ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2020, том 56, № ??, с. 1–12

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.25

О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ. II

© 2020 г. З. С. Алиев, Н. Б. Керимов, В. А. Мехрабов

Рассматривается спектральная задача, возникающая при описании изгибных колебаний однородного стержня, в сечениях которого действует продольная сила, левый конец которого закреплён, а на правом сосредоточен инерционный груз. Исследуется равномерная сходимость разложений по собственным функциям этой задачи.

DOI: 10.1134/S037406412002

Настоящая работа является продолжением статьи [1], в которой для задачи (1.1)–(1.4) изучены расположение собственных значений на вещественной оси и структура корневых подпространств, получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций, исследованы базисные свойства в пространстве $L_p,\ 1<p<\infty,$ системы собственных функций. В [1], в частности, установлены достаточные условия для базисности в $L_p(0,1),$ $1<p<\infty,$ системы собственных функций задачи (1.1)–(1.4) с двумя удалёнными функциями.

В данной работе изучается равномерная сходимость разложений по системе собственных функций краевой задачи (1.1)–(1.4).

Равномерная сходимость разложений по системе корневых функций оператора Штурма–Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях исследовалась в работах [2–9]. Но равномерная сходимость разложений по системе корневых функций дифференциальных операторов четвёртого порядка со спектральным параметром в граничных условиях до сих пор не изучалась.

6. Уточнение асимптотических формул для собственных значений и собственных функций задачи (1.1), (1.2), (2.1), (2.2) при $q\equiv 0,\ \ \gamma=\delta=0.$ Равномерная сходимость разложений по системе собственных функций задачи (1.1), (1.2), (2.1), (2.2) при $q\equiv 0,\ \ \gamma=\delta=0,$ т.е. задачи

$$\begin{gathered} y^{(4)}(x)=\lambda y(x),\quad 0<x<1,\\ y(0)=y'(0)=y(1)=y'(1)=0, \end{gathered} \tag{6.1}$$

хорошо изучена (см., например, [10–13]). Для изучения равномерной сходимости разложений по системе собственных функций задачи (1.1)–(1.4) установим соответствие между собственными функциями задачи (1.1)–(1.4) и задачи (6.1). Для этого нам требуется более точные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций задач (1.1)–(1.4) и (6.1).

Из теоремы 2.1 следует, что собственные значения задачи (6.1) являются вещественными, положительными и простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}.$ Кроме того, в силу [14, теорема 3.1], имеют место следующие асимптотические формулы:

$$\sqrt[4]{\mu_k}=(k+1/2)\pi+O(k^{-1}), \tag{6.2}$$

$$\vartheta_k(x)=\sin((k+1/2)\pi x)-\cos((k+1/2)\pi x)+e^{-(k+1/2)\pi x}-(-1)^{k+1}e^{(k+1/2)\pi(1-x)}+O(k^{-1}),$$

Теорема 6.1. *Для собственных значений и собственных функций задачи (6.1) справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$\sqrt[4]{\mu_k}=(k+1/2)\pi+O(e^{-k\pi}), \tag{6.3}$$

$$\vartheta_k(x) = \sin((k+1/2)\pi x) - \cos((k+1/2)\pi x) + e^{-(k+1/2)\pi x} + \\ + (-1)^{k+1} e^{(k+1/2)\pi(1-x)} + O(e^{-k\pi}), \tag{6.4}$$

при этом соотношение (6.4) выполняется равномерно по $x \in [0,1]$.

Доказательство. Пусть в уравнении (1.1) $q \equiv 0$ и $\lambda = \rho^4$, $\rho > 0$. В этом случае уравнение (1.1) имеет следующие четыре линейно независимых решения:

$$\psi_j(x,\lambda) = e^{\rho\omega_j x}, \quad j = \overline{1,4}, \tag{6.5}$$

где $\omega_1 = -\omega_4 = -1, \omega_2 = -\omega_3 = -i$. Очевидно, что $\psi_j^{(s)}(x,\rho) = (\rho\omega_j)^s e^{\rho\omega_j x}$, $j = \overline{1,4}$, $s = \overline{0,3}$, откуда следуют равенства

$$\psi_j^{(s)}(0,\rho) = (\rho\omega_j)^s, \quad \psi_j^{(s)}(1,\rho) = (\rho\omega_j)^s e^{\rho\omega_j}, \quad j = \overline{1,4}, \quad s = \overline{0,3},$$

в силу которых из (1.2), (2.1), (2.2) при $\gamma = \delta = 0$ находим

$$U_1(\lambda,\psi_j) \equiv \psi_j(0,\rho) = 1, \quad U_2(\psi_j) \equiv \psi_j'(0,\rho) = \rho\omega_j,$$
$$\tilde{U}_3(\lambda,\psi_j) \equiv \psi_j'(1,\rho) = \rho\omega_j e^{\rho\omega_j}, \quad \tilde{U}_4(\lambda,\psi_j) \equiv \psi_j(1,\rho) = e^{\rho\omega_j}, \quad j = \overline{1,4}. \tag{6.6}$$

Собственные значения задачи (6.1) являются нулями характеристического определителя

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(\lambda,\psi_1) & U_1(\lambda,\psi_2) & U_1(\lambda,\psi_3) & U_1(\lambda,\psi_4) \\ U_2(\lambda,\psi_1) & U_2(\lambda,\psi_2) & U_2(\lambda,\psi_3) & U_2(\lambda,\psi_4) \\ \tilde{U}_3(\lambda,\psi_1) & \tilde{U}_3(\lambda,\psi_2) & \tilde{U}_3(\lambda,\psi_3) & \tilde{U}_3(\lambda,\psi_4) \\ \tilde{U}_4(\lambda,\psi_1) & \tilde{U}_4(\lambda,\psi_2) & \tilde{U}_4(\lambda,\psi_3) & \tilde{U}_4(\lambda,\psi_4) \end{vmatrix}. \tag{6.7}$$

Учитывая равенства (6.6) для определителя $\tilde{\Delta}(\lambda)$ получаем представление

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \rho^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -i & i & 1 \\ e^{-\rho} & e^{-i\rho} & e^{i\rho} & e^{\rho} \\ -e^{-\rho} & -e^{-i\rho} & e^{i\rho} & e^{\rho} \end{vmatrix} = 2i\rho^2 e^{\rho}(e^{i\rho} + e^{-i\rho} + O(e^{-\rho})),$$

из которого следует, что нули этого определителя являются корнями уравнения

$$e^{2i\rho} = -1 + O(e^{-\rho}). \tag{6.8}$$

В силу (6.2) имеем

$$\rho_k = \sqrt[4]{\mu_k} = (k+1/2)\pi + \varepsilon_k, \tag{6.9}$$

где $\varepsilon_k = o(1)$ при $k \to \infty$. Учитывая (6.9), из (6.8) получаем $-e^{2i\varepsilon_k} = -1 + O(e^{-k\pi})$, откуда следует, что

$$\varepsilon_k = O(e^{-k\pi}). \tag{6.10}$$

Равенства (6.10) и (6.9) равносильны формуле (6.3).

В силу (6.3) имеют место следующие соотношения:

$$e^{i\rho_k} = i(-1)^k + O(e^{-k\pi}), \quad e^{-i\rho_k} = -i(-1)^k + O(e^{-k\pi}). \tag{6.11}$$

Собственную функцию $\vartheta(x,\rho)$ задачи (6.1), соответствующую собственному значению $\lambda = \rho^4$, можно представить в виде

$$\vartheta(x,\rho) = C_\rho \begin{vmatrix} \psi_1(x,\rho) & \psi_2(x,\rho) & \psi_3(x,\rho) & \psi_4(x,\rho) \\ U_1(\lambda,\psi_1) & U_1(\lambda,\psi_2) & U_1(\lambda,\psi_3) & U_1(\lambda,\psi_4) \\ U_2(\lambda,\psi_1) & U_2(\lambda,\psi_2) & U_2(\lambda,z_3) & U_2(\lambda,\psi_4) \\ \tilde{U}_4(\lambda,\psi_1) & \tilde{U}_4(\lambda,\psi_2) & \tilde{U}_4(\lambda,\psi_3) & \tilde{U}_4(\lambda,\psi_4) \end{vmatrix}, \tag{6.12}$$

где C_ρ – произвольная ненулевая постоянная зависящая от ρ.

Учитывая равенства (6.3), (6.5), (6.6) и (6.11), из (6.12) получаем

$$\vartheta_k(x) = \vartheta(x, \rho_k) = C_{\rho_k}\rho_k e^{\rho_k} \begin{vmatrix} e^{-\rho_k x} & e^{-i\rho_k x} & e^{i\rho_k x} & e^{\rho_k(x-1)} \\ 1 & 1 & 1 & e^{-\rho_n} \\ -1 & -i & i & e^{-\rho_n} \\ e^{-\rho_k} & e^{-i\rho_k} & e^{i\rho_k} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= C_{\rho_k}\rho_k e^{\rho_k} \left(\begin{vmatrix} e^{-(k+1/2)\pi x} & e^{-i(k+1/2)\pi x} & e^{i(k+1/2)\pi x} & e^{(k+1/2)\pi(x-1)} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -i & i & 0 \\ 0 & -i(-1)^k & i(-1)^k & \end{vmatrix} + O(e^{-k\pi}) \right) =$$

$$= 2iC_{\rho_k}\rho_k e^{\rho_k}(\sin((k+1/2)\pi x) - \cos((k+1/2)\pi x) + e^{-(k+1/2)\pi x} +$$
$$+ (-1)^{(k+1)} e^{(k+1/2)\pi(x-1)} + O(e^{-k\pi})).$$

Принимая во внимание соотношение (6.4), постоянную C_{ρ_k} выберем следующим образом: $C_{\rho_k} = ie^{-\rho_k}/(2\rho_k)$. Тогда придём к асимптотической формуле (6.4). Теорема доказана.

Пользуясь формулой (6.4) убеждаемся, что справедливо соотношение

$$\|\vartheta_k\|_2^2 = \int_0^1 \vartheta_k^2(x)\,dx = 1 + O(e^{-k\pi}). \tag{6.13}$$

Пусть $\Psi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$, – нормированная собственная функция задачи (6.1), соответствующая собственному значению μ_k, т.е. $\Psi_k(x) = \vartheta_k(x)\|\vartheta_k\|_2^{-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда в силу (6.4) и (6.13) имеем

$$\Psi_k(x) = \sin((k+1/2)\pi x) - \cos((k+1/2)\pi x) + e^{-(k+1/2)\pi x} +$$
$$+ (-1)^{k+1} e^{(k+1/2)\pi(1-x)} + O(e^{-k\pi}). \tag{6.14}$$

7. Уточнение асимптотических формул для собственных значений и собственных функций краевой задачи (1.1)–(1.4).

Теорема 7.1. *Для собственных значений и собственных функций задачи (1.1)–(1.4) справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$\sqrt[4]{\lambda_k} = (k-3/2)\pi + \frac{q_0 - 4/a_2}{4k\pi} + O(k^{-2}), \tag{7.1}$$

$$y_k(x) = \sin((k-3/2)\pi x) - \cos((k-3/2)\pi x) + e^{-(k-3/2)\pi x} +$$
$$+ (-1)^{k+1} e^{(k-3/2)\pi(x-1)} + \frac{(q_0 - 4/a_2)x - q_0(x)}{4k\pi}\sin((k-3/2)\pi x) +$$
$$+ \frac{(q_0 - 4/a_2)x - q_0(x)}{4k\pi}\cos((k-3/2)\pi x) - \frac{(q_0 - 4/a_2)x - q_0(x)}{4k\pi}e^{-(k-3/2)\pi x} +$$
$$+ (-1)^{k+1}\frac{(q_0 - 4/a_2)(x-1) - q_1(x) + 4/a_2}{4k\pi}e^{(k-3/2)\pi(x-1)} + O(k^{-2}), \tag{7.2}$$

где $q_0 = \int_0^1 q(t)\,dt$, $q_0(x) = \int_0^x q(t)\,dt$, $q_1(x) = \int_x^1 q(t)\,dt$, *при этом соотношение (7.2) выполняется равномерно по* $x \in [0,1]$.

Доказательство. В уравнении (1.1) положим $\lambda = \rho^4$, где $\rho > 0$. Известно (см. [11, с. 63–64]), что уравнение (1.1) имеет четыре линейно независимых решения $\phi_j(x,\rho)$, $j = \overline{1,4}$, удовлетворяющие соотношениям

$$\psi_j^{(s)}(x,\rho) = (\rho\omega_j)^s e^{\rho\omega_j x}(1 + (4\rho\omega_j)^{-1}q_0(x) + O(\rho^{-2})), \quad j = \overline{1,4}, \quad s = \overline{0,3}, \tag{7.3}$$

где $\omega_1 = -\omega_4 = -1$, $\omega_2 = -\omega_3 = -i$.

В силу (7.3) и (1.2)–(1.4) имеем

$$U_1(\lambda,\phi_j)=1+O(\rho^{-2}),\quad U_2(\lambda,\phi_j)=\rho\omega_j(1+O(\rho^{-2})),$$
$$U_3(\lambda,\phi_j)=a_1\rho^5e^{\rho\omega_j}(-\omega_j(1+(4\rho\omega_j)^{-1}q_0)+O(\rho^{-2})),$$
$$U_4(\lambda,\phi_j)=-a_2\rho^4e^{\rho\omega_j}(1+(4\rho\omega_j)^{-1}(q_0-4/a_2)+O(\rho^{-2})),\quad j=\overline{1,4}. \tag{7.4}$$

Если $\lambda=\rho^4$ – собственное значение задачи (1.1)–(1.4), то ρ является нулём характеристического определителя

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}U_1(\lambda,\phi_1)&U_1(\lambda,\phi_2)&U_1(\lambda,\phi_3)&U_1(\lambda,\phi_4)\\U_2(\lambda,\phi_1)&U_2(\lambda,\phi_2)&U_2(\lambda,\phi_3)&U_2(\lambda,\phi_4)\\U_3(\lambda,\phi_1)&U_3(\lambda,\phi_2)&U_3(\lambda,\phi_3)&U_3(\lambda,\phi_4)\\U_4(\lambda,\phi_1)&U_4(\lambda,\phi_2)&U_4(\lambda,\phi_3)&U_4(\lambda,\phi_4)\end{vmatrix},$$

В силу равенств (7.4) для определителя $\Delta(\lambda)$ получаем представление

$$\Delta(\lambda)=a_1a_2\rho^{10}e^{\rho}\times$$
$$\times\left(\begin{vmatrix}1&1&1&0\\-1&-i&i&0\\0&-ie^{-i\rho}\Big(1-\dfrac{q_0}{4i\rho}\Big)&ie^{i\rho}\Big(1+\dfrac{q_0}{4i\rho}\Big)&1+\dfrac{q_0}{4\rho}\\0&e^{-i\rho}\Big(1-\dfrac{q_0-4/a_2}{4i\rho}\Big)&e^{i\rho}\Big(1+\dfrac{q_0-4/a_2}{4i\rho}\Big)&1+\dfrac{q_0-4/a_2}{4\rho}\end{vmatrix}+O(\rho^{-2})\right)=$$
$$=a_1a_2\rho^{10}e^{\rho}\left(\begin{vmatrix}1-i&1+i&0\\-ie^{-i\rho}\Big(1-\dfrac{q_0}{4\rho i}\Big)&ie^{i\rho}\Big(1+\dfrac{q_0}{4i\rho}\Big)&1+\dfrac{q_0}{4\rho}\\e^{-i\rho}\Big(1-\dfrac{q_0-4/a_2}{4i\rho}\Big)&e^{i\rho}\Big(1+\dfrac{q_0-4/a_2}{4i\rho}\Big)&1+\dfrac{q_0-4/a_2}{4\rho}\end{vmatrix}+O(\rho^{-2})\right)=$$
$$=-2ia_1a_2\rho^{10}e^{\rho}\left(e^{i\rho}\Big(1+\frac{q_0-4/a_2}{4\rho}(1-i)\Big)+e^{-i\rho}\Big(1+\frac{q_0-4/a_2}{4\rho}(1+i)\Big)+O(\rho^{-2})\right).$$

Следовательно, нули этого определителя являются корнями уравнения

$$e^{i\rho}\Big(1+\frac{q_0-4/a_2}{4\rho}(1-i)\Big)+e^{-i\rho}\Big(1+\frac{q_0-4/a_2}{4\rho}(1+i)\Big)+O(\rho^{-2})=0.$$

Отсюда следует, что

$$e^{2i\rho}=-1+\frac{q_0-4/a_2}{2i\rho}+O(\rho^{-2}). \tag{7.5}$$

В силу (4.19) имеем

$$\rho_k=\sqrt[4]{\lambda_k}=(k-3/2)\pi+\varepsilon_k, \tag{7.6}$$

где $\varepsilon_k=o(1)$ при $k\to\infty$. Учитывая (7.6), из (7.5) получаем

$$e^{2i\rho_k}=-e^{2i\varepsilon_k}=-1-2i\varepsilon_k+o(\varepsilon_k^2)=-1+\frac{q_0-4/a_2}{2ik\pi}+O(k^{-2}),$$

откуда следует, что

$$\varepsilon_k=\frac{q_0-4/a_2}{4k\pi}+O(k^{-2}). \tag{7.7}$$

Равенства (7.6) и (7.7) равносильны формуле (7.1).

На основании формулы (7.1) имеем

$$e^{i\rho_k}=(-1)^k\left(1-\frac{q_0-4/a_2}{4ik\pi}+O(k^{-2})\right),\quad e^{-i\rho_k}=(-1)^{k+1}\left(1+\frac{q_0-4/a_2}{4ik\pi}+O(k^{-2})\right). \tag{7.8}$$

Собственную функцию $y(x,\rho)$ задачи (1.1)–(1.4), соответствующую собственному значению $\lambda=\rho^4$, можно представить в виде

$$y(x,\rho)=D_\rho\begin{vmatrix}\phi_1(x,\rho) & \phi_2(x,\rho) & \phi_3(x,\rho) & \phi_4(x,\rho)\\ U_1(\lambda,\phi_1) & U_1(\lambda,\phi_2) & U_1(\lambda,\phi_3) & U_1(\lambda,\phi_4)\\ U_2(\lambda,\phi_1) & U_2(\lambda,\phi_2) & U_2(\lambda,\phi_3) & U_2(\lambda,\phi_4)\\ U_4(\lambda,\phi_1) & U_4(\lambda,\phi_2) & U_4(\lambda,\phi_3) & U_4(\lambda,\phi_4)\end{vmatrix}, \tag{7.9}$$

где D_ρ – произвольная ненулевая постоянная, зависящая от ρ.

Учитывая равенства (7.1), (7.3) и (7.8), из (7.9) получаем

$$y(x,\rho_k)=-a_2\rho_k^5e^{\rho_k}D_{\rho_k}\times$$

$$\times\begin{vmatrix}e^{-\rho_kx}\left(1-\frac{q_0(x)}{4k\pi}\right) & e^{-i\rho_kx}\left(1-\frac{q_0(x)}{4ik\pi}\right) & e^{i\rho_kx}\left(1+\frac{q_0(x)}{4ik\pi}\right) & e^{\rho_k(x-1)}\left(1+\frac{q_0(x)}{4k\pi}\right)\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1-i & 1+i & 0\\ 0 & -i(-1)^k & i(-1)^n & 1+\frac{q_0-4/a_2}{4k\pi}\end{vmatrix}+$$

$$+a_2\rho_k^5e^{\rho_k}D_{\rho_k}O(k^{-2})=-2ia_2\rho_k^5e^{\rho_k}D_{\rho_k}\left(1+\frac{q_0-4/a_2}{4k\pi}\right)\times$$

$$\times\left(e^{-\rho_kx}\left(1-\frac{q_0(x)}{4k\pi}\right)-\frac{1}{2}e^{-i\rho_kx}\left(1-\frac{q_0(x)}{4ik\pi}\right)(1-i)-\frac{1}{2}e^{i\rho_kx}\left(1+\frac{q_0(x)}{4ik\pi}\right)(1+i)-\right.$$

$$\left.-(-1)^ke^{\rho_k(x-1)}\left(1+\frac{q_0(x)}{4k\pi}\right)\left(1-\frac{q_0-4/a_2}{4k\pi}\right)+O(k^{-2})\right)=$$

$$=2ia\rho_k^5e^{\rho_k}D_{\rho_k}\left(1+\frac{q_0-4/a_2}{4k\pi}\right)\left(\left(1-\frac{q_0(x)}{4k\pi}\right)\sin\rho_kx-\left(1+\frac{q_0(x)}{4k\pi}\right)\cos\rho_kx+\left(1-\frac{q_0(x)}{4k\pi}\right)e^{-\rho_kx}-\right.$$

$$\left.-(-1)^k\left(1-\frac{q_1(x)-4/a_2}{4k\pi}\right)e^{\rho_k(x-1)}+O(k^{-2})\right).$$

Принимая во внимание соотношение (4.17), постоянную D_{ρ_k} выберем следующим образом:

$$D_{\rho_k}=-\frac{1}{2ia_2\rho_k^5e^{\rho_k}}\left(1+\frac{q_0-4/a_2}{4k\pi}\right)^{-1}.$$

Тогда, подставляя это значение D_{ρ_k} в найденное представление решения $y(x,\rho_k)$, получаем

$$y_k(x)=y(x,\rho_k)=\left(\left(1-\frac{q_0(x)}{4k\pi}\right)\sin(\rho_kx)-\left(1+\frac{q_0(x)}{4k\pi}\right)\cos(\rho_kx)+\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{q_0(x)}{4k\pi}\right)e^{-\rho_kx}-(-1)^k\left(1-\frac{q_1(x)-4/a_2}{4k\pi}\right)e^{\rho_k(x-1)}+O(k^{-2})\right). \tag{7.10}$$

Из формул (7.1) следуют соотношения

$$\sin(\rho_kx)=\sin(k-3/2)\pi x+\frac{(q_0-4/a_2)x}{4k\pi}\cos((k-3/2)\pi x)+O(k^{-2}),$$

$$\cos(\rho_k x) = \cos(k-3/2)\pi x - \frac{(q_0 - 4/a_2)x}{4k\pi}\sin((k-3/2)\pi x) + O(k^{-2}),$$
$$e^{-\rho_k x} = e^{-(k-3/2)\pi x}\left(1 - \frac{(q_0-4/a_2)x}{4k\pi}\right) + O(k^{-2}),$$
$$e^{\rho_k(x-1)} = e^{(k-3/2)\pi(x-1)}\left(1 + \frac{(q_0-4/a_2)(x-1)}{4k\pi}\right) + O(k^{-2}).$$

Учитывая эти соотношения в (7.10), приходим к формуле (7.2). Теорема доказана.

8. Равномерная сходимость разложений по системе собственных функций задачи (1.1)–(1.4). Из асимптотических формул (6.14) и (7.2) следует, что при $k \geqslant 3$ справедливо равенство

$$y_k(x) = \Psi_{k-2}(x) + \frac{(q_0 - 4/a_2)x - q_0(x)}{4k\pi}(\sin((k-3/2)\pi x) + \cos((k-3/2)\pi x)) - \frac{(q_0-4/a_2)x + q_0(x)}{4k\pi}\times$$
$$\times e^{-(k-3/2)\pi x} + (-1)^{k+1}\frac{(q_0-4/a_2)(x-1) - q_1(x) + 4/a_2}{4k\pi}e^{(k-3/2)\pi(x-1)} + O(k^{-2}). \qquad (8.1)$$

В силу (6.13) и (7.2) выполняются соотношения

$$\Psi_k(1) = O(e^{-k\pi}), \quad y_k(1) = -\frac{2(-1)^k}{a_2 k\pi} + O(k^{-2}). \qquad (8.2)$$

Кроме того, из [15, оценка (1.1)] следует, что

$$|y_k'(1)| = \frac{|y_k''(1)|}{a_1\lambda_k} \leqslant \frac{K_1\rho_k^2}{\rho_k^4}\max_{x\in[0,1]}|y_k(x)| \leqslant \frac{K_2}{k^2}, \qquad (8.3)$$

где K_1, K_2 – некоторые положительные постоянные.

В силу формулы (7.10) имеем

$$y_k^2(x) = \left(1 - \frac{q_0(x)}{2k\pi}\right)\sin^2\rho_k x + \left(1 + \frac{q_0(x)}{2k\pi}\right)\cos^2\rho_k x + \left(1 - \frac{q_0(x)}{2k\pi}\right)e^{-2\rho_k x} +$$
$$+ \left(1 - \frac{q_1(x) - 4/a_2}{2k\pi}\right)e^{2\rho_k(x-1)} - \sin(2\rho_k x) + 2\left(1 - \frac{q_0(x)}{2k\pi}\right)e^{-\rho_k x}\sin(\rho_k x) -$$
$$- 2(-1)^k\left(1 - \frac{q_0 - 4/a_2}{4k\pi}\right)e^{\rho_k(x-1)}\sin(\rho_k x) - 2e^{-\rho_k x}\cos(\rho_k x) +$$
$$+ 2(-1)^k\left(1 - \frac{q_0(x) - q_1(x) + 4/a_2}{4k\pi}\right)e^{\rho_k(x-1)}\cos(\rho_k x) + O(k^{-2}).$$

Интегрируя это равенство в пределах от 0 до 1, получаем

$$\int_0^1 y_k^2(x)\,dx = 1 + \frac{1}{2k\pi}\int_0^1 q_0(x)\cos 2\rho_k x\,dx + \int_0^1 (e^{-2\rho_k x} + e^{2\rho_k(x-1)})\,dx -$$
$$- \int_0^1 \sin(2\rho_k x)\,dx + 2\int_0^1 e^{-\rho_k x}\sin(\rho_k x)\,dx - \frac{1}{k\pi}\int_0^1 q_0(x)e^{-\rho_k x}\sin(\rho_k x)\,dx -$$
$$- 2(-1)^k\left(1 - \frac{q_0 - 4/a_2}{4k\pi}\right)\int_0^1 e^{\rho_k(x-1)}\sin(\rho_k x)\,dx - 2\int_0^1 e^{-\rho_k x}\cos(\rho_k x)\,dx +$$
$$+ 2(-1)^k\int_0^1 \left(1 - \frac{q_0(x) - q_1(x) + 4/a_2}{4k\pi}\right)e^{\rho_k(x-1)}\cos(\rho_k x)\,dx + O(k^{-2}). \qquad (8.4)$$

Так как $q_0(x) \in C^1[0,1]$, то очевидны соотношения

$$\int_0^1 q_0(x)\cos(2\rho_k x)\,dx = O(\rho_k^{-1}) = O(k^{-1}),$$

$$\int_0^1 q_0(x)e^{-\rho_k x}\sin(\rho_k x)\,dx = \frac{1}{2i}\int_0^1 q_0(x)\{e^{-\rho_k(1-i)x} - e^{-\rho_k(1+i)x}\}\,dx = O(\rho_k^{-1}),$$

$$\int_0^1 q_0(x)e^{\rho_k(x-1)}\sin(\rho_k x)\,dx = O(\rho_k^{-1}), \quad \int_0^1 q_0(x)e^{\rho_k(x-1)}\cos(\rho_k x)\,dx = O(\rho_k^{-1}),$$

учитывая которые в (8.4), находим

$$\|y_k\|_2^2 = 1 + \int_0^1 (e^{-2\rho_k x} + e^{2\rho_k(x-1)})\,dx - \int_0^1 \sin(2\rho_k x)\,dx + 2\int_0^1 e^{-\rho_k x}\sin(\rho_k x)\,dx -$$

$$- 2(-1)^k\int_0^1 e^{\rho_k(x-1)}\sin(\rho_k x)\,dx - 2\int_0^1 e^{-\rho_k x}\cos(\rho_k x)\,dx +$$

$$+ 2(-1)^k\int_0^1 e^{\rho_k(x-1)}\cos(\rho_k x)\,dx + O(k^{-2}). \tag{8.5}$$

Заметим, что

$$\int_0^1 (e^{-2\rho_k x} + e^{2\rho_k(x-1)})\,dx = 2\int_0^1 e^{-2\rho_k x}\,dx = \frac{1}{\rho_k} - \frac{e^{-2\rho_k}}{\rho_k} = \frac{1}{k\pi} + O(k^{-2}),$$

$$\int_0^1 \sin(2\rho_k x)\,dx = \frac{1 - \cos((2k-3)\pi) + O(k^{-1})}{2k\pi} = \frac{1}{k\pi} + O(k^{-2}).$$

С помощью непосредственных вычислений убеждаемся, что справедливы следующие асимптотические равенства:

$$\int_0^1 e^{-\rho_k x}\sin(\rho_k x)\,dx = \frac{1}{2\rho_k} + O\left(\frac{e^{-\rho_k}}{\rho_k}\right) = \frac{1}{2k\pi} + O(k^{-2}),$$

$$\int_0^1 e^{-\rho_k x}\cos(\rho_k x)\,dx = \frac{1}{2\rho_k} + O\left(\frac{e^{-\rho_k}}{\rho_k}\right) = \frac{1}{2k\pi} + O(k^{-2}),$$

$$\int_0^1 e^{\rho_k(x-1)}\sin(\rho_k x)\,dx = \frac{\sin\rho_k - \cos\rho_k}{2\rho_k} + O\left(\frac{e^{-\rho_k}}{\rho_k}\right) = \frac{(-1)^k}{2k\pi} + O(k^{-2}),$$

$$\int_0^1 e^{\rho_k(x-1)}\cos(\rho_k x)\,dx = \frac{\sin\rho_k + \cos\rho_k}{2\rho_k} + O\left(\frac{e^{-\rho_k}}{\rho_k}\right) = -\frac{(-1)^k}{2k\pi} + O(k^{-2}).$$

Учитывая эти равенства в (8.5), будем иметь

$$\|y_k\|_2^2 = 1 + O(k^{-2}). \tag{8.6}$$

Пусть $r,\ l$ – произвольные фиксированные натуральные числа. Напомним (см. (5.13)), что если $\hat{\Delta}_{r,l} \neq 0$, то система $\{u_k(x)\}_{k=1,\ k\neq r,l}^{\infty}$, сопряжённая к системе $\{y_k(x)\}_{k=1,\ k\neq r,l}^{\infty}$, определяется равенством

$$u_k(x) = \delta_k^{-1}\{y_k(x) - \hat{\Delta}_{r,l}^{-1}\{\hat{\Delta}_{k,l}\delta_r^{-1}y_r(x) + \hat{\Delta}_{r,k}\delta_l^{-1}y_l(x)\}\}, \tag{8.7}$$

где

$$\delta_k = \|y_k\|_2^2 + a_1 {y'_k}^2(1) - a_2 y_k^2(1), \quad \hat{\Delta}_{r,l} = \begin{vmatrix} y'_r(1) & y'_l(1) \\ y_r(1) & y_l(1) \end{vmatrix}.$$

В силу (8.2), (8.3) и (8.6) для функции $u_k(x)$, заданной равенством (8.7), имеет место асимптотическое представление

$$u_k(x) = y_k(x) - \hat{\Delta}_{r,l}^{-1} y_k(1)\hat{\Delta}_{r,l}(x) + O(k^{-2}), \tag{8.8}$$

где $\hat{\Delta}_{r,l}(x) = \begin{vmatrix} y_r(x) & y_l(x) \\ y'_r(1) & y'_l(1) \end{vmatrix}$.

Из теоремы 5.4 следует, что если $\hat{\Delta}_{r,l} \neq 0$, то ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=1,\ k\neq r,l}^{\infty} (f, u_k) y_k(x) \tag{8.9}$$

любой непрерывной на отрезке $[0,1]$ функции $f(x)$ по системе $\{y_k(x)\}_{k=1,\ k\neq r,l}^{\infty}$ собственных функций задачи (1.1)–(1.4) сходится в пространстве $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, причём при $p = 2$ этот ряд сходится безусловно.

Основным результатов данной работы является следующая

Теорема 8.1. *Пусть $r,\ l$ – произвольные фиксированные натуральные числа такие, что $\hat{\Delta}_{r,l} \neq 0$, функция $f(x)$ принадлежит пространству $C[0,1]$ и имеет равномерно сходящийся ряд Фурье по системе функций $\{\Psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ на отрезке $[0,1]$. Если*

$$\Delta_{f,r,l} = \begin{vmatrix} (f, y_r) & (f, y_l) \\ y'_r(1) & y'_l(1) \end{vmatrix} \neq 0,$$

то ряд Фурье (8.9) функции $f(x)$ по системе $\{y_k(x)\}_{k=1,\ k\neq r,l}^{\infty}$ сходится равномерно на отрезке $[0,b]$ для любого $b \in (0,1)$, а если $\Delta_{f,r,l} = 0$, то этот ряд сходится равномерно на отрезке $[0,1]$.

Замечание 8.1. Если $f(x) \in W_2^4(0,1)$, $\ell(f)(x) \in L_2(0,1)$, $f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0$, то в силу теоремы 4 [11, с. 98] ряд Фурье $\sum_{k=1,\ k\neq r,l}^{\infty} (f, \Psi_k)\Psi_k(x)$ функции $f(x)$ по системе $\{\Psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится равномерно на отрезке $[0,1]$.

Замечание 8.2. Из асимптотической формулы (6.13) видно, что если $f(x) \in W_2^1(0,1)$, $f(0) = f(1) = 0$, то ряд $\sum_{k=1,\ k\neq r,l}^{\infty} (f, \Psi_k)\Psi_k(x)$ сходится равномерно на отрезке $[0,1]$.

Доказательство теоремы 8.1. Очевидно, что для равномерной сходимости на $[0,1]$ ряда (8.9) необходима и достаточна равномерная сходимость на $[0,1]$ ряда

$$g(x) = \sum_{k=l+1}^{\infty} (f, u_k) y_k(x). \tag{8.10}$$

Вследствие представления (8.8), из (8.10) получим

$$g(x) = \sum_{k=l+1}^{\infty} (f, u_k) y_k(x) = \sum_{k=l+1}^{\infty} (f, y_k) y_k(x) + \frac{2}{a_2\pi}\hat{\Delta}_{r,l}^{-1}\Delta_{f,r,l}\sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k} y_k(x). \tag{8.11}$$

Согласно формуле (8.1) имеем

$$y_k(x) = \Psi_{k-2}(x) + O(k^{-1}), \tag{8.12}$$

откуда в силу (8.2) и (8.8) следует, что

$$u_k(x) = \Psi_{k-2}(x) + O(k^{-1}). \tag{8.13}$$

Учитывая (8.8) и (8.13) в (8.11), получаем

$$\sum_{k=l+1}^{\infty}(f,u_k)y_k(x) = \sum_{k=l+1}^{\infty}(f,y_k)\Psi_{k-2}(x) + \sum_{k=l+1}^{\infty}(f,u_k)O(k^{-1}) +$$

$$+\frac{2}{a_2\pi}\Delta_{r,l}^{-1}\Delta_{f,r,l}\sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\Psi_{k-2}(x) + \sum_{k=l+1}^{\infty}O(k^{-2})$$

Заметим, что

$$\sum_{k=l+1}^{\infty}|(f,u_k)O(k^{-1})| \leqslant \mathrm{const}\left(\sum_{k=l+1}^{\infty}|(f,u_k)|^2 + \sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right) < +\infty,$$

поскольку система $\{y_k(x)\}_{k=1,\ k\neq r,l}^{\infty}$ является базисом Рисса в $L_2(0,1)$. Следовательно, для изучения равномерной сходимости ряда (8.13) достаточно исследовать равномерную сходимость рядов

$$\sum_{k=l+1}^{\infty}(f,y_k)\Psi_{k-2}(x), \tag{8.14}$$

$$\sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\Psi_{k-2}(x). \tag{8.15}$$

Пусть

$$Q_1(x) \equiv Q_2(x) = \{(q_0 - 4/a_2)x - q_0(x)\}/(4\pi), \quad Q_3(x) = -\{(q_0 - 4/a_2)x + q_0(x)\}/(4\pi),$$

$$Q_4(x) = -\{(q_0 - 4/a_2)(x-1) - q_1(x) + 4/a_2\}/(4\pi).$$

Тогда, согласно (8.1) имеем

$$y_k(x) = \Psi_{k-2}(x) + k^{-1}Q_1(x)\sin((k-3/2)\pi x) + k^{-1}Q_2(x)\cos((k-3/2)\pi x) -$$

$$- k^{-1}Q_3(x)e^{-(k-3/2)\pi x} - (-1)^k k^{-1}Q_4(x)e^{(k-3/2)\pi(x-1)} + O(k^{-2}). \tag{8.16}$$

Введём обозначение

$$e_{k,j}(x) = \begin{cases} \sin((k-3/2)\pi x), & j=1,\\ \cos((k-3/2)\pi x), & j=2,\\ e^{-(k-3/2)\pi x}, & j=3,\\ (-1)^k e^{(k-3/2)\pi(x-1)}, & j=4. \end{cases}$$

Тогда асимптотическое равенство (8.16) можно записать в виде

$$y_k(x) = \Psi_{k-2}(x) + \sum_{j=1}^{4}k^{-1}Q_j(x)e_{k,j}(x) + O(k^{-2}). \tag{8.17}$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=l+1}^{\infty}(f,y_k)\Psi_{k-2}(x)=\sum_{k=l+1}^{\infty}(f,\Psi_{k-2})\Psi_{k-2}(x)+$$

$$+\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=l+1}^{\infty}k^{-1}(fQ_j,e_{k,j})\Psi_{k-2}(x)+\sum_{k=l+1}^{\infty}O(k^{-2})\Psi_{k-2}(x). \tag{8.18}$$

Каждая из систем $\{e_{k,j}\}_{k=1}^{\infty}$, $j=1,2,3,4$, является бесселевой (свойство бесселевости системы $\{e_{k,j}\}_{k=1}^{\infty}$ при $j=1,2$ очевидно, а при $j=3,4$ следует из [16, лемма 5]). Следовательно, имеем

$$\sum_{k=l+1}^{\infty}|k^{-1}(fQ_j,e_{k,j})k|\leqslant \mathrm{const}\left(\sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=l+1}^{\infty}|(fQ_j,e_{k,j})|^2\right)\leqslant \mathrm{const}\,(1+\|f\|_2^2).$$

Таким образом, ряд (8.14) сходится равномерно, поскольку в силу условия теоремы сходится равномерно ряд $\sum_{k=l+1}^{\infty}(f,\Psi_{k-2})\Psi_{k-2}(x)$.

Вследствие (6.13) имеем

$$(-1)^k\Psi_k(x)=-\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\sin(k\pi(1-x))+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\cos(k\pi(1-x))+$$

$$+(-1)^k e^{-(k+1/2)\pi x}-e^{-(k+1/2)\pi(1-x)}+O(e^{-k\pi}). \tag{8.19}$$

Известно (см., например, [17, с. 610]), что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}k^{-1}\sin(k\pi x)$ сходится поточечно на отрезке $[0,1]$ и сходится равномерно на отрезке $[a,1]$ для любого $a\in(0,1)$; ряд $\sum_{k=1}^{\infty}k^{-1}\times$ $\times\cos(k\pi x)$ сходится поточечно на полуинтервале $(0,1]$ и сходится равномерно на отрезке $[a,1]$ для любого $a\in(0,1)$; ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k^{-1}e^{-(k+1/2)\pi x}$ сходится равномерно на отрезке $[0,1]$; ряд $\sum_{k=1}^{\infty}k^{-1}e^{-(k+1/2)\pi x}$ сходится поточечно на полуинтервале $(0,1]$ и сходится равномерно на отрезке $[a,1]$ для любого $a\in(0,1)$. Следовательно, ряды $\sum_{k=1}^{\infty}k^{-1}\sin(k\pi(1-x))$, $\sum_{k=1}^{\infty}k^{-1}\cos(k\pi(1-x))$ и $\sum_{k=1}^{\infty}k^{-1}e^{-(k+1/2)\pi(1-x)}$ сходятся равномерно на отрезке $[0,b]$ для любого $b\in(0,1)$. Отсюда и из (8.19) с учётом равенства $\Phi_k(1)=0$, $k\in\mathbb{N}$, следует, что ряд (8.15) сходится поточечно на отрезке $[0,1]$ и сходится равномерно на отрезке $[0,b]$ для любого $b\in(0,1)$.

Теперь покажем, что ряд (8.15) не сходится равномерно на отрезке $[0,1]$. Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k^{-1}e^{-(k+1/2)\pi x}$ сходится равномерно на отрезке $[0,1]$, то в силу (8.18) достаточно рассмотреть ряд

$$-\sum_{k=1}^{\infty}k^{-1}(e^{-(k+1/2)\pi x}-(-1)^k\sin((k+1/2)\pi x)+(-1)^k\cos((k+1/2)\pi x)),$$

или, что то же самое, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{-1}(e^{-(k+1/2)\pi(1-x)}-\cos((k+1/2)\pi(1-x))+\sin((k+1/2)\pi(1-x))). \tag{8.20}$$

Рассмотрим функцию $G(u)=e^{-u}-\cos u+\sin u$ на отрезке $[0,\pi/2]$. Докажем, что имеет место неравенство

$$G(u)\geqslant u^2/5,\quad u\in[0,\pi/2]. \tag{8.21}$$

Действительно, при всех $u\in\mathbb{R}$ выполняются неравенства $e^{-u}\geqslant 1-u+u^2/2-u^3/6$, $\cos u\leqslant 1-$ $-u^2/2+u^4/24$ и $\sin u\geqslant u-u^3/6$. Поэтому

$$e^{-u}-\cos u+\sin u\geqslant 1-u+\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6}-1+\frac{u^2}{2}-\frac{u^4}{24}+u-\frac{u^3}{6}=u^2-\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{24}=u^2\left(1-\frac{u}{3}-\frac{u^2}{24}\right).$$

Но, как легко убедиться, $1-u/5-u^2/24>1/5$ при $u\in[0,\pi/2]$.

Пусть $S_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, – частичная сумма ряда (8.20). Тогда очевидно, что

$$S_{2N}(x) - S_N(x) = \sum_{k=N+1}^{2N} k^{-1} G(a_k),$$

где $a_k = (k+1/2)(1-x)\pi$, $N \leqslant k \leqslant 2N$.

Предположим, что $x = x_N = 4N/(4N+1)$. Тогда имеем

$$a_k = (k+1/2)(1-x_N)\pi = \frac{k+1/2}{4N+1}\pi \leqslant \frac{2N+1/2}{4N+1}\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда и из неравенства (8.21) следует, что

$$G(a_k) \geqslant \frac{a_k^2}{5} \geqslant \frac{(2k+1)^2\pi^2}{20(4N+1)^2}, \quad N+1 \leqslant k \leqslant 2N.$$

Следовательно, имеем

$$S_{2N}(x) - S_N(x) \geqslant \frac{\pi^2}{20(4N+1)^2} \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{(2k+1)^2}{k} \geqslant \frac{\pi^2}{5(4N+1)^2} \sum_{k=N+1}^{2N} k =$$

$$= \frac{\pi^2}{5(4N+1)^2} \frac{(3N+1)N}{2} \geqslant \frac{\pi^2}{125N^2} \frac{(3N^2}{2} = \frac{3\pi^2}{250}.$$

Теорема доказана.

Пусть r, l – произвольные фиксированные натуральные числа. Если $\hat{\Delta}_{r,l} \neq 0$, то в силу [18, с. 12, теорема 7] и теоремы 5.4 система $\{u_k(x)\}_{k=1,\ k\neq r,l}^{\infty}$, сопряжённая к системе $\{y_k(x)\}_{k=1,\ k\neq r,l}^{\infty}$ собственных функций задачи (1.1)–(1.4), образует базис в $L_p(0,1)$, $1 < p < < \infty$. Тогда любая непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье по системе $\{u_k(x)\}_{k=1,\ k\neq r,l}^{\infty}$:

$$f(x) = \sum_{k=1,\ k\neq r,l}^{\infty} (f, y_k) u_k(x), \tag{8.22}$$

который сходится в $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$.

Теорема 8.2. *Пусть r, l – произвольные фиксированные натуральные числа такие, что $\hat{\Delta}_{r,l} \neq 0$. Тогда ряд Фурье (8.22) функции $f(x)$ по системе $\{u_k(x)\}_{k=1,\ k\neq r,l}^{\infty}$ сходится равномерно на отрезке $[0,1]$ если и только если функция $f(x)$ имеет равномерно сходящийся на отрезке $[0,1]$ ряд Фурье по системе функций $\{\Psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.*

Доказательство. В силу соотношений (8.2), (8.3), (8.8), (8.12), (8.13) и (8.17) имеем

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} (f, y_k) u_k(x) = \sum_{k=l+1}^{\infty} (f, y_k) y_k(x) - \Delta_{r,l}^{-1} \Delta_{r,l}(x) \sum_{k=l+1}^{\infty} (f, y_k) y_k(1) +$$

$$+ \sum_{k=l+1}^{\infty} (f, y_k) O(k^{-2}) = \sum_{k=r+1}^{\infty} (f, \Psi_{k-2}) \Psi_{k-2}(x) + \sum_{j=1}^{4} \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{(fQ_j, e_{k,j})}{k} \Psi_{k-2}(x) +$$

$$+ \sum_{k=l+1}^{\infty} \Psi_{k-2}(x) O(k^{-2}) - \hat{\Delta}_{r,l}^{-1} \hat{\Delta}_{r,l}(x) \sum_{k=l+1}^{\infty} (f, y_k) O(k^{-1}) + \sum_{k=l+1}^{\infty} (f, y_k) O(k^{-2}). \tag{8.23}$$

Из доказательства теоремы 8.1 следует, что ряды $\sum_{j=1}^{4} \sum_{k=l+1}^{\infty} k^{-1} (fQ_j, e_{k,j}) \Psi_{k-2}(x)$ и $\sum_{k=l+1}^{\infty} (f, y_k) O(k^{-1})$ сходятся равномерно на отрезке $[0,1]$ (равномерная сходимость на отрезке $[0,1]$ рядов $\sum_{k=l+1}^{\infty} \Psi_{k-2}(x) O(1/k^2)$ и $\sum_{k=l+1}^{\infty} (f, y_k) O(1/k^2)$ очевидна). Теперь утверждение теоремы непосредственно следует из (8.23). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алиев З.С., Керимов Н.Б., Мехрабов В.А.* О сходимости разложений по собственным функциям одной краевой задачи со спектральным параметром в граничных условиях. I // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56/ № 2. С. 147–161.
2. *Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И.* О базисности в пространстве L_p систем собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 10. С. 1357–1360.
3. *Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И.* К проблеме сходимости спектральных разложений для одной классической задачи со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 12. С. 1599–1604.
4. *Моисеев Е.И., Капустин Н.Ю.* Об особенностях корневого пространства одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Докл. РАН. 2002. Т. 385. № 1. С. 20–24.
5. *Капустин Н.Ю.* О равномерной сходимости ряда Фурье для спектральной задачи с квадратом спектрального параметра в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 10. С. 1504–1507.
6. *Капустин Н.Ю.* О равномерной сходимости в классе C^1 ряда Фурье для спектральной задачи с квадратом спектрального параметра в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 10. С. 1394–1399.
7. *Kerimov N.B., Goktas S., Maris E.A.* Uniform convergence of the spectral expansions in terms of root functions for a spectral problem // Electron. J. Differ. Equat. 2016. № 80. P. 1–14.
8. *Kerimov N.B., Maris E.A.* On the uniform convergence of the Fourier Series for one spectral problem with a spectral parameter in a boundary condition // Math. Methods Appl. Sci. 2016. V. 39. № 9. P. 2298–2309.
9. *Kerimov N.B., Maris E.A.* On the uniform convergence of Fourier series expansions for Sturm–Liouville problems with a spectral parameter in the boundary conditions // Results Math. 2018. V. 73. № 3. 16 p.
10. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряжённых операторов // Мат. сб. 1957. Т. 43 (85). № 1. С. 75–126.
11. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
12. *Курбанов В.М.* Условия абсолютной и равномерной сходимости биортогонального ряда, отвечающего дифференциальному оператору // Докл. РАН. 2008. Т. 422. № 5. С. 594–596.
13. *V.M. Kurbanov V.M., Huseynova Y.I.* On convergence of spectral expansion of absolutely continuous vector-function in eigenvector-functions of fourth order differential operator // Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. 2014. V. 34. № 1. P. 83–90.
14. *Керимов Н.Б., Алиев З.С.* О базисности системы собственных функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 7. С. 886–895.
15. *Керимов Н.Б.* Некоторые свойства собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора четвертого порядка // Мат. заметки. 1986. Т. 40. № 5. С. 608–620.
16. *Кесельман Г.М.* О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов. Математика. 1964. № 2. С. 82–93.
17. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т. 1. М., 1981.
18. *Кашин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. М., 1984.

Бакинский государственный университет,
Институт математики и механики НАН Азербайджана,
г. Баку, Азербайджан,
Университет Хазар, г. Баку, Азербайджан

Поступила в редакцию 17.03.2019 г.
После доработки 17.03.2019 г.
Принята к публикации 10.09.2019 г.