Khazar Journal of Science and Technology Volume 2 №2 2018, 48-51
© Khazar University Press 2018 DOI: 10.5782/2520-6133.2018.2.2.48

Спектральные свойства дифференциальных операторов нечетного порядка в вырожденном случае

[a]Султанаев Я.Т., [b]Назирова Э.А
[a]*БГПУ, Уфа, Россия*
[b]*БГУ, Уфа, Россия*
(*ellkid@gmail.com*)

В работе исследуется асимптотика фундаментальной системы решений сингулярного дифференциального уравнения нечетного порядка в вырожденном случае и их приложения к спектральным свойствам соответствующего минимального оператора.

Данная работа посвящена изучению асимптотических формул при $x \to \infty$ фундаментальной системы решений (ФСР) уравнения вида:

$$(-1)^n 2iy^{(2n+1)} + \sum_{k=l}^{n}(-1)^k \left(p_{n-k}(x)y^{(k)}\right)^{(k)} +$$

$$+i\sum_{j=m}^{n-1}(-1)^j \left[\left(q_{n-j}(x)y^{(j)}\right)^{(j+1)} + \left(q_{n-j}(x)y^{(j+1)}\right)^{(j)}\right] = i\sigma y.$$

Заметим, что ситуация, когда уравнение не содержит слагаемого с искомой функцией $y(x)$ и производных младших порядков, называется вырожденной. Асимптотика ФСР для вырожденных уравнений исследовалась ранее в работах (1),(2) [1], [2] .Асимптотика решений сингулярного дифференциального уравнения нечетного порядка изучалась в работах [3], [4], [5]. Однако вырожденный случай для уравнения нечетного порядка до настоящего времени не рассматривался.

Основные результаты

Рассмотрим модельное уравнение 5-го порядка:

$$2iy^{(5)} + (p_2(x)y'')'' - i[(q_1(x)y')'' + (q_1(x)y'')'] - (p_1(x)y')' = i\sigma y, \tag{1}$$

где $\sigma \neq 0$, и все коэффициентные функции дважды непрерывно дифференцируемы на $(0, \infty)$.

Введем в рассмотрение функцию, которую будем называть характеристическим многочленом:

$$F(x, \sigma, \mu) = 2i\mu^5 + p_2(x)\mu^4 - 2iq_1(x)\mu^3 - p_1(x)\mu^2 - i\sigma. \tag{2}$$

Очевидно, что если $|p_1(x)| \to +\infty$ при $x \to \infty$, то уравнение $F(x, \sigma, \mu) = 0$ имеет два убывающих на бесконечности корня $(\mu_1(x, \sigma), \mu_2(x, \sigma))$ и три растущих $(\mu_3(x, \sigma), \mu_4(x, \sigma), \mu_5(x, \sigma))$.. Отметим, что с помощью метода диаграмм Ньютона (см., например, [6])) удается исследовать асимптотику корней характеристического многочлена как в главном, так и первую поправку асимптотического разложения. Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. Пусть выполнены условия:.

1. $|p_1(x)| \to +\infty$ при $x \to \infty$,

2. $p_1'(x)$ не меняет знак для достаточно больших $x \geq x_0$ и выполняется:

$$\frac{p_1'(x)}{p_1^{1/2}(x)} \to 0, \quad x \to \infty, \quad \left| \int_{x_0}^{\infty} \frac{p_1'^2(x)}{p_1^{3/2}(x)} dx \right| < +\infty,$$

3. Для достаточно больших x верно $|p_2'| \leq A_2 p_1' p_1$, $|q_1'| \leq A_1 p_1' p_1^{1/2}$, где $A_{1,2}$ –положительные постоянные,

4. Для достаточно больших x верно $|p_1''| \leq B_0 p_1'^2 p_1^{-1}$ $p_2'' \leq B_2 p_1'^2$, $q_1'' \leq B_1 p_1'^2 p_1^{-1/2}$, где $B_{0,1,2}$ –положительные постоянные,

5. Для $i, j = \overline{3,5}$ существуют положительные постоянные, такие что выполняется:

$$a \leq \left| \frac{\mu_i(x,\sigma)}{\mu_j(x,\sigma)} \right| \leq b,$$

6. Для достаточно больших x $Re(\mu_j(x,\sigma) - \mu_i(x,\sigma))$ для $i, j = \overline{3,5}$, не меняет знак.

Тогда уравнение (1) имеет 5 линейно независимых решений $y_1(x,\sigma)$ таких, что при $x \to \infty$ для них справедливы асимптотические формулы:

$$y_j(x,\sigma) = \mu_j^{-1/2}(x,\sigma) exp \left\{ \int_{x_0}^{x} \mu_i(t,\sigma) dt \right\} (1 + o(1)), \quad i = \overline{1,5}. \tag{3}$$

Прокомментируем условия 1)-5). Условия 3), 4) являются условиями регулярности типа Титчмарша-Левитана, исключающими осцилляцию, условие 5) означает, что все растущие корни характеристического уравнения "в одну силу". Что касается условий 1),2), то они являются ограничениями на рост функции $p_1(x)$. Например, в качестве функций $p_1(x)$можно рассмотреть функции $x^{\alpha} ln^{\beta} x, \quad 0 < \alpha < 2$.

Наметим схему доказательства теоремы. От уравнения (1) с помощью введения квазипроизводных осуществляется переход к системе дифференциальных уравнений первого порядка: пусть $Y = col(y^{[0]}, \ldots, y^{[4]})$ –вектор-столбец, где $y^{[i]}$ – i-ая квазипроизводная функции y, определяемая по формулам:

$$y^{[0]} = y, \quad y^{[1]} = \frac{d}{dx} y^{[0]}, \quad y^{[2]} = \sqrt{2} \frac{d}{dx} y^{[1]},$$

$$y^{[3]} = \sqrt{2} \frac{d}{dx} y^{[2]} - q_1(x) y^{[1]} - i \frac{p_2(x)}{\sqrt{2}} y^{[2]}, \quad y^{[4]} = \frac{d}{dx} y^{[3]} + i p_1(x) y^{[1]} - \frac{q_1(x)}{\sqrt{2}} y^{[2]}.$$

Тогда дифференциальное выражение ly, определяемое (1), будет иметь вид: $ly = (y^{[4]})' - i\sigma y$,- а уравнение (1) можно переписать в виде системы:

$$Y' = A(x,\sigma)Y, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & i\frac{p_2}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -ip_1 & \frac{q_1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \\ \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее с системой (3) производится ряд матричных преобразований, смысл которых состоит в том, чтобы перейти к так называемой L-диагональной системе, в которой коэффициент правой части является суммой диагональной и некоторой суммируемой матриц:

$$Z' = diag\{\mu_1, .., \mu_5\}Z + \Theta(x, \sigma)Z.$$

Делая замену

$$Z = W exp \int_{x_0}^{x} \mu_i(t, \sigma)dt,$$

где W –неизвестная вектор-функция, получаем систему

$$W_k' = (\mu_k - \mu_i)W_k + \sum_{m=1}^{5} \Theta_{km} W_m, \quad k = \overline{1, 5}.$$

Согласно условию 5) и формулам для корней (2), $Re(\mu_i - \mu_j)$ не меняет знак при достаточно больших x для всех $i \neq j$, $i, j = \overline{1, 5}$. Анализ асимптотического поведения матрицы $\Theta(x, \sigma)$, полученной после преобразований, показывает, что к последней системе применима лемма 1 из [7], с.288-292, из которой, с помощью обратных преобразований и с использованием техники, описанной в работе [8], получаем формулы (3).

Полученные асимптотические формулы позволяют, при некоторых дополнительных предположениях относительно коэффициентов уравнения (1), вычислять индексы дефекта минимального дифференциального оператора, порожденного в $L^2[x_0, \infty)$ дифференциальным выражением уравнения (1). В частности, если

$$p_1(x) = Cx^{\alpha}, \quad q_1(x) = Ax^{2/3\alpha}, \quad p_2(x) = Bx^{1/3\alpha}$$

и $3/4 < \alpha < 2$, то индексы дефекта могут быть $(1, 1)$ или $(2, 2)$. Если же, при тех же коэффициентах, $3/4 > \alpha > 0$, индексы дефекта могут быть $(2, 3)$ или $(3, 2)$.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №18-01-00250-А, №17-41-020230-р-а.

Список литературы

[1] Султанаев Я.Т. Асимптотика решений обыкновенных дифференциальных уравнений в вырожденном случае. Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1988. вып. 13. с. 36-55

[2] Назирова Э.А.,Султанаев Я.Т. Об индексах дефекта сингулярных дифференциальных операторов в вырожденном случае. Матем. заметки, 71:1.2002. с. 144-147

[3] Мукимов В.Р., Султанаев Я.Т. L^2-решения сингулярных дифференциальных операторов нечетного порядка. Дифференциальные уравнения. 2002. т. 38(2). с.190-194

[4] Назирова Э.А. Об индексах дефекта сингулярных операторов нечетного порядка. Матем. Заметки. 2003. том 74. выпуск 5. страницы 792-796

[5] Федорюк М.Ф. Асимптотические методы для линейных ОДУ. М. Наука. 1983

[6] Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М. 1969

[7] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М. 1969.

[8] M. S. P. Eastham and C. G. M. Grudniewicz. Asymptotic theory and deffiviency indices foe higher-order self-adjoint differential equations. M Department of Mathematics, Chelsea College, University of London, Manresa Road, London SW3 6LX.p.255-271