \quad (2.4)$$

Следовательно, последний член в представлении (2.2) равен $(x + |\mu_n|^{-1}) \|u_n\| O(1)$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. Пусть $\mu \geq 1$, $0 \leq h \leq 1$, $y, y+h \in [0; 1]$ и $Q = \{\Lambda : \operatorname{Re} \Lambda > 0, |\operatorname{Im} \Lambda| \leq C_0, \mu \leq |\Lambda| \leq \mu+1\}$. Тогда для всех $\Lambda \in Q$ справедливы равенства

$$2 \int_y^{y+h} \cos \Lambda x \cos \mu(x-y) dx = h \cos \Lambda y + (h^2 + \mu^{-1}) O(1), \quad (2.5)$$

$$2 \int_y^{y+h} \sin \Lambda x \cos \mu(x-y) dx = h \sin \Lambda y + (h^2 + \mu^{-1}) O(1). \quad (2.6)$$

Доказательство. Пусть z — любое комплексное число. Будем использовать легко доказуемые неравенства

$$|\sin z| \leq 2 \exp(|\operatorname{Im} z|), \quad |\cos z| \leq 2 \exp(|\operatorname{Im} z|), \quad (2.7)$$

$$|\sin z| \leq 4|z| \exp(|\operatorname{Im} z|), \quad (2.8)$$

$$||z| - z| \leq 2|\operatorname{Im} z| \quad (\operatorname{Re} z > 0). \quad (2.9)$$

Поскольку $|\operatorname{Im}(\Lambda + \mu)| = |\operatorname{Im}(\Lambda - \mu)| = |\operatorname{Im} \Lambda| \leq C_0$ и $0 \leq h \leq 1$, то из оценок (2.7) и (2.9) следует

$$\sin(\Lambda + \mu)h = O(1), \quad \cos(\Lambda + \mu)h = O(1), \quad (2.10)$$

$|\Lambda - \mu| \leq ||\Lambda| - \Lambda| + ||\Lambda| - \mu| \leq 2|\operatorname{Im} \Lambda| + 1 \leq 2C_0 + 1$ или, что то же самое,

$$\Lambda - \mu = O(1). \quad (2.11)$$

Кроме того, отметим очевидное неравенство

$$(\Lambda + \mu)^{-1} = \mu^{-1}O(1). \quad (2.12)$$

Из оценок (2.8) и (2.11) вытекает

$$\sin(\Lambda - \mu)x = (\Lambda - \mu)x \exp(|\operatorname{Im} \Lambda|x)O(1) = xO(1). \quad (2.13)$$

Тогда в силу (2.10), (2.12) и (2.13) имеем

$$\int_0^h \cos(\Lambda + \mu)x dx = \frac{\sin(\Lambda + \mu)h}{\Lambda + \mu} = \mu^{-1}O(1), \quad \int_0^h \sin(\Lambda + \mu)x dx = \frac{1 - \cos(\Lambda + \mu)h}{\Lambda + \mu} = \mu^{-1}O(1),$$

$$\int_0^h \sin^2 \frac{(\Lambda - \mu)x}{2} dx = O(1) \int_0^h x^2 dx = h^3 O(1), \quad \int_0^h \sin(\Lambda - \mu)x dx = O(1) \int_0^h x dx = h^2 O(1).$$

Таким образом,

$$E_1 = 2 \int_0^h \cos \Lambda x \cos \mu x dx = \int_0^h \cos(\Lambda - \mu)x dx + \int_0^h \cos(\Lambda + \mu)x dx = h -$$

$$-2 \int_0^h \sin^2 \frac{(\Lambda - \mu)x}{2} dx + \mu^{-1}O(1) = h + (h^3 + \mu^{-1})O(1), \quad E_2 = 2 \int_0^h \sin \Lambda x \cos \mu x dx = (h^2 + \mu^{-1})O(1).$$

Используя последние два равенства, окончательно получим

$$2 \int_y^{y+h} \cos \Lambda x \cos \mu(x-y) dx = 2 \int_0^h \cos \Lambda(x+y) \cos \mu x dx = E_1 \cos \Lambda y - E_2 \sin \Lambda y = h \cos \Lambda y + (h^2 + \mu^{-1})O(1).$$

При выводе этого равенства учитываются оценки $\cos \Lambda y = O(1)$, $\sin \Lambda y = O(1)$. Равенство (2.5) доказано, справедливость (2.6) устанавливается совершенно аналогично.

Лемма 2.3. Пусть $\{u_n(x)\}$ — произвольная система, состоящая из СПФ оператора (1.1). Тогда при $\mu \geq 1$, $0 \leq y \leq h$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq y+r \leq y+r+h \leq 1$ для всех $\mu_n \in Q$ (Q — множество, введенное в формулировке леммы 2.2) имеет место равенство

$$\int_0^1 u_n(t) \theta_{y,r}^{\mu,h}(t) dt = h u_n(y+r) + (h^2 + \mu^{-1}) \|u_n\| O(1), \quad (2.14)$$

где

$$\theta_{y,r}^{\mu,h}(t) = \begin{cases} 2 \cos \mu(t - y - r) & \text{при } t \in [y+r; y+r+h], \\ 0 & \text{при } t \notin [y+r; y+r+h]. \end{cases}$$

Доказательство. Учитывая определение функции $\theta_{y,r}^{\mu,h}(t)$ и представление (2.1), преобразуем левую часть (2.14):

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_n(t) \theta_{y,r}^{\mu,h}(t) dt &= 2 \int_{y+r}^{y+r+h} u_n(t) \cos \mu(t-y-r) dt = 2 \int_y^{y+h} u_n(x+r) \cos \mu(x-y) dx = \\ &= 2u_n(r) \int_y^{y+h} \cos \mu_n x \cos \mu(x-y) dx + 2\mu_n^{-1} u_n'(r) \int_y^{y+h} \sin \mu_n x \cos \mu(x-y) dx + 2 \int_y^{y+h} (x + |\mu_n|^{-1}) dx \|u_n\| O(1). \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.5), (2.6) вытекает

$$\int_0^1 u_n(t) \theta_{y,r}^{\mu,h}(t) dt = h(u_n(r) \cos \mu_n y + \mu_n^{-1} u_n'(r) \sin \mu_n y) + (h^2 + \mu^{-1}) \|u_n\| O(1). \quad (2.15)$$

Отметим, что при получении (2.15) необходимо также учесть оценки (2.3).

Утверждение леммы 2.3 следует из сопоставления (2.15) и (2.1).

Лемма 2.4. Если последовательности $\{\varphi_k\}_1^\infty$ и $\{\psi_k\}_1^\infty$ с элементами из гильбертова пространства H биортогональны и $\{\varphi_k\}_1^\infty$ образует базис пространства H , то существует постоянная C такая, что для всех $f, g \in H$ и натуральных чисел l и p ($l < p$) справедливо неравенство $|\sum_{k=l}^p (f, \psi_k)(\varphi_k, g)| \leq C \|f\|_H \|g\|_H$.

Доказательство. Любой вектор $f \in H$ разлагается в сходящийся по норме ряд $f = \sum_{k=1}^\infty (f, \varphi_k) \varphi_k$, и, стало быть, для любого $g \in H$ числовой ряд $(f, g) = \sum_{k=1}^\infty (f, \varphi_k)(\varphi_k, g)$ сходится.

Положим $\Omega_m(f, g) = \sum_{k=1}^m (f, \psi_k)(\varphi_k, g)$ ($m = 1, 2, \dots$), $\Omega_m(f, g)$ является билинейным функционалом, и, кроме того, при любых $f, g \in H$ существует конечный предел $\lim_{m \rightarrow \infty} \Omega_m(f, g) = (f, g)$. Следовательно, существует постоянная C' такая, что для всех $f, g \in H$ и $m = 1, 2, \dots$ имеет место неравенство $|\Omega_m(f, g)| \leq C' \|f\|_H \|g\|_H$ (см. доказательство теоремы 2 из [10, с.99]). Отсюда следует, что для всех $f, g \in H$ $|\sum_{k=l}^p (f, \psi_k)(\varphi_k, g)| = |\Omega_p(f, g) - \Omega_{l-1}(f, g)| \leq |\Omega_p(f, g)| + |\Omega_{l-1}(f, g)| \leq 2C' \|f\|_H \|g\|_H$.

3. Доказательство основной теоремы. В работе [4] доказано, что если система $\{u_n(x)\}$ образует базис пространства $L_2(0; 1)$ и выполняются условия 1) и 3) основной теоремы, то последовательность $\{\mu_n\}$ не имеет конечных точек сгущения и удовлетворяется условие типа Карлемана $|\operatorname{Im} \mu_n| \leq C_0$ ($n = 1, 2, \dots$). Отсюда и из определения чисел μ_n следует, что последовательность $\{|\mu_n|\}$ также не имеет конечных точек сгущения. Следовательно, учитывая второе условие основной теоремы, приходим к выводу: существует натуральное число n_1 такое, что при всех $n \geq n_1$ имеют место неравенства $|\mu_n| \geq 1$, $\operatorname{Re} \mu_n > 0$.

Пусть $N > 1 + \sqrt{|\mu_{n_1}|}$ — некоторое натуральное число (точное значение которого определим позже), $\mu \geq N^2$ и $0 \leq y \leq 1/N$. Положим $\theta_{y,k}(t, \mu) = \theta_{y, k/N}^{\mu, 1/N}(t)$ ($k = 0, 1, \dots, N-2$). Непосредственное вычисление показывает, что

$$\int_0^1 \theta_{y,k}^2(t, \mu) dt \leq 4N^{-1} \quad (k = 0, 1, \dots, N-2). \quad (3.1)$$

Из леммы 2.3 следует, что при $\mu \leq |\mu_n| \leq \mu + 1$ и $k = 0, 1, \dots, N-2$

$$(u_n, \theta_{y,k}) = \int_0^1 u_n(t) \theta_{y,k}(t, \mu) dt = N^{-1} u_n(y + k/N) + (N^{-2} + \mu^{-1}) \|u_n\| O(1).$$

Отсюда и из условия $\mu \geq N^2$ заключаем, что при $\mu \leq |\mu_n| \leq \mu + 1$ и $k = 0, 1, \dots, N-2$ справедливо

$$(u_n, \theta_{y,k}) = N^{-1} u_n(y + k/N) + N^{-2} \|u_n\| O(1). \quad (3.2)$$

Аналогичное равенство при тех же условиях имеет место и для функций биортогонально сопряженной системы $\{v_n(x)\}$:

$$(\theta_{y,k}, v_n) = N^{-1} \overline{v_n(y + k/N)} + N^{-2} \|v_n\| O(1). \quad (3.3)$$

Поскольку $\{u_n(x)\}$ — базис пространства $L_2(0; 1)$, а $\{v_n(x)\}$ — биортогонально сопряженная система, то (см., например, [11, с. 370])

$$\sup_n \|u_n\| \|v_n\| = C_6 < \infty. \quad (3.4)$$

Принимая во внимание первую оценку из (2.3) и аналогичную оценку $\max_{0 \leq x \leq 1} |v_n(x)| \leq C_7 \|v_n\|$, из равенств (3.2) — (3.4) получим, что при $\mu \leq |\mu_n| \leq \mu + 1$ и $k = 0, 1, \dots, N - 2$ справедливо равенство

$$(u_n, \theta_{y,k})(\theta_{y,k}, v_n) = N^{-2} u_n(y + k/N) \overline{v_n(y + k/N)} + N^{-3} O(1). \quad (3.5)$$

Пусть $l(\mu) = \min\{n : |\mu_n| \geq \mu\}$ и $p(\mu) = \max\{n : |\mu_n| \leq \mu + 1\}$. Так как последовательность $\{|\mu_n|\}$ монотонно возрастает, то в силу леммы 2.4 и оценки (3.1) имеем

$$\left| \sum_{\mu \leq |\mu_n| \leq \mu+1} (u_n, \theta_{y,k})(\theta_{y,k}, v_n) \right| = \left| \sum_{n=l(\mu)}^{p(\mu)} (u_n, \theta_{y,k})(\theta_{y,k}, v_n) \right| \leq C_8 \int_0^1 \theta_{y,k}^2(t, \mu) dt \leq 4C_8 N^{-1}, \quad (3.6)$$

или в силу (3.5) $|N^{-2} \sum_{\mu \leq |\mu_n| \leq \mu+1} u_n(y + k/N) \overline{v_n(y + k/N)} + N^{-3} O(1) \sum_{\mu \leq |\mu_n| \leq \mu+1} 1| \leq 4C_8 N^{-1}$.

Учитывая последнюю оценку, при $\mu \geq N^2$, $0 \leq y \leq N^{-1}$ и $k = 0, 1, \dots, N - 2$ имеем

$$\left| \sum_{\mu \leq |\mu_n| \leq \mu+1} u_n(y + k/N) \overline{v_n(y + k/N)} \right| \leq C_9 (N + N^{-1} \sum_{\mu \leq |\mu_n| \leq \mu+1} 1).$$

Следовательно,

$$\left| \sum_{\mu \leq |\mu_n| \leq \mu+1} \int_0^{1/N} u_n(y + k/N) \overline{v_n(y + k/N)} dy \right| \leq C_9 (1 + N^{-2} \sum_{\mu \leq |\mu_n| \leq \mu+1} 1),$$

где $\mu \geq N^2$ и $k = 0, 1, \dots, N - 2$. Отсюда, учитывая, что

$$\int_0^{1/N} u_n(y + k/N) \overline{v_n(y + k/N)} dy = \int_{k/N}^{(k+1)/N} u_n(t) \overline{v_n(t)} dt,$$

получим оценку

$$\left| \sum_{\mu \leq |\mu_n| \leq \mu+1} \int_{k/N}^{(k+1)/N} u_n(t) \overline{v_n(t)} dt \right| \leq C_9 (1 + N^{-2} \sum_{\mu \leq |\mu_n| \leq \mu+1} 1). \quad (3.7)$$

Согласно (2.3), (3.4) имеем $\int_{1-1/N}^1 u_n(t) \overline{v_n(t)} dt = N^{-1} O(1)$. Поэтому

$$\begin{aligned} 1 = (u_n, v_n) &= \int_0^1 u_n(t) \overline{v_n(t)} dt = \sum_{k=0}^{N-2} \int_{k/N}^{(k+1)/N} u_n(t) \overline{v_n(t)} dt + \int_{1-1/N}^1 u_n(t) \overline{v_n(t)} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{N-2} \int_{k/N}^{(k+1)/N} u_n(t) \overline{v_n(t)} dt + N^{-1} O(1). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$K(\mu) = \sum_{\mu \leq |\mu_n| \leq \mu+1} 1 = \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{\mu \leq |\mu_n| \leq \mu+1} \int_{k/N}^{(k+1)/N} u_n(t) \overline{v_n(t)} dt + N^{-1} K(\mu) O(1).$$

Используем последнее равенство и (3.7) для оценки $K(\mu)$:

$$\begin{aligned} K(\mu) &\leq \sum_{k=0}^{N-2} \left| \sum_{\mu \leq |\mu_n| \leq \mu+1} \int_{k/N}^{(k+1)/N} u_n(t) \overline{v_n(t)} dt \right| + C_{10} N^{-1} K(\mu) \leq \\ &\leq C_9 \sum_{k=0}^{N-2} (1 + N^{-2} K(\mu)) + C_{10} N^{-1} K(\mu) \leq C_9 N + C_{11} N^{-1} K(\mu). \end{aligned}$$

Таким образом, доказали, что при всех $\mu \geq N^2$ имеет место оценка $(1 - C_{11} N^{-1}) K(\mu) \leq C_9 N$. Положим $N = N_1 = \max\{2(1 + [C_{11}]), 2 + [\sqrt{|\mu_n|}]\}$, где квадратная скобка означает целую часть числа. Отсюда и из последнего неравенства следует, что при $\mu \geq \mu_0 = N_1^2$ справедливо неравенство $K(\mu) \leq 2C_9 N_1$, т.е.

$$\sum_{\mu \leq |\mu_n| \leq \mu+1} 1 \leq 2C_9 N_1 = C_{12}. \quad (3.8)$$

Поскольку последовательность $\{|\mu_n|\}$ не имеет конечных точек сгущения, то $\sum_{|\mu_n| \leq \mu_0+1} 1 \leq C_{13}$. Следовательно, при $0 \leq \mu \leq \mu_0$ $\sum_{\mu \leq |\mu_n| \leq \mu+1} 1 \leq \sum_{|\mu_n| \leq \mu_0+1} 1 \leq C_{13}$. Из последнего неравенства и (3.8) следует справедливость (1.3), причем $C_1 = C_{12} + C_{13}$. Основная теорема доказана.

В заключение отметим, что аналогичные результаты для почти нормированных систем корневых функций получены в работе [12].

Литература

1. Ильин В.А. // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, №5. С. 1048 — 1053.
2. Ильин В.А. // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, №12. С. 2059 — 2071.
3. Керимов Н.Б. Некоторые вопросы спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1985.
4. Керимов Н.Б. // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, №6. С. 943 — 953.
5. Ломов И.С. // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. 1992. №5. С. 42 — 52.
6. Будаев В.Д. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, №1. С. 20 — 29.
7. Качмаж Г., Штейнгауз С. Теория ортогональных рядов. М., 1958.
8. Ломов И.С. // Дифференц. уравнения. 1982. Т.18, №10. С. 1684 — 1694.
9. Тихомиров В.В. // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, №4. С. 807 — 810.
10. Ахизер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Харьков, 1977.
11. Голберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., 1965.
12. Крицков Л.В. // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311, №6. С. 1306 — 1309.

Бакинский государственный университет
им. М.Э. Расул-заде

Поступила в редакцию
19 сентября 1995 г.