N. B. Kerimov, Unconditional basis property of a system of eigen- and associated functions of a fourth-order differential operator, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, Volume 286, Number 4, 803–808

$\operatorname{card}\sigma(N_\pm) \leqslant 2$) при $p = 2$ разобран в [4]; разумеется, соответствующий результат теперь может быть получен и при $p \neq 2$.

Ввиду ограниченности места приведем дополнительно только один пример. Пусть $m = 1$ и $N_\pm(x) = b_\pm \exp(i\psi_\pm x)\,(1 - \Sigma\, b_j^\pm \exp(i\varphi_j^\pm x))$, где $b_\pm \neq 0$, $\psi_\pm \leqslant 0$, $\varphi_j^\pm < 0$. Тогда для нётеровости (1) необходимо и достаточно, чтобы $\psi_\pm = 0$ и величины $\gamma_\pm = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\sigma + s}{2} \pm \dfrac{1}{2\pi}\arg\left(\dfrac{b_-}{b_+}\right)$ не были целыми. Если эти условия выполнены, то индекс (1) равен $E(\gamma_+) + E(\gamma_-)$.

Одесское отделение Института экономики
Академии наук УССР

Поступило
14 II 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980, с. 664. 2. *Дудучава Р.В., Сагинашвили А.И.* – Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 2, с. 301–312. 3. *Sarason D.E.* – Duke Math. J., 1977, vol. 44, № 2, p. 357–364. 4. *Карлович Ю.И., Спитковский И.М.* – ДАН, 1983, т. 269, № 3, с. 531–535. 5. *Karlovich Yu.I., Spitkovskii I.M.* – Lect. Notes in Math., 1984, vol. 1043, p. 279–282. 6. *Ганин М.П.* – Изв. вузов. Математика, 1963, № 2, с. 31–43. 7. *Пальцев Б.В.* – Матем. сб., 1980, т. 113, № 3, с. 355–399. 8. *Чеботарев Г.Н.* – УМН, 1956, т. 11, № 3, с. 199–202.

УДК 517.927.25 МАТЕМАТИКА

Н.Б. КЕРИМОВ

О БЕЗУСЛОВНОЙ БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 28 XI 1984)

В настоящей работе изучается вопрос о безусловной базисности системы собственных и присоединенных функций дифференциального оператора четвертого порядка

$$(1)\qquad Lu = u^{(4)} + p_1(x)\,u^{(3)} + p_2(x)\,u^{(2)} + p_3(x)\,u^{(1)} + p_4(x)\,u,$$

рассматриваемого на произвольном ограниченном интервале G вещественной оси с совершенно произвольными граничными условиями. Предполагается, что $p_m(x)$, $m = 1, 2, 3, 4$, суть комплекснозначные функции, они суммируемы на интервале G вместе с их производными до $(4 - m)$-го порядка.

Будем отправляться от обобщенной трактовки собственных и присоединенных функций оператора (1), допускающей рассмотрение совершенно произвольных краевых условий (см. [1–4]).

Под собственной функцией оператора (1), отвечающей комплексному собственному значению λ, будем понимать любую не равную тождественно нулю комплекснозначную функцию $\overset{0}{u}(x)$ из класса $L_2(G)$, которая абсолютно непрерывна вместе со своими производными до третьего порядка включительно в интервале G и удовлетворяет почти всюду в интервале G уравнению $L\overset{0}{u} + \lambda\overset{0}{u} = 0$.

Аналогично, под присоединенной функцией порядка $l, l \geqslant 1$, отвечающей тому же λ и собственной функции $\overset{0}{u}(x)$, будем понимать любую комплекснозначную функцию $\overset{l}{u}(x)$ из класса $L_2(G)$, которая абсолютно непрерывна вместе со своими производными до третьего порядка включительно в интервале G и удовлетворяет почти всюду в интервале G уравнению $L\overset{l}{u} + \lambda \overset{l}{u} = \overset{l-1}{u}$.

Обозначим через $\{u_n\}_1^\infty$ произвольную минимальную систему, состоящую из понимаемых в указанном выше обобщенном смысле собственных и присоединенных функций оператора (1), отвечающих системе собственных значений $\{\lambda_n\}_1^\infty$ таких, что $|\lambda_n| \to \infty$ при $n \to \infty$. Будем считать, что числа λ_n занумерованы в порядке неубывания их абсолютных величин с учетом кратности. Каждой собственной функции может соответствовать одна и более присоединенных функций, отвечающих тому же собственному значению. Будем требовать, чтобы вместе с каждой присоединенной функцией порядка $l \geqslant 1$ система $\{u_n\}_1^\infty$ обязательно включала в себя соответствующие ей собственную функцию и все присоединенные функции порядка меньше l. Это означает, что каждый элемент $u_n(x)$ системы $\{u_n\}_1^\infty$ принадлежит классу $L_2(G)$, абсолютно непрерывен со своими производными до третьего порядка включительно в интервале G и удовлетворяет почти всюду в G уравнению $Lu_n + \lambda_n u_n = \theta_n u_{n-1}$, где число θ_n равно либо нулю (в этом случае мы называем u_n собственной функцией оператора L), либо единице (в этом случае мы требуем, чтобы $\lambda_n = \lambda_{n-1}$ и называем u_n присоединенной функцией оператора L).

Обозначим через μ_n тот корень четвертой степени из комплексного числа $(-\lambda_n)$, который лежит в углу, содержащем положительную вещественную полуось, а более точно, положим $\mu_n = (-\lambda_n)^{1/4}$, где всюду $(r \exp\{i\varphi\})^{1/4} = r^{1/4} \exp\left\{\dfrac{i\varphi}{4}\right\}$ при $-\frac{1}{2}\pi < \varphi \leqslant \frac{3}{2}\pi$.

Норму элемента $u(x)$ пространства $L_2(G)$ будем обозначать $\|u\|$ и, как обычно, $(f_1, f_2) = \int\limits_G f_1(x)\overline{f_2(x)}\,dx$ для $f_1(x), f_2(x) \in L_2(G)$.

Пусть K_0 и K – произвольные связные компакты иtервала G такие, что K_0 содержится строго внутри K.

Лемма 1. *Если последовательность* $\{|\mathrm{Im}\,\mu_n|\}_1^\infty$ *ограничена, то справедливо неравенство*

$$\max_{x \in K_0} |u_n^{(s)}(x)| \leqslant C(K_0, K)(1 + |\mu_n|)^s \left\{ \|u_n\|_{L_2(K)} + \frac{\|\theta_n u_{n-1}\|_{L_2(K)}}{(1 + |\mu_n|)^3} \right\},$$

где $s = 0, 1, 2, 3$ *и* $n = 2, 3, \ldots$ *Здесь* $C(K_0, K)$ *– положительное число, которое зависит только от* K_0 *и* K.

Лемма 2. *Если последовательность* $\{|\mathrm{Im}\,\mu_n|\}_1^\infty$ *ограничена, то для достаточно больших номеров* n *справедливо неравенство*

$$\sup_{x \in G} |u_n^{(s)}(x)| \leqslant C(1 + |\mu_n|)^{s + 1/2} \left\{ \|u_n\| + \frac{\|\theta_n u_{n-1}\|}{(1 + |\mu_n|)^3} \right\},$$

где $s = 0, 1, 2, 3$ *и* C *– положительная постоянная, не зависящая от* n *и* s.

Лемма 3. *Пусть* $\{\alpha_k\}$ *– числовая последовательность и* $\alpha_k \geqslant 0, k = 0, 1, 2, \ldots$, γ *– любое комплексное число, для которого* $\mathrm{Re}\,\gamma > 0$. *Для того чтобы ряд*

$$\sum_{k=0}^\infty \alpha_k \left| \int_0^1 f(x) \exp\{-k\gamma x\}\,dx \right|^2$$

сходился при любой $f(x) \in L_2(0, 1)$, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \leqslant C_0 n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где C_0 – положительная постоянная, не зависящая от n.

Лемма 4. *Пусть $\{u_n\}_1^\infty$ – безусловный базис в $L_2(G)$ и, кроме того,*

(2) $$|\operatorname{Im} \mu_n| \leqslant C_1, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad \sum_{t \leqslant |\mu_n| \leqslant t+1} 1 \leqslant C_2 \quad (\text{для всех } t \geqslant 0);$$

(3) $$\|\theta_n u_{n-1}\| \leqslant C_3 (1 + |\mu_n|)^3 \|u_n\|, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

где положительные постоянные C_1, C_2, C_3 не зависят от n и t.

При выполнении этих условий существует такое постоянное число $\tau_0 \geqslant 0$, что справедливо неравенство

$$\sum_{\tau_0 \leqslant |\mu_n| \leqslant \mu} |u_n(x)|^2 \|u_n\|^{-2} \leqslant C_0 \mu \quad (\text{для всех } x \in G \text{ и } \mu \geqslant \tau_0),$$

где C_0 – положительная постоянная, не зависящая от μ и x.

Следствие 1. *Пусть $\{u_n\}_1^\infty$ – базис Рисса в $L_2(G)$ и, кроме того, имеет место (2). Тогда существует такое постоянное число $\tau_0 \geqslant 0$, что справедливо неравенство*

$$\sum_{\tau_0 \leqslant |\mu_n| \leqslant \mu} |u_n(x)|^2 \leqslant C_0 \mu \quad (\text{для всех } x \in G \text{ и } \mu \geqslant \tau_0),$$

где C_0 – положительная постоянная, не зависящая от μ и x.

Пусть $\{u_n\}_1^\infty$ – полная в $L_2(G)$ и минимальная система. Известно, что существует и притом единственная система $\{v_n\}_1^\infty$, биортогонально сопряженная в $L_2(G)$ к системе $\{u_n\}_1^\infty$. Потребует дополнительно, чтобы каждая функция биортогонально сопряженной системы была в указанном выше обобщенном смысле собственной и присоединенной функцией оператора L^*, формально сопряженного к оператору (1). При нашем обобщенном понимании собственных и присоединенных функций это означает, что каждая функция $v_n(x)$ почти всюду в интервале G удовлетворяет уравнению $L^* v_n + \bar{\lambda}_n v_n = \theta_n^* v_{n+1}$, где число θ_n^* равно либо нулю (в этом случае мы называем v_n собственной функцией оператора L^*), либо единице (в этом случае требуем, чтобы $\lambda_n = \lambda_{n+1}$, и называем v_n присоединенной функцией оператора L^*).

Теорема. *Пусть имеет место* (2), (3) *и, кроме того,*

$$\|\theta_n^* v_{n+1}\| \leqslant C_4 (1 + |\mu_n|)^3 \|v_n\|, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где C_4 – положительная постоянная, не зависящая от n. При выполнении этих условий необходимым и достаточным условием безусловной базисности в $L_2(G)$ системы $\{u_n\}_1^\infty$ является существование:

1) *постоянной $\tau_0 \geqslant 0$, обеспечивающей справедливость неравенств*

(4) $$\sum_{\tau_0 \leqslant |\mu_n| \leqslant \mu} |u_n(x)|^2 \|u_n\|^{-2} \leqslant C_0 \mu \quad (\text{для всех } x \in G \text{ и } \mu \geqslant \tau_0);$$

(5) $$\sum_{\tau_0 \leqslant |\mu_n| \leqslant \mu} |v_n(x)|^2 \|v_n\|^{-2} \leqslant C_0 \mu \quad (\text{для всех } x \in G \text{ и } \mu \geqslant \tau_0);$$

2) *постоянной C_5, обеспечивающей справедливость для всех номеров n неравенства*

(6) $$\|u_n\| \cdot \|v_n\| \leqslant C_5.$$

Здесь C_0 – положительная постоянная, не зависящая от x и μ.

С л е д с т в и е 2. *Пусть имеет место* (2). *Тогда необходимым и достаточным условием базисности Рисса в* $L_2(G)$ *системы* $\{u_n\}_1^\infty$ *является существование:*

1) *постоянной* $M > 0$, *обеспечивающей справедливость для всех номеров* n *неравенств*

$$\|u_n\| \leqslant M, \quad \|v_n\| \leqslant M;$$

2) *постоянной* $\tau_0 \geqslant 0$, *обеспечивающей справедливость неравенств*

$$\sum_{\tau_0 \leqslant |\mu_n| \leqslant \mu} |u_n(x)|^2 \leqslant C_0 \mu,$$

$$\sum_{\tau_0 \leqslant |\mu_n| \leqslant \mu} |v_n(x)|^2 \leqslant C_0 \mu \quad (\text{для всех } x \in G \text{ и } \mu \geqslant \tau_0),$$

где C_0 *– положительная постоянная, не зависящая от* x *и* μ.

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а т е о р е м ы. В силу леммы 4 и того, что системы $\{u_n\}_1^\infty$ и $\{v_n\}_1^\infty$ подчинены одинаковым условиям, необходимость условий (4), (5) очевидна, а необходимость условия (6) не только для безусловной, но и для обычной базисности произвольной системы $\{u_n\}_1^\infty$ хорошо известна (см. [6]).

Требует доказательства только достаточность условий (4)–(6). В силу условия (6) достаточно доказать сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(g, v_n)|^2 \, \|v_n\|^{-2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |(u_n, f)|^2 \, \|u_n\|^{-2},$$

где $g(x)$ и $f(x)$ – любые функции из $L_2(G)$ (см. [6]). Так как системы $\{u_n\}_1^\infty$ и $\{v_n\}_1^\infty$ подчинены одиковым условиям, то, для того чтобы доказать безусловную базисность в $L_2(G)$ системы $\{u_n\}_1^\infty$, достаточно доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n, f)|^2 \, \|u_n\|^{-2}$, где $f(x)$ – любая функция из $L_2(G)$.

Не ограничивая общности, будем считать, что $G = (-1, 1)$ и $p_1(x) \equiv 0, x \in \bar{G}$ (см. [3]).

Пусть $\omega_1 = -\omega_2 = i$, $\omega_3 = -\omega_4 = 1$ и n – достаточно большое натуральное число. Введем обозначения:

$$A_{nk} = \frac{\omega_k}{4\mu_n^3} \left\{ -u_n^{(3)}(0) + \mu_n \omega_k u_n^{(2)}(0) - (\mu_n \omega_k)^2 u_n^{(1)}(0) + (\mu_n \omega_k)^3 u_n(0) \right\},$$

$$M_n(x) = \frac{1}{4\mu_n^3} \left\{ p_2(x) u_n^{(2)}(x) + p_3(x) u_n^{(1)}(x) + p_4(x) u_n(x) - \theta_n u_{n-1}(x) \right\},$$

$$B_{n1} = A_{n4} - \int_0^1 M_n(x) \exp\{-\mu_n x\}\, dx.$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующей формулы при $0 \leqslant t < 1$:

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^{3} A_{nk} \exp\{-\mu_n \omega_k t\} + B_{n1} \exp\{\mu_n t\} + \tag{7}$$

$$+ \sum_{k=1}^{3} \omega_k \int_0^t M_n(x) \exp\{\mu_n \omega_k (x - t)\}\, dx + \int_0^1 M_n(x) \exp\{\mu_n (t - x)\}\, dx.$$

Пусть N – достаточно большое натуральное число и $\tau = [|\mu_N|] > \max\{\tau_0, 1\}$, где $[|\mu_N|]$ – целая часть $|\mu_N|$. Используя леммы 1, 2 и (2)–(4), приходим к следующему выводу: существуют такие положительные постоянные γ_1 и γ_2, не зависящие соответственно от n и μ, что справедливы неравенства

(8) $\quad |A_{nk}| \leqslant \gamma_1 \|u_n\|;$

(9) $\quad \sum\limits_{\tau < |\mu_n| \leqslant \mu} |B_{n1} \exp\{\mu_n\}|^2 \|u_n\|^{-2} \leqslant \gamma_2 \mu \quad$ (для всех $\mu > \tau$).

В силу неравенства (8) и формулы (7) имеет место

$$(10) \quad \sum_{|\mu_n| > \tau} \left| \int_0^1 u_n(t) \overline{f(t)}\, dt \right|^2 \|u_n\|^{-2} \leqslant$$

$$\leqslant 8\gamma_1^2 \sum_{k=1}^{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^1 f(t) \exp\{-\mu_n \omega_k t\}\, dt \right|^2 +$$

$$+ 8 \sum_{|\mu_n| > \tau} |B_{n1} \exp\{\mu_n\}|^2 \left| \int_0^1 \overline{f(t)} \exp\{\mu_n(t-1)\}\, dt \right|^2 \|u_n\|^{-2} +$$

$$+ 8 \sum_{k=1}^{3} \sum_{|\mu_n| > \tau} \left[\int_0^1 |M_n(x)| \left| \int_x^1 \overline{f(t)} \exp\{\mu_n \omega_k (x-t)\}\, dt \right| dx \right]^2 \|u_n\|^{-2} +$$

$$+ 8 \sum_{|\mu_n| > \tau} \left[\int_0^1 |M_n(x)| \left| \int_0^x \overline{f(t)} \exp\{\mu_n (t-x)\}\, dt \right| dx \right]^2 \|u_n\|^{-2},$$

где $f(x)$ – любая функция из $L_2(-1, 1)$.

Сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \overline{f(t)} \exp\{-\mu_n \omega_k t\}\, dt \right|^2$ при $k = 1, 2$ доказана в работе [3]. Сходимость этого же ряда при $k = 3$ доказывается с помощью леммы 3. Сходимость второго ряда в правой части неравенства (10) доказывается с помощью неравенства (9) и леммы 3. При доказательстве сходимости остальных рядов в правой части неравенства (10) используется лемма 2 и сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \overline{f(t)} \exp\{-\mu_n \omega_k t\}\, dt \right|^2$ при $k = 1, 2, 3$.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{|\mu_n| > \tau} \|u_n\|^{-2} \left| \int_0^1 u_n(t) \overline{f(t)}\, dt \right|^2$, где $f(x)$ – любая функция из $L_2(-1, 1)$, сходится. Аналогичным образом доказывается сходимость ряда $\sum\limits_{|\mu_n| > \tau} \|u_n\|^{-2} \left| \int_{-1}^0 u_n(t) \overline{f(t)}\, dt \right|^2$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{|\mu_n| > \tau} |(u_n, f)|^2 \|u_n\|^{-2}$, где $f(x)$ – любая функция из $L_2(-1, 1)$, сходится. Так как ряд $\sum\limits_{|\mu_n| > \tau} |(u_n, f)|^2 \|u_n\|^{-2}$ отличается от ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(u_n, f)|^2 \|u_n\|^{-2}$ конечным числом членов, то последний ряд тоже сходится.

При $G = (0, 1)$ и при краевых условиях $u(0) = 0$, $u^{(1)}(0) = u^{(1)}(1)$, $u^{(2)}(0) = 0$, $u^{(3)}(0) = u^{(3)}(1)$ в силу доказанной теоремы при $p_m(x) \equiv 0$, $m = 1, 2, 3, 4$, будет обладать безусловной базисностью специально выбранная система собственных и присоединенных функций.

Аналогичные результаты получены для дифференциального оператора третьего порядка.

Автор выражает глубокую признательность проф. В.А. Ильину за постановку задачи и внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
17 XII 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В.А.* – Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 5, с. 771–794. 2. *Ильин В.А.* – Там же, 1980, т. 16, № 6, с. 981–1009. 3. *Ильин В.А.* – ДАН, 1983, т. 273, № 5, с. 1048–1053. 4. *Ломов И.С.* – Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 10, с. 1684–1694. 5. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 6. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М., 1958.

УДК 517.977.56

МАТЕМАТИКА

К.Б. МАНСИМОВ

К ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ В КЛАССИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ УПРАВЛЕНИЙ В СИСТЕМАХ ГУРСА–ДАРБУ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 11 I 1985)

1. К настоящему времени вопросы, связанные с получением необходимых условий оптимальности типа принципа максимума Понтрягина в задачах управления, описываемых системой Гурса–Дарбу, достаточно полно изучены. Большой теоретический и практический интерес представляет (см., например, [1, 2]) в таких задачах случай вырождения принципа максимума Понтрягина вдоль исследуемого на оптимальность процесса. Такой случае, следуя Л.И. Розоноэру [3], называют особым случаем, а соответствующий процесс – особым процессом.

В последние годы большое внимание уделяется разработке теории особых управлений в системах Гурса–Дарбу, но полученные результаты в основном относятся к особым в смысле принципа максимума Понтрягина [4] управлениям. Довольно подробный обзор соответствующих работ имеется в [5].

Настоящая работа посвящена получению новых необходимых условий оптимальности особых в классическом смысле управлений в нелинейных системах Гурса–Дарбу.

Поскольку особые в смысле принципа максимума Понтрягина управления в случае открытости множества допустимых управлений являются также особыми в классическом смысле, а обратное неверно [4], полученные результаты позволяют получить дополнительную информацию также об управлениях, не являющихся особыми в смысле принципа максимума Понтрягина.

В основе предлагаемой схемы исследования лежит новая форма представления второй вариации критерия качества.

2. Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u) = \varphi(z(T, X)) \tag{1}$$