

**AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ
AZƏRBAYCAN TEXNİKİ UNİVERSİTETİ**

**H.H.Səfərov
K.İ.Qəhrəmanov**

Müxtəsər kristalloqrafiya və pyezoelastiklik

*Azərbaycan Texniki Universiteti
Maşınqayırma fakültəsinin
Elmi Şurasının 04.11.2015-ci il
tarixli iclasının qərarı ilə çap olunur.
(Protokol №3)*

BAKİ – 2016

Elmi redaktor: AzTU-nun Fizika kafedrasının müdiri,
əməkdar elm xadimi, f.-r. elmləri doktoru
professor **E.M.Qocayev**

Rəyçilər: AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun
“Elastiklik nəzəriyyəsi” şöbəsinin müdiri,
f.-r.e.elmləri doktoru **B.C.Hacıyev**

Sumqayıt Dövlət Unversiteti.
Elektromexanika kafedrasının müdiri,
əməkdar elm xadimi, AMEA –nın müxbir
üzvü, tex. el. doktoru, prof. **F.İ.Məmmədov**

Pyezokeramik kristalların pyezelektrik və pyezoelastiklik xassələrinə malik olması tədqiqatçıdan çox yüksək nəzəri hazırlıq tələb edir. Azərbaycanda gənc elmi tədqiqatçılara kömək məqsədini güdən bu kitaba şübhəsiz ki, ehtiyac vardır.

Kitab 7 fəsildən ibarətdir: birinci iki fəsildə kristallar və kristalların quruluşu, kristalların müxtəlif sinqoniya qrupları, seqnetoelektriklər-kristalların simmetriyasına uyğun dielektrik, pyezelektrik sabitlərin tenzorları kimi anlayışlar mümkün qədər sadə şəkildə şərh olunmuşdur.

Üçüncü fəsil tenzorlar cəbrinə, dördüncü fəsil elektromaqnit sahəsinə (Maksvell tənlikləri) və termodinamikaya həsr edilmişdir. Beşinci fəsil-pyezelektrik, altıncı fəsil-pyezoelastiklik və nəhayət sonuncu fəsildə pyezoelastiklik nəzəriyyəsinin tətbiqinə aid sadə məsələrin həlli nümunələri verilmişdir.

Müəlliflərin arzusu və səyi ilə Azərbaycan dilində nəzəri pyezokeramikaya həsr olunmuş bu kitabdən kristalloqrafya, seysmologiya, pyezokeramik çeviriciləri ilə məşğul olan elmi işçilər, aspirantlar və ixtisas mühəndisləri faydalana bilərlər.

ISBN 978-9952-8291-7-4

© Hüseyn Səfərov, 2016
© Kamal Qəhrəmanov, 2016

MÜNDƏRİCAT:

GİRİŞ	7
I FƏSİL	13
§1.1. Kristallar haqqında qısa məlumat	13
§1.2. Kristallik hal	19
§1.3. Kristalın yaranması	20
§1.4. Kristalloqrafiya	21
§1.5. Kristalların quruluşu	22
§1.6. Kristal maddənin xüsusiyyətləri	30
§1.7. Həndəsi kristalloqrafiya	37
§1.8. Simmetriya qrupları	44
§1.9. Həndəsi kristalloqrafiyanın qanunları	56
§1.10. Kristallokimyanın bəzi elementləri	58
§1.11. Atom və ionların kip yerləşdirilməsi.....	62
§1.12. Koordinasiya ədədi	64
§1.13. Struktur motivlər	66
§1.14. Kristalların fiziki xassələri	69
§1.15. Simmetriyada superpozisiya	71
§1.16. Polyar istiqamət	73
§1.17. Kristalların polyarlaşması	76
§1.18. Elektrik polyarlaşması	77
§1.19. Kristal elektrikbatareyası kimi	84
II FƏSİL. Seqnetoelektriklər	88
§2.1. Ümumi məlumat	88
§2.2. Pyezoelektriklər, elektrostriksiya və pyezoefekt	92
§2.3. Pyezoelektrik, effektlərin və reaksiyaların qısa şərhi	97
§2.4. İzomorfluq	98
§2.5. Seqnetokeramika və pyezokeramika	102
§2.6. Keramikanın pyezoaktivliyinin artırılması	104
§2.7. Pyezoelektriklərin fiziki sabitlərinin idarə oluna bilməsi	105
§2.8. Kristalların simmetriyalarına uyğun dielektrik, pyezoelektrik sabitləri və elastiklik modulları tenzorları	108

III FƏSİL. Tenzorlar cəbrinin elementləri	121
§3.1. Birinci və ikinci tərtib tenzor anlayışı	121
§3.2. Vektorun kovariant və kontravariant komponentləri. Qarşılıqlı bazis vektorları	125
§3.3. Çoxvalentli tenzorlar	129
§3.4. Tenzorlar üzərində cəbri əməllər	132
§3.5. Tərs tenzorluq əlaməti	139
§3.6. Simmetrik və antisimmetrik tenzorlar	140
§3.7. Üç valentli antisimmetrik tenzor və Kroneker simvolları	142
IV FƏSİL. Sahə nəzəriyyəsi və termodinamika	
 haqqında qısa məlumat	145
§4.1. Skalyar sahə və onun qradienti	146
§4.2. Vektor sahənin seli və onun divergensiyası	152
§4.3. Burulğanlı sahə və onun rotoru	159
§4.4. Potensiallı sahə	169
§4.5. Kristaldaxili sahə və Maksvell tənlikləri	172
§4.6. Termodinamika	178
V FƏSİL. Pyezokeramik kristalların pyezoelektrik, dielektrik və elastiklik xassələri	186
§5.1. Kristallarda mexaniki gərginliklər və deformatsiyalar	187
§5.2. Deformasiya anlayışı	191
§5.3. Affin çevirmə	192
§5.4. Sonsuz kiçik affin çevirmə	194
§5.5. Sonsuz kiçik çevirmənin saf deformatsiya və sərt yerdəyişməyə ayrılması	195
§5.6. Ümumi şəkildə deformatsiya	198
§5.7. Ümumiləşmiş Huk qanunu	205
§5.8. İzotermik və adiabatik elastiklik sabitləri	208
§5.9. Pyezoelektrik kristallar üçün hal tənlikləri	212
§5.10. Tənliklərin tenzor metodu ilə yazılışı və elektrik, pyezoelektrik və dielektrik sabitləri arasında bəzi əlaqələrin tapılması	222

§5.11.	Koordinat sisteminin başlanğıc ətrafında fırlanması zamanı hal tənlikləri və elastiklik modulları, elastiklik sabitləri, pyezoelektrik və dielektrik sabitlərinin çevrilməsi	235
§5.12.	Elastiklik, dielektrik və pyezoelektrik sabitlərinin polyarlıq vektorunun istiqamətindən asılı olaraq dəyişmələrinin təyini	238
VI FƏSİL. Pyezoelastikliyin əsas riyazi münasibətləri		250
§6.1.	Fəzada ortoqonal əyrixətli koordinat sistemi	250
§6.2.	Yerdəyişmələrlə ifadə olunmuş pyezoelastiklik tənlikləri	256
§6.3.	Gərginliklərlə ifadə olunmuş pyezoelastiklik tənlikləri	273
§6.4.	Pyezoelastiklik məsələlərinin həllərinin yeganəliyi	288
VII FƏSİL. Pyezoelastiklik nəzəriyyəsinin tətbiqlərinə aid bəzi nümunələr		294
§7.1.	Diskvari pyezokeramik transformatorun giriş seksiyaşının rəqsləri [36]	294
§7.2.	Radial polyarlaşdırılmış pyezokeramik həlqənin oxasimmetrik rəqsləri və elektrik impedansı [81]	299
§7.3.	Metal-pyezokeramika tipli diskvari bimorf çeviricinin rəqsləri	305
§7.4.	Mexaniki yüklənmədə qalın divarlı pyezokeramik silindrin rəqsləri [89]	318
§7.5.	Radial polyarlaşmış qalın divarlı pyezokeramik silindrə oxasimmetrik akustoelektrik dalğaların yayılması [91]	326
§7.6.	Qalın divarlı pyezokeramik kürə şəkilli rezonatorun rəqsləri [92]	333
§7.7.	Qalın divarlı pyezokeramik kürənin radial elektroelastik rəqsləri [93]	339

§7.8.	Radial polyarlaşmış qalın divarlı pyezokeramik kürənin oxasimmetrik rəqsləri [95]	347
§7.9.	Pyezokeramik fırlanma örtükləri üçün elektro- elastiklik münasibətləri [87]	353
§7.10.	Nazik pyezokeramik sferik örtüyün oxasimmetrik rəqsləri [101]	364
ƏDƏBİYYAT	375

GİRİŞ

XX əsrin ikinci yarısını elm və texniki tərəqqi, rabitə və informasiya kommunikasiyasının sürətli inkişafı və burada kristalların geniş tətbiqi ilə səciyyələndirmək olar. Tətbiq olunan kristallar arasında elektrokristallar mərkəzi mövqe tuturlar. Onları öz xassə və strukturlarına görə piroelektriklər, pyezoelektriklər, seqnetoelektriklər və sairə kimi növlərə ayırırlar. Piroelektrik kristallar istilik enerjisini elektrik enerjisinə və tərsinə çevirirlər, pyezoelektrik kristallar elektrik sahəsinin təsiri ilə deformasiyaya uğrayırlar və mexaniki təsir isə onlarda elektrik polyarlaşmasına səbəb olur. Piroelektriklərə şəkər və turmalini, pyezoelektriklərə kvarsı misal göstərmək olar. Pyezoelektrik kristallar səs və ultrasəs dalğalarını şüalandırmaq və qəbul etmək xassəsinə malikdirlər. Məsələn, kvarsdan düzəldilmiş nazik lövhəni radioçeviricinin rəqs konturunun elektrik sahəsində vibrasiya etməyə məcbur etməklə vermə və qəbul etmə tezliklərini idarə etmək olur. Bu səbəbdən onlar radiostansiyalarda şüalanma tezliklərinin tənzimləyicisi yüksək tezlik diapazonlarının məhdudlaşdırılmasında, aktiv ölçü cihazlarının hazırlanmasında və s. tətbiq olunurlar. Sözügedən kristallar lazer şüalarının idarə olunmasında, onların intensivliklərinin modullaşdırılmasında, güclü elektrik impulslarının əldə edilməsində, harmonikaların generasiyasında və s. də tətbiq olunurlar. Bu baxımdan radioelektronika da haqqında danışdığımız kristallarsız keçinə bilmir.

Seqnetoelektriklər (məsələn, seqnet duzları, barium titanat, kalium hidrofosfat) öz-özünə (spontan) polyarlaşma xassəsinə malikdirlər. Onlardan kiçik ölçülü, lakin böyük tutuma malik

kondensatorlar hazırlamaq mümkündür. Onlardan həm də həssas ölçü cihazlarının hazırlanmasında istifadə olunur.

Elektronikada inqilab yaratmış yarımkəçirici cihazlar da kristallik maddələr olan kremniyum və germaniumdan hazırlanırlar. Yarımkəçirici diodlar kompyuter və rabitə sistemlərində tətbiq olunurlar, tranzistorlar, radiotexnikada elektron lampalarını əvəz edirlər, orbital aparatların xarici səthinə bərkidilmiş günəş batareyaları günəş enerjisini elektrik enerjisinə çevirib aparatın elektrik avadanlıqlarını təchiz edirlər.

Elektrokristalların xassələrinin öyrənilməsi isə kristalloqrafiya ilə birbaşa əlaqədardır. Bu səbəbdəndir ki, təqdim olunan bu kitabın birinci hissəsi «Müxtəsər kristalloqrafiya» adlandırılmış və burada kristalların yaranması, quruluşu və bu quruluşa uyğun onların simmetriya və antisimmetriya xassələri, simmetriya elementləri, simmetriya qrupları, sinifləri və s. haqqında kifayət qədər səhifə məlumat verilir. Hərçəndi fikrimizcə pyezokeramikanı öyrənmək üçün bu məlumatlar yetərlidir, lakin kristallar haqqında bu məlumatların tam dolğunluğunu iddia etmək fikrində deyilik.

Yarımkəçiricilər dəyişən cərəyanın sabit cərəyana çevrilməsində də istifadə olunurlar.

Bəzi kristallar işıq dalğalarını modullaşdırma bilirlər. Ona görə də onlardan gecəgörmə cihazlarının hazırlanmasında istifadə olunur. Bəzi kristallar isə gərginlik sahəsinə düşdükdə işıq saçırlar. Belə kristallardan isə işıq siqnalizasiya sistemlərində istifadə olunur.

Kristalların dərinədən öyrənilməsi təbii şəraitdə yaranmış kristallarla eyni kimyəvi, fiziki, optik və s. xassələrə malik olan kristalların, hətta təcrübədə oxşarı olmayan kristalların əldə edilməsinə gətirib çıxarır. Məsələn, süni rubinin, safirin, almazın əldə edilməsi buna misal ola bilər. Süni kristalların yaradılması texnologiyası isə öz növbəsində əvvəlcədən nəzərdə tutulmuş xassələrə malik kristalların yaradılması metodlarının axtarışına təkan verdi. Bu axtarışlar nəticə etibarlı ilə pyezo-

keramikanın əldə edilməsinə gətirdi. Pyezokeramika kristallik quruluşa malik müxtəlif maddələrin məqsədyönlü qarışığından, daha doğrusu sintezindən ibarət polyarlaşmış seqnetoelektriklərdən ibarətdirlər ki, onlardan da pyezoelektrik çeviricilərin hazırlanmasında istifadə olunur.

Pyezokeramikanın əsas üstünlüyü ondan istənilən konfigurasiyaya malik cihaz hissələrinin asanlıqla hazırlana bilməsindədir. Pyezokeramik mühitin anizotropluğu pyezoelektrik teksturların meydana gətirilməsi hesabına əldə edilir. Pyezoelektriklərin hazırlanmasında komponentlərin izomorfluğuna diqqət yetirməklə bir neçə komponentin müxtəlif nisbətlərdə qarışdırılması ilə lazım olan optimal xassəyə malik material əldə edilir. Pyezokeramika hidroakustikada geniş diapozonlu tezliklərdə ultrasəs dalğaların şüalandırıcılarının hazırlanmasında, defektoskopların hazırlanmasında, materialların texniki emalında və s. tətbiq olunurlar. Bu cür ultrasəs generatorları kimya sənayesində müxtəlif proseslərin sürətləndirilməsi məqsədi ilə (emulsifikatorlarda, polimerizatorlarda, stelizatorlarda və s.) istifadə olunurlar. Yarımkeçiricilər texnologiyasında yarımkeçirici lövhələrin effektiv yuyulması, yağlardan təmizlənməsi və habelə ultrasəs vannalarının hazırlanmasında geniş tətbiq olunurlar. Pyezokeramikadan kiçik qabaritli telefonlar, yüksək tezlikli ucadandanışanlar, eşitmə cihazları, silahlar üçün detonatorlar hazırlanır. Pyezorezonans süzgəclərinin, radiotexnikada ləngitmə xətlərinin, pyezotransformatorların və s. əsasında da pyezokeramika mərkəzi mövqə tutur. Pyezokeramikadan seysmik müşahidə cihazları, radioqəbuledicilər və radiovericilərin hazırlanmasında, kosmik və sualtı obyektlərin axtarışında tapılma və tanınmasında istifadə olunan cihazların hazırlanmasında geniş istifadə olunur. Onlardan müdafiə sənayesinin müxtəlif sahələrində, hətta təbabətdə süni ürəklərin qanqovma nasoslarının idarə olunmasında da istifadə olunur.

Pyezokeramik cihazlar nəmliyə, mexaniki və atmosferdə baş verən dəyişmələrin təsirinə dayanıqlı və dözümlüdürlər. Bu

sadaladıqlarımız pyezokeramikanın tətbiq və üstünlüklərinin tam siyahısından olduqca uzaqdır və müəlliflər onun tam dolğunluğuna zəmanət vermirlər.

Təəssüflə qeyd etməliyik ki, burada kristalloqrafiya və pyezokeramikanın bütün suallarını əhatə etmək mümkün deyil. Kristalloqrafiyanın öyrənilməsi öz başlanğıcını fransız abbatı P.Qayuinin 1784-cü ildəki müşahidələri əsasında kristallik sistemlərin çox kiçik «molekulyar bloklardan» təşkil olunmasının aşkarlanmasından başlasa da, özünün sürətli inkişafına və praktik tətbiqinə birinci dünya müharibəsi zamanı fransa mühəndisi Lanjevanın sualtı qayıqları tapmaq üçün ixtira etdiyi ilk cihazın uğurlu tətbiqindən başlayır. O zaman müharibənin tələbinə uyğun olaraq P.Lanjevanın ağına belə bir ideya gəldi ki, kvardan hazırlanmış lövhələri yüksək tezlikli səs dalğalarının şüalandırıcısı və qəbuledicisi kimi istifadə etmək olar. Beləliklə, P.Lanjevan ultra akustika elminin əsasını qoymuş oldu. Nəzərə alsaq ki, pyzeoeffektin ilk kəşfi də fransalı P. Kuri və J. Kuri qardaşlarına məxsusdur, onda pyezoelektrikliyin vətəninin Fransa olduğunu təsdiqləmək olar.

Kristalloqrafiyanın, seqnetoelektrikliyin və pyezoelektrikliyin öyrənilməsinə və inkişafına böyük töhfə vermiş avropalılardan U.Foqtun, Dühemin, Bravenin, Valaşekin, almanlardan R.Rechmanın, H.Straubelin, A.Sheubenin, çex V.Petrijilkanın adlarını, yaponiyalı İ.Koqanın, İngiltərədən P.Viquryenin, yenə də fransalı E.Tavelin, A.Hramonun, çinli NiTsi Zenin adlarını çəkmək olar.

Bu gün dielektriklər fizikası dedikdə əsas etibarını ilə seqnetoelektriklər və antiseqnetoelektriklər fizikası başa düşülür. Dielektriklər fizikasının müstəqil elm kimi təşəkkül tapması Sovet alimlərindən xüsusən A.F.İoffenin, İ.V. və B.V.Kurçatovların, Y.İ.Frinkelin, B.M.Vulun, A.K.Valterin, N.P.Kovekonun, Q.İ.Skanavininin, N.F.Şubnikovun, V.Z.Qinzburqun və bir çox başqalarının işləri ilə sıx bağlıdır.

Pyezoelektriklərin sənayedə tətbiqində danılmaz xidmətləri olan V.Kerapen, B.Aronov, A.F.Ulitko, B.Maksimov, O.P.Kramorov, B.Kolosov, R.Postnikov, V.Podobed, B.Belyakov, A.Xarkeviç, İ.A.Qlozman və başqalarının əməyi xüsusi qiymətləndirilməlidir.

Təəssüflə qeyd etməliyik ki, Azərbaycan Respublikasının ali təhsil ocaqlarında kristalloqrafiyanın riyazi əsasları və təbii ki, pyezokeramika tədris olunmur.Bunun nəticəsidir ki, Azərbaycanda elmin bu müasir və maraqlı sahəsinə meyl göstərən gənclər yoxdur. Elmin bu sahəsinə aid AMEA Riyaziyyat və Mexanika institunun alimləri tərəfindən 30 il bundan əvvəl yazılmış monoqrafiya (Кулиев Ю.Н.,Максудов Ф.Г.,Гаджиев В.Д.,Мотин Л.Е.-Основы колебаний однослойных и многослойных пьезокерамических преобразователей. Баку. Из-во «ЕЛМ»,1982) kifayət qədər fundamental əsərdir.Adından da görüldüyü kimi, bu kitab rus dilində monoqrafiyadır və ancaq yüksək hazırlıqlı elmi işçilər və mütəxəssislər üçün nəzərdə tutulub. Pyezokeramika özü-özlüyündə bir neçə fundamental elmlərin kəşimə nöqtəsində olduğu üçün tədqiqatçı fizika və riyaziyyatın bəzi bölmələrinə yaxından bələd olmalıdır.Kömək məqsədi ilə belə bölmələrin bir qismi kitaba daxil edilmişdir. Azərbaycan dilində kristalloqrafiyanın və pyezokeramikanın riyazi əsaslarına aid vəsaitin olmaması da bu müasir elm sahəsinin öyrənilməsi işini çətinləşdirir.Azərbaycanda kristalokimya elmində şöhrət qazanmış akademik Xudu Məmmədovun «Кристаллохимия силикатов и гидросиликатов кальция» kitabı dərin məzmunlu elmi risalədir. Kristalokimya ayrıca elm sahəsidir...

Təqdim olunan bu kitabın yazılmasında məqsəd, dediyimiz boşluğu mümkün qədər sadə məsələlərin həlli ilə doldurmaq və Azərbaycan tədqiqatçılarının diqqətini elmin bu sahəsinə cəlb etməkdir.

Kitab yeddi fəsildən ibartədir.

I fəsildə kristalların yaranması, quruluşu, xüsusiyyətləri və həndəsi kristalloqrafiya haqqında məlumat verilir.

II fəsildə seqnetoelektriklər, onun xüsusi halları olan piroelektriklər, pyezoelektriklər, elektroçitksiya, pyzeoeffekt və sairə məlumat və nəhayət pyezokeramika, onun hazırlanması, pyezokeramikanın fiziki sabitlərinin idarə oluna bilməsi haqqında məlumat verilir.

III fəsildə tenzor cəbrinin elementləri, cəbri əməllər, simmetrik və antisimmetrik tenzorlar anlayışı verilir.

IV fəsildə kristaldaxili elektromaqnit sahəsinin, qradienti, divergensiyası, rotoru operatorları və Maksvel tənlikləri müfəssəl verilmişdir. Termodinamikanın üç başlanğıcı, dönən və dönməyən proseslərdə entropiya, entalpiya haqqında bu kitabın tələblərini ödəyəcək məlumat verilir.

V fəsil təməmilə pyezokeramik kristalların pyezoelektrik, dielektrik və elastiklik xassələrinin şərhinə, pyezokeramikada mexaniki gərginliklər və uyğun deformasiyalar arasında əlaqələr, pyezokeramikanın izotermik və adiabatik maddi sabitləri arasında əlaqələrin şərhinə, habelə hal tənliklərinin çıxarılmasına, koordinat sisteminin başlanğıc ətrafında fırladılmasında maddi sabitlərin çevrilmə düsturlarının çıxarılmasına və digər məsələlərə həsr olunub.

VI fəsildə pyezoelektrik effektinin elastiklik nəzəriyyəsi və termodinamikadan Maksvell tənlikləri vasitəsi ilə öyrənilməsi məsələlərinə baxılır. Pyezoelastikliyin əsas münasibətləri təyin edilir.

VII fəsildə pyezoelastiklik nəzəriyyəsinin bəzi nəzəri təbiqlərinə aid nümunə məsələlərin həllinə baxılır.

Kitabdan aspirantlar, müvafiq ixtisas mühəndisləri və elmi işçilər faydalana bilərlər.

Müəlliflərə bu kitabın elmi redaktoru prof.E.M.Qocayeva göstərdiyi qayğıya və məsləhətlərə görə minnətdar olduqlarını bildirirlər.

İ F Ə S İ L.

§1.1. Kristallar haqqında qısa məlumat

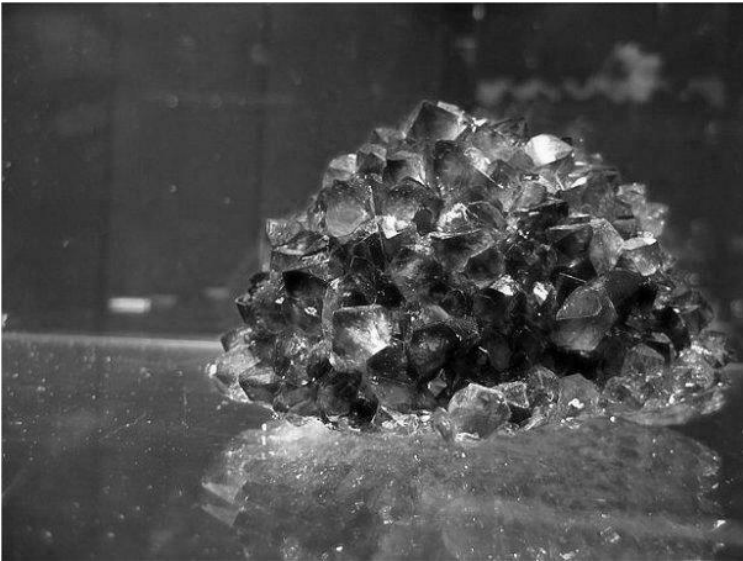
Kristal sözü yunan sözü «kristallos» sözündən götürülüb və sadəcə «buz» və ya «şəffaf buz», bəzən də «soyuqda bərkimiş» kimi tərcümə olunur. Lap qədimlərdə kristal sözünü Alp dağlarında rast gəlinən kvars (dağ billuru) parçasına aid edirdilər. O zaman belə hesab etmişlər ki, dağ billuru soyuqdan o dərəcədə bərkimiş buz parçasıdır ki, artıq ərimə qabiliyyətini itirmişdir. İlk vaxtlar kristalın əsas xassəsi kimi onun şəffaflığı ön plana çəkilirdi. Sonralar şəffaflığı ilə kristaldan geri qalmayan və əslində heç kristal quruluşa malik olmayan (şüşə amort cisimdir) şüşə icad edildi və bu kristalın əsas xüsusiyyətinin heç də onun şəffaf olması deyil, başqa xüsusiyyətlərinin də olmasının aşkarlanmasına gətirdi. Bu xassələr haqqında sonralar daha geniş söhbət açacağıq. Şüşənin şəffaflığı isə əvvəlcə onun da səhvən «kristal» cisim adlandırılmasına gətirdi. Elə ona görədir ki, hələ də xüsusi şəffaflığa malik olan şüşələrə «xrustal» deyilir.

Dağ billurunun və bir sıra başqa şəffaf mineralların diqqət çəkən xüsusiyyətlərindən biri də onların hamar müstəvi üzlərə malik olmalarıdır (şəkil 1.1.1; 1.1.2). Bu üzlərin hamar olması kristalların, onların üzərinə düşən işıq şüalarını müxtəlif istiqamətlərdə əks etdirməklə və habelə üzlər ikiüzlü bucaqlar əmələ gətirdiklərindən şüaları dispersiyaya uğratmaqla əlvan rənglərlə bərq vurması ta qədimdən insanların diqqətini cəlb etmişdir. Ona görə də insanlar özlərini və məişətlərini kristallarla bəzəmişlər. Kristal sözü zaman keçdikcə təbii hamar müstəvi üzləri olan çoxüzlü formaya malik olan bərk cisimlərə aid edildi.

Lap qədimdən alimlər təbii kristallara öz şəklini heç vaxt dəyiqməyən və təbiətin bəxş etdiyi bölünməz varlıq kimi baxırdılar.



Şekil 1.1.1. Ametist kristalı



Şekil 1.1.2. Lazurit kristalı

Eramızdan əvvəl I əsrdə yaşamış romalı Böyük Pliniy özünün «Təbii tarix» əsərində almaz kristallarının dördbucaqlı və kvars kristalının altıbucaqlı formada olmasını və bunların düzgün həndəsi formalarının təbiət tərəfindən yaradılmasını təkidlə yazırdı.

Kristallar qeyri-məhdud uzun müddət kolleksiyalarda saxlanmış və bu zaman ərzində onlarda hər hansı cüzi dəyişikliyin baş verməsi müşahidə olunmamışdır. Bu səbəbdən kristallar haqqında, üzvü aləmin hərəkət edən fərdlərindən fərqli olaraq, qeyri-üzvü aləmin bölünməz fərdləri olması təsəvvürü formalaşmışdır.

Kristalların öyrənilməsi əvvəldən mineralogiyanın tərkib hissəsi olmuş və ancaq XIX əsrin ortalarından tədricən mineralogiyadan ayrılaraq sərbəst fənn kimi təşəkkül tapmışdır.

XVII əsrin sonlarında kristallarda hamar üzlərin müəyyən simmetriya ilə yerləşməsi aşkar edildi. Daha sonralar isə müəyyən edildi ki, təbiətdəki fiziki şəffaf minerallar və hətta bir sıra qeyri-şəffaf maddələrdə də kristallar təbii, düzgün, hamar, müstəvi üzlərə malikdirlər, həm də bu üzlərin formaları hər bir ayrıca götürülmüş mineral üçün xarakterikdir. Kristallar üzərində aparılan müşahidə və araşdırmalara əsasən belə nəticəyə gəldi ki, kristalın forması onların daxili quruluşu və kimyəvi tərkibi ilə əlaqəli olmalıdır. Nəticədə təbii, hamar, müstəvi üzlərə malik olan bütün bərk maddələri kristal maddələr adlandırdılar.

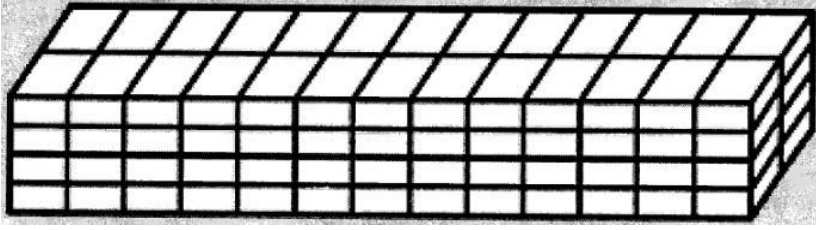
Əslində qədim zamanlarda hesab edirdilər ki, təbiətdə kristalların tapılması nadir hadisə olmalıdır. Amma bu belə deyil. Əgər biz gözümüzü optik cihazlarla silahlandıraraq baxsaq görərik ki, küllü miqdarda səpələnmiş qeyri-düzgün görünən bütün daş parçaları və digər bərk cisimlərin əksəriyyəti ayrı-ayrı tamamilə müəyyən formaya malik olan kristal dənələrindən ibarətdir.

1784-cü ildə kristalların öyrənilməsi prosesində möhtəşəm bir hadisə baş verdi. Fransada abbat (abbat dini rütbədir)

R.Qoyui kristalları qırıb müşahidə edərək bir təklif irəli sürdü. Bu təklifə görə kristalların özləri olduqca kiçik eyni formalı və ölçülü hissəciklərin bir-biri ilə müəyyən qanunla nizamlı birləşmələrindən ibarətdir. R.Qayui belə hissəcikləri «molekulyar bloklar» adlandırır. Bu kiçik «kərpicləri» hansı yolla yanba-yan və üst-üstə yığmaqla kalsi kristalının hamar müstəvi üzünü almağı göstərdi. Bundan sonra ayrı-ayrı maddələrin kristallarındakı forma müxtəlifliyini də bu «kərpiclərin» və onların birləşmə üsullarının müxtəlifliyi ilə izah etməyə başladılar. Beləliklə, R.Qayuinin bu təlimi kristalların qəfəsvari quruluşu nəzəriyyəsinin əsasını qoymuş oldu. R.Qayui öz müşahidələrində belə nəticəyə gəlmişdi ki, onun «molekulyar bloklar» adlandırdığı hissəciklər ancaq paralelopipedlər, triqonal prizmalar və tetraedrlər şəklində ola bilərlər ki, bunlar da paralelopipedlərin alınmasına gətirilə bilərlər. O, kristallarda hamar, müstəvi üzlərin əmələ gəlməsini belə izah edirdi:

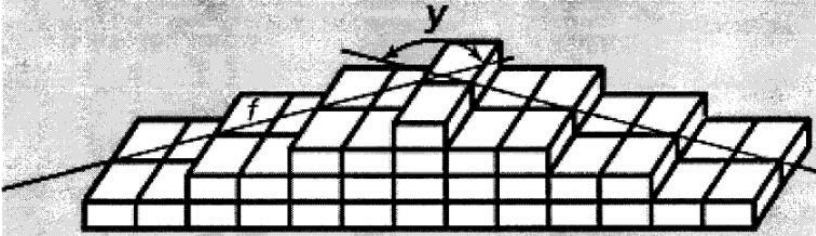
- Əgər «molekulyar bloklara» kiçik kərpiclər kimi baxsaq və onları «kərpicin» tərəflərinə paralel olmaqla eyni ədəd dəfə düzsək elə kristal alınar ki, onun forma və ölçülərinin nisbi uzunluqları eynən elementar hissəciklərdəki (kərpiclərdəki) kimi olar (şəkil 1.1.3). Qeyd edək ki, buna yaxın olan hadisə çoxlu kristal maddələr üçün xarakterikdir. Lakin kristalın az-çox ideal forması onlar normal şəraitdə, yəni onlar heç bir kənar təsirə məruz qalmadan, böyüdükdə baş verə bilir. Ancaq normal şəraitdə onlar öz simmetrik formalarını ala bilərlər. Lakin kristalın forması çox faktorlardan asılı olur. Bu faktorlar sırasına elementar kərpicin formasını, prosesin baş verdiyi şəraiti yəni temperatur, təzyiq, məhlulun konsentrasiyası, məhlulun axma istiqaməti və s. kimi faktorları daxil etmək olar. Bu səbəbdən eyni maddənin kristalları fərqli ola bilərlər. Qayui öz nəzəriyyəsinə qurarkən ancaq prosesin normal şəraitdə keçmə-sini nəzərdə tuturdu.

Qayuinin, kərpiclərini onların tərəflərinə paralel düzməklə bir divar almış olarıq (şəkil 1.1.4).



Şəkil 1.1.3.

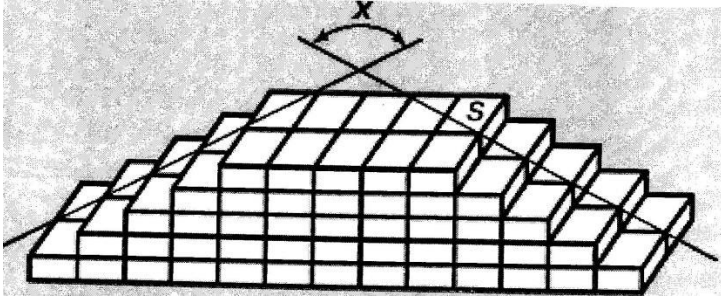
Bu divarın ölçüləri verilən istiqamətdə düzülən kərpiclərin sayından asılı olacaq. Bundan sonra həmin divardan müəyyən sıra ilə «kərpicləri» kənarlaşdırsaq kiçik pilləkən alarıq (şəkil 1.1.4).



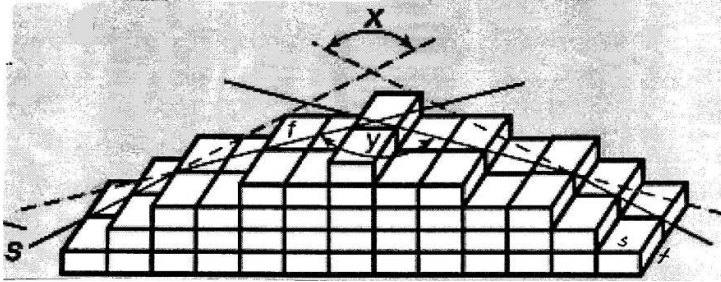
Şəkil 1.1.4.

Bu pilləkənin mailliyi hər bir pillədə «ayaqaltı» və hündürlük istiqamətində düzülən «kərpiclərin» sayından asılı olacaq. Əgər pillələrin tillərinə söykənməklə bir xətkəş qoysaq o kərpiclərin ölçüləri və yığma üsulundan asılı olan bucaq əmələ gətirir (şəkil 1.1.5). Şəkil 1.1.6-dən görüldüyü kimi x və y bucaqları kərpiclərin s və f nisbi ölçülərindən asılı olmayaraq simmetrik olur. Eynən buradakı kimi kristal da bu və ya digər forma ala bilər. Lakin maili üzlərin «kərpicləri» o dərəcədə kiçikdir ki, kristalın üzləri hamar müstəvilər kimi görünür (şəkil 1.1.7).

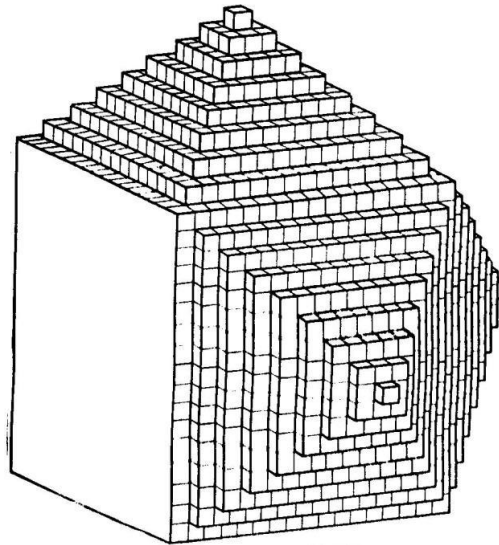
Ölçülərindən asılı olmayaraq kristalın uyğun üzləri arasındakı bucaqlar bərabər olurlar (şəkil 1.1.7).



Şəkil 1.1.5.



Şəkil 1.1.6.



Şəkil 1.1.7. Qayıyə görə kristalın qurulması

1913-cü ildə ingilis alimi Villaston (1766-1828) Qayınin təklif etdiyi paraleloipedləri kip yerləşdirilmiş kərpiclər və yaxud bu kərpiclərin mərkəzlərində yerləşmiş nöqtələrlə əvəz etməyi təklif etdi. Nəticədə kristalın quruluşu haqqında daha sadə və daha mükəmməl təsəvvür yarandı. Maraqlıdır ki, Qayuidən başlayaraq kristalların dərk olunmasına atomistik baxış kristalloqrafların düşüncələrində kimyaçıların hətta fiziklərin bunu qəbul etmələrindən əvvəl özünə yer tutmuşdur. Kimyada elmi atomistikanın yaranmasının rəsmi tarixi 1808-ci il hesab edilməlidir. Çünki, həmin il Delton (1766-1844) təsdiq etdi ki, yeni kimyəvi birləşməni əmələ gətirən iki maddə bu birləşməyə eyni çəki nisbətində daxil olurlar. Fizikada isə maddənin atomar quruluşa malik olması haqqında ilk məlumat XX əsrin əvvəlinə təsadüf edir, belə ki, bundan əvvəl atoma real varlıq kimi yox, yeni qanunauyğunluqları təyin etmək üçün işçi hipoteza kimi baxırdılar.

Kristalın həqiqi quruluşuna daha yaxın fikri Oqyust Brave [72] söyləmişdir. O, Qayınin «molekulyar bloklarını» kristalın baza elementi və yaxud elementar kristal qəfəsi ilə əvəz etmiş, onların mümkün variantlarının sayını təyin etmişdir.

§1.2. Kristallik hal

Qazları, mayeləri və bərk cisimləri əmələ gətirən atomlar müxtəlif nizamlılıq dərəcəsinə malikdirlər. Qazlarda atomlar və ya molekularda birləşmiş atom qrupları daimi xaotik hərəkət vəziyyətində olurlar. Qaz soyuduqda bu atomlar və atom qrupları mümkün qədər bir-birinə yaxınlaşırlar və nəhayət temperaturun müəyyən qiymətində bu yaxınlaşma nəticəsində qaz mayeyə çevrilir. Lakin bununla atomların bir-birinə nəzərən hərəkəti tam dayanmır və onlar hələ bir-birinə nəzərən sürüşə bilmə imkanını saxlayırlar. Soyumanın sonrakı mərhələsində temperatur elə həddə çatır ki, bu zaman atomlar və atom qrupları nisbi hərəkətsizlik (sükunət) vəziyyətinə çatırlar və nizamlı

şəkildə bir-biri ilə birləşirlər. Məsələn, adı su üçün temperaturun bu həddi 0°C -dir. Buna suyun donma (yəni kristallaşma) temperaturu deyilir. Deməli, donma temperaturu soyumanın elə həddidir ki, bu zaman maddənin atomları bir-biri ilə hər bir maddənin özünə xas olan nizamlı şəkildə birləşərək düzgün həndəsi formalar əmələ gətirirlər. Bu birləşmənin xarakterik cəhəti ondan ibarətdir ki, burada atomlar ən minimal enerji səviyyəsini, yəni ən dayanıqlı vəziyyəti seçirlər. Bu zaman kristallaşan maddənin hər bir ayrılıqda götürülmüş nöqtəsinin ətrafı maddənin istənilən başqa nöqtəsinin ətrafı ilə tam eyni olur. Başqa sözlə onu elə tamamilə müəyyən hissəciklər əhatə edirlər ki, onlar verilən hissəcikdən başqa nöqtələrdə olduğu kimi tamamilə müəyyən məsafələrdə olurlar. Bu üçölçülü yerləşmə eyni maddənin kristalları üçün xarakterik olub onları başqa bərk maddələrdən fərqləndirir.

§1.3. Kristalın yaranması

Kristalların yaranması və inkişafı əsasən üç mənbədən qaynaqlanır. Bunlar a) ərintilər, b) məhlullar və c) buxarlardır.

Əgər suya mahiyyətə ərimiş buz kimi baxsaq onda buzun özünə suyun kristallaşması kimi baxa bilərik. Başqa misal kimi maqma və vulkanik lavadan kristalın ayrılmasını göstərmək olar. Yerin təkindən lava şəklində sıxışdırılıb çıxarılmış kütlədə külli miqdarda nizamsız şəkildə paylanmış kiyməvi elementlər var. Lava soyuduqda kimyəvi elementlərin atom və ionları bir-birini cəzb edərək müxtəlif mineral kristalları şəklində birləşirlər. Bu zaman çoxlu miqdarda kristal rüşeymləri (yəni kristalın baza elementləri) yaranırlar. Alınan rüşeymlərə yeni atom və ionların birləşməsi hesabına onlar böyüyür və böyüdükcə bir-birinin böyüməsinə müqavimət göstəririlər. Ona görə də alınan kristallarda xarici, hamar, müstəvi səthlərin yaranması nadir hadisəyə çevrilir. Buna baxmayaraq onların hamısı kiçik Qayui «kərpiclərindən» yığılmış olur.

Məhlullardan kristalların yaranmasına dəniz sularından milyonlarla ton duzların ayrılmasını misal göstərmək olar. Bunun doğruluğuna inanmaq üçün evdə kiçik təcrüdə qoymaq olar. Dəniz suyu və yaxud xörək duzu məhlulunu tədricən buxarlandırdıqda məhluldakı su buxar şəklində uçub gedir və nəticədə məhlul qatılaşıb doymuş hala gəlir. Buxarlanmanı davam etdirdikdə məhlul ifrat doymuş məhlula çevrilir və nəticədə natriumun müsbət yüklü ionları ilə mənfi yüklü xlor ionları bir-birini cəzb edib birləşir və beləliklə, duz kristalının ilk rüşeymləri yaranır. Buxarlanma davam etdikcə başqa ionlar da xörək duzunun ilk rüşeymlərinə birləşərək tədricən xarakterik daxili nizamlı və hamar xarici üzlərə malik olan kristalın inkişaf edib, böyüməsinə səbəb olur.

Kristallar bilavasitə buxar və qazlardan da əmələ gəlirlər. Qazın soyuması zamanı onun atom və ya molekulları elektrik cəzbətmə qüvvəsi hesabına birləşib kristallik bərk maddə əmələ gətirirlər. Məsələn nəmli havanın soyuması nəticəsində hava ilə qarışmış su buxarından bu və ya digər formalı qar dənəcikləri əmələ gəlir.

§1.4. Kristalloqrafiya

Mineralların kristallik quruluşunu öyrənən elmə **kristalloqrafiya** deyilir və kristalloqrafiya iki yunan sözünün «kristallos» və «qrafo» - yazıram sözlərinin birləşməsindən əmələ gəlmişdir.

Son zamanların texniki tələbatı kristalloqrafiya qarşısında yeni tələblər qoyur. Ona görə də kristalloqrafiya bir nəzəri elm olmaqdan əlavə həm də vacib xalq təsərrüfatı problemlərinin həllinə kömək edir. Bu səbəbdən kristalloqrafiyanın kristalların inkişaf qanunlarını öyrənib sənayenin müxtəlif sahələrində tətbiq oluna bircəlek süni kristalların yaradılması ilə məşğul olan yeni oblastı əmələ gəlir. Hazırda bir çox ölkələrin sənaye obyektlərində kəsici alətlər, dəqiq ölçü cihazları, saatlar üçün

korand, kvant generatorları üçün almaz, kvars, optik flyuorot, Silvin, Slyuda və s. kristalları süni şəkildə hazırlaya bilirlər.

Kristalloqrafiya kursunu adətən 4 hissəyə bölüb öyrənirlər.

Bunlar:

- 1) Kristalları forma baxımından öyrənən həndəsi kristalloqrafiya;
- 2) Kristallik maddələrin daxili quruluşunu onların quruluşundan və kimyəvi tərkibindən asılı öyrənən kristallokimya;
- 3) Kristallik maddənin müxtəlif fiziki xüsusiyyətlərini onun daxili quruluşundan asılı olaraq öyrənən fiziki kristalloqrafiya və yaxud kristallofizika;
- 4) Kristalların boy artımını və həll olunma xüsusiyyətlərini öyrənən fiziki-kimyəvi kristalloqrafiya bölmələridir.

Bunlara kristalların optik xüsusiyyətlərini (ışığı keçirməsi, əks etdirməsi, sındırması, udması və s.) öyrənən kristallooptika bölməsini də əlavə etmək olar. Ancaq bu elə əslində üçüncü bölmənin tərkib hissəsi olduğundan və biz gələcəkdə ondan istifadə etməyəcəyimizə görə bu bölmə üzərində dayanmyacağıq.

Məlum ədəbiyyatlarda kristala belə tərif verilir: *Düzgün çoxüzlü formaya malik olub, elementar hissəciklərin (atomların, ionların və molekulların) qanunauyğun yerləşməsi ilə xarakterizə olunan bərk maddələrə kristallar deyilir.*

§1.5. Kristalların quruluşu

Kristalların quruluşunu öyrənməyə başlamazdan əvvəl bir həndəsi sualı cavablandırmaq. Sual belədir: *Aşağıdakı şərtləri ödəməklə verilmiş müstəvini tamamilə hansı həndəsi fiqurlarla kəsilməz örtmək olar?*

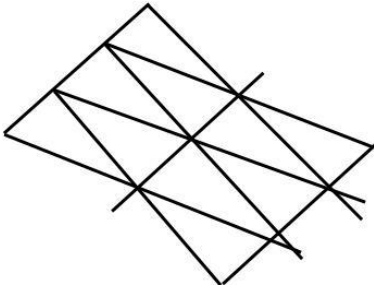
Şərtlər:

- 1) fiqurlar bir-biri ilə kəsişməsinlər;
- 2) fiqurlar düzxətli tərəflərə malik olsunlar;

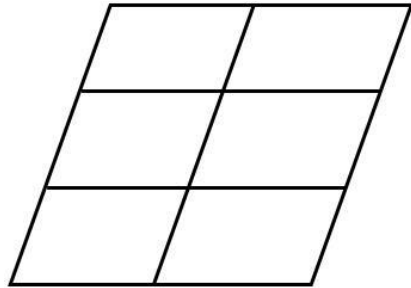
- 3) onları müstəvi üzərinə düzdükdə düzxətli tərəflər üst-üstə düşsünlər;
- 4) onların həndəsi parametrləri (tərəflərin ölçüləri və tərəflər arasındakı bucaqlar) dəyişməz qalsınlar;
- 5) bu fiqurlar elə yerləşsinlər ki, onların istənilən təpə nöqtəsinin ətrafı istənilən başqa təpənin ətrafı ilə eyni olsun.

Asanlıqla göstərmək olar ki,

- 1) müstəvini istənilən üçbucaqla paralel köçürmə və inversiya yolu ilə kəsilməz örtmək olar (şəkil 1.5.1);
- 2) müstəvini istənilən paraleloqramla (o cümlədən, rombla, kvadratla) kəsilməz örtmək olar (şəkil 1.5.2);

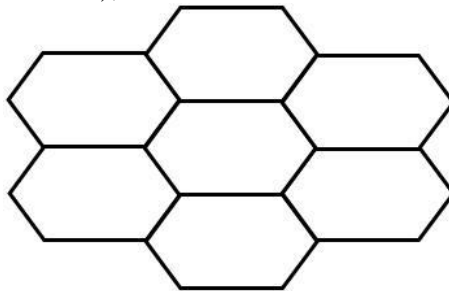


Şəkil 1.5.1.



Şəkil 1.5.2.

- 3) müstəvini istənilən bərabərtərəfli altıbucaqlı ilə kəsilməz örtmək olar (şəkil 1.5.3);



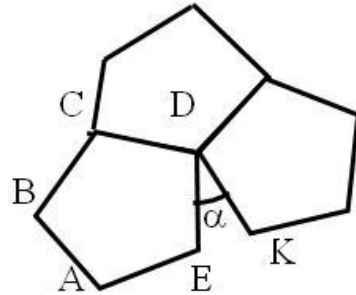
Şəkil 1.5.3.

4) müstəvini yuxarıda qoyulan şərtləri ödəməklə düzgün beşbucaqlı ilə kəsilməz örtmək mümkün deyil (bu təklif yeddibucaqlı, səkkizbucaqlı və s. fiqurlar üçün də doğrudur). Çünki düzgün beşbucaqlının tərəbucağı 108^0 -dir, onu 4d-yə tamamlayan α bucağı isə 216^0 -dən böyükdür $\alpha > 216^0$ və yaxud $\alpha = 2 \cdot 108^0 + 36^0$. Şəkil 1.5.4-dən görüldüyü kimi

$$AE = DE > EK$$

və deməli qoyulan şərt ödənmir. C nöqtəsinin ətrafı ilə D nöqtəsinin ətrafları eyni olmur.

Beləliklə, eyni qayda ilə göstərmək olar ki, müstəvini düzgün yeddibucaqlı, düzgün səkkizbucaqlı və s. ilə də kəsilməz örtmək mümkün deyil. Müstəvini göstərdiyimiz həndəsi fiqurlarla bu cür örtmə divar kağızlarının tərtibatını xatırladır, belə ki, əsas element çoxsaylı təkrarlanır.

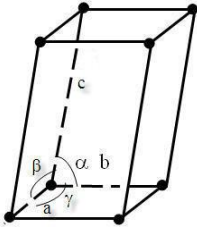


Şəkil 1.5.4.

Beləliklə, eyni nöqtələri müstəvi üzərində sonsuz təkrarlanma şərti ilə beş müxtəlif üsulla yerləşdirmək mümkündür. Fəzada isə qoyulan şərtləri ödəyən eyni nöqtələri 14 üsulla yerləşdirmək mümkündür. Bunlar fransız alimi O.Bravenin adını daşıyan fəza şəbəkələridir. O, 1848-ci ildə isbat etmişdir ki, mümkün şəbəkələrin (qəfəslərin) sayı 14-dür. Bunlar da iki hissəyə bölünür. Birinci hissədə fəzada eyni nöqtələrin nizamlı yerləşməsinin yeddi üsuluna baxılır (şəkil 1.5.5).

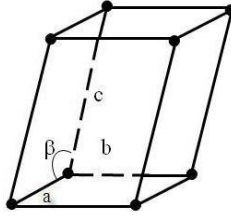
Nəzərə alındıqda ki, atom, ion və yaxud molekula qəfəsin daxilində, üzlərin mərkəzlərində yerləşə bilər, onda bu göstərdiklərimizdən başqa yeddi yeni variant da meydana çıxır, yəni fəzada eyni nöqtələrin qoyulan şərtləri ödəməklə yerləşməsinin 14 mümkün variantı olur.

a)



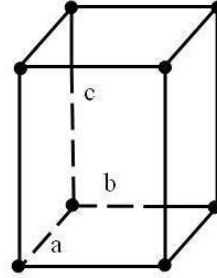
triklin

b)



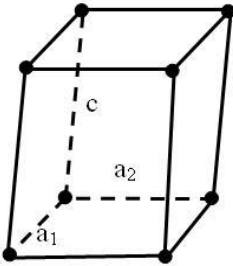
monoklin

c)



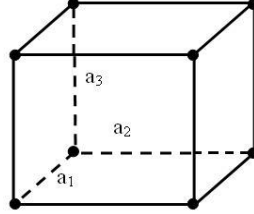
ortorombik

ç)



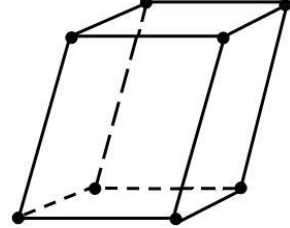
tetraqonal

d)



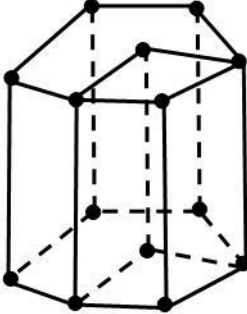
kubik

e)



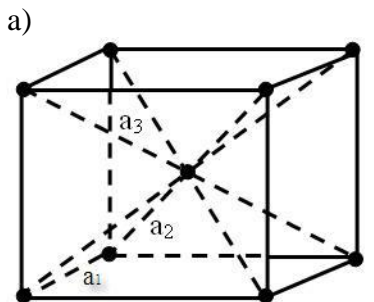
romboedrik

q)

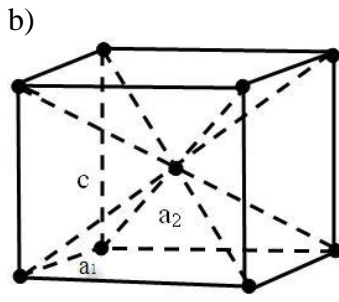


heksoqonal

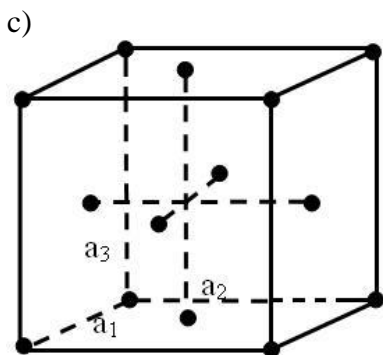
Şəkil 1.5.6.



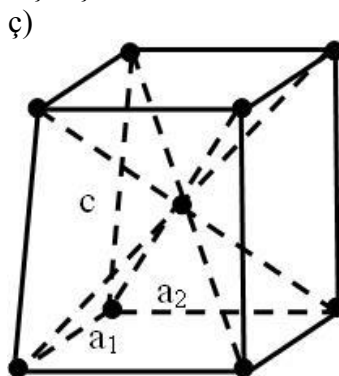
Kubik daxildə mərkəzləşmiş



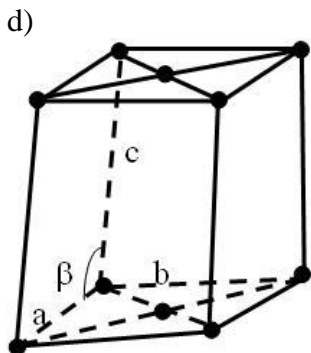
Ortorombik daxildə mərkəzləşmiş



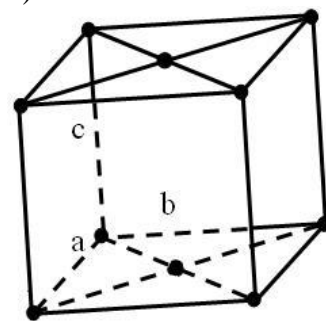
Kubik üzdə mərkəzləşmiş



tetraqonal bazomərkəzli

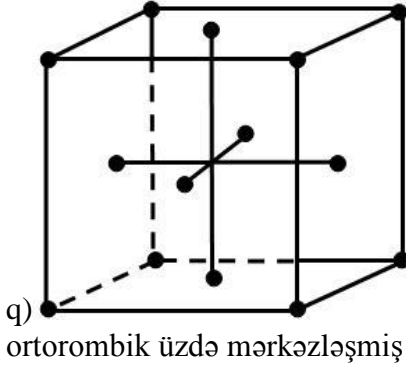


monoklin bazomərkəzli



ortorombik bazomərkəzli

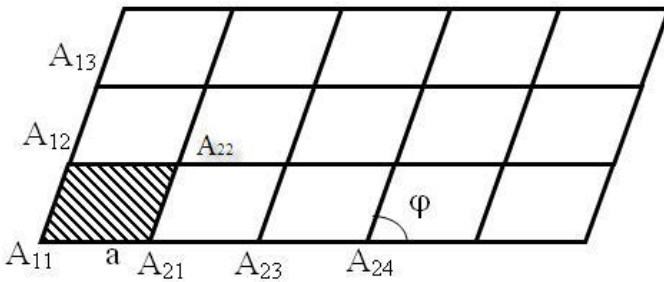
Şəkil 1.5.7.



İndi Brave qəfəslərindən kristalın necə qurulmasına baxaq. Kristalın ən kiçik hissəcikləri, onlar istər atom, istər ion, istərsə də molekul olsun fəzada qanunauyğun şəkildə yerləşərək düzgün sıralar əmələ gətirirlər. Fəzanın bu düzgün sıralı hissəciklərdən əmələ gələn hissəsi üçölçülü kristal qəfəsi adlanan bir qəfəs əmələ gətirir.

Şəkil 1.5.7.

Hər bir kristal çox böyük miqdarda maddi hissəciklərdən (atomlar, ionlar və molekulardan) ibarətdir və bu hissəciklər ciddi bir qayda ilə yerləşirlər. Bundan başqa qeyd etməliyik ki, haqqında danışdığımız hissəciklər tam sükunət halında olmayıb minimal enerji səviyyəli mövqə ətrafında (şəbəkənin qovşaq nöqtələri ətrafında, bundan sonra qəfəs əvəzində şəbəkə termini işlədəcəyik) daimi rəqs edirlər. Kristal şəbəkəsinin qurulmasını nümayiş etdirmək üçün hər hansı bir müstəvi parçasını (münasiblik xatirinə paraleloqram şəklində götürürük) seçib, onu məsələn paraleloqramlarla örtək (şəkil 1.5.8).

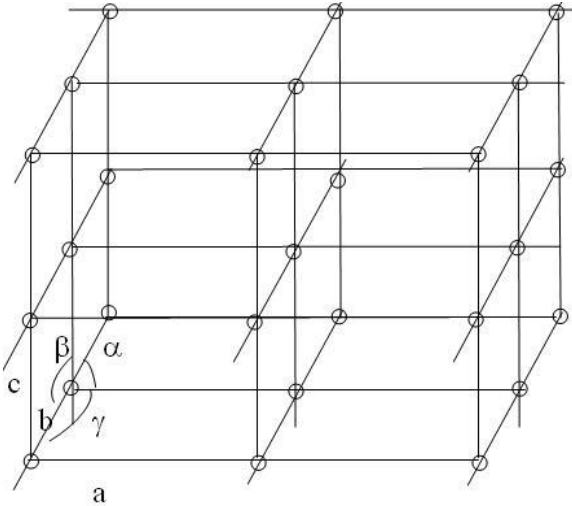


Şəkil 1.5.8.

Alınan şəbəkənin qovşaq nöqtələrini A_{ij} ($i, j=1, 2, 3, \dots$) ilə işarə edək. $A_{11}A_{12}=A_{12}A_{13}=\dots=b$ və $A_{11}A_{21}=A_{21}A_{23}=\dots=a$ deyək. Onda şəbəkənin qovşaq nöqtələrinin (hər iki istiqamətlər-

də) sıraları alınacaq. Alınmış müstəvi şəbəkənin tərəfləri arasındakı bucağa γ deyək.

Kristal şəbəkəsinin qurulmasının sonrakı mərhələsi götürdüyümüz müstəvinin xaricində baş verir. Yəni fərz edək ki, aldığımız şəbəkədən eyni ilə onun kimi olan başqa birisini fəzada əvvəlkinə paralel elə yerləşdirmişik ki, bu paralel şəbəkələrin uyğun qovşaqları arasındakı məsafə c parçasına bərabərdir. Bu zaman c parçası müstəvi şəbəkələrə perpendikulyar olduqda c parçası a və b parçaları ilə düz bucaqlar əmələ gətirir, əks halda bu bucaqlardan heç olmazsa biri iti və yaxud küt bucaq olur. Bu prosesi sonsuz təkrarlasaq nəticədə görəcəyik ki, bütün üçölçülü fəzayı elementar paralelopipedlərlə kəsilməz doldurmuşuq. Onda bu paralelopipedlərin hər birinə kristal şəbəkəsinin baza elementi (elementar paralelopiped, elementar yuvacıq) deyəcəyik (şəkil 1.5.9).



Şəkil 1.5.9. Fəza kristal şəbəkəsinin quruluşu

Bunları R.Qayui elementar bloklar adlandırmışdı. İndi isə bunlara Bravais şəbəkələri deyilir. Xörək duzu kristalında $a=b=c$ və $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$. Deməli, xörək duzu kristalı üçün Bravais

şəbəkəsi və yaxud xörək duzu kristalının baza elementi kubdur. Burada $\gamma = a \wedge b$, $\beta = c \wedge a$ və $\alpha = b \wedge c$.

Bu bucaqlardan və tərəflərdən asılı olaraq Brave şəbəkələrinin adı verilib. Əgər $a=b \neq c$ və $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$ olarsa, onda baza elementi tetraqonal prizma, $a \neq b \neq c$ və $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$ olarsa, baza elementi rombik prizma, $a \neq b \neq c$, $\alpha=\gamma=90^\circ$ və $\beta \neq 90^\circ$ olarsa, maili paralelopipeddir və nəhayət $a \neq b \neq c$ və $\alpha=\beta \neq \gamma \neq 90^\circ$ olduqda çəpbucaqlı paralelopipedlərdir.

Beləliklə, bütün kristal maddələrin əsas xüsusiyyəti onların atom, ion və ya molekulalarının qanunauyğun şəkildə nizamlı yerləşməsidir.

Rentgenoqrafik tədqiqat nəticəsində aşkar edilmişdir ki, elə bərk maddələr mövcuddurlar ki, onların hissəcikləri maye və qazlarda olduğu kimi tamamilə nizamsız şəkildə yerləşmişlər. Belə maddələrə amorf maddələr deyilir. Kristaldan fərqli olaraq onlar hər hansı bir hamar üzə və ya formaya malik olan hissəciklər olmurlar. Elə bu əlamət də onları kristallardan fərqləndirir. Yəni kristal bərk cisimlərdən fərqli olaraq amorf cisimlərdə çoxüzlülər yaranmırlar. Maraqlıdır ki, eyni bir bərk maddə bir çox hallarda özünü həm kristallıq bərk maddə, həm də amorf maddə kimi aparır. Məsələn, şəkər kristallıq maddədir. Ərimiş şəkər isə tədricən soyuduqda kristallıq şəkər, sürətlə soyuduqda isə amorf halda bərk maddə halına gəlir.

Müstəsna hallarda hissəciklər amorf maddələrdə də tədricən nizamlı vəziyyət ala bilirlər, yəni kristal şəbəkəsi yarada bilirlər. Lakin bu prosesin baş vermə müddəti şəraitdən asılı olaraq bir neçə saatdan bir neçə əsrə qədər və daha çox uzana bilər.

Kristallar əslində kristallıq maddənin quruluşunu əks etdirir. Bütün həndəsi çoxüzlülərdə olduğu kimi, təbii kristalda da məhdudiyət elementləri olaraq onların üzləri, tilləri və bucaqları nəzərdə tutulur. Məhdudiyət elementləri öz əksini Eyer düsturlarında, yəni $h + e = r + 2$ düsturundan tapılan müəyyən asılılıqla əlaqələndirilər, belə ki, burada h – üzlərin, r – tillərin və e – təpələrin sayını göstərən tam ($n, e, r \in \mathbb{N}$) ədədlərdir.

§1.6. Kristal maddənin xüsusiyyətləri

Kristallik maddə onun özü üçün xarakterik olan kristalın daxili quruluşundan asılı olan bəzi xüsusiyyətlərə malikdir. Belə xüsusiyyətlərə aşağıdakıları aid edirlər: bircinslilik, anizotropluq, öz-özünə (spontan) müstəvi şəkilli kristal üzvlərini əmələ gətirmə qabiliyyəti, kristal şəbəkənin aşınması ilə bağlı olan müəyyən fiziki xassələrə malik olma (məsələn, müəyyən ərimə temperaturu) və sairə.

Bu xüsusiyyətlərin hər biri haqqında ayrıca danışaq.

Bircinslik. Bu xüsusiyyət özünü onda göstərir ki, kristallik maddənin fəzada eyni cür səmtlənmiş və maddənin başqa başqa nöqtələrində kəsilmiş iki eyni elementar həcmilər bütün xassələrinə görə eyni olur, yəni eyni rəngə, eyni xüsusi çəkiyə, bərkliyə, istilikkeçirmə, elektrikkeçirmə və s. xassələrinə malik olurlar. Qeyd etmək lazımdır ki, kristalların tərkibində nadir hallarda onların kristal quruluşunu təhrif edən qarışıqlar və kənar müdaxilələr olmur, ona görə də real kristallarda mütləq bircinsliyə demək olar ki, rast gəlinmir.

Anizotropluq. Kristal minerallarda üç tip kristal şəbəkəsi mövcud olur:

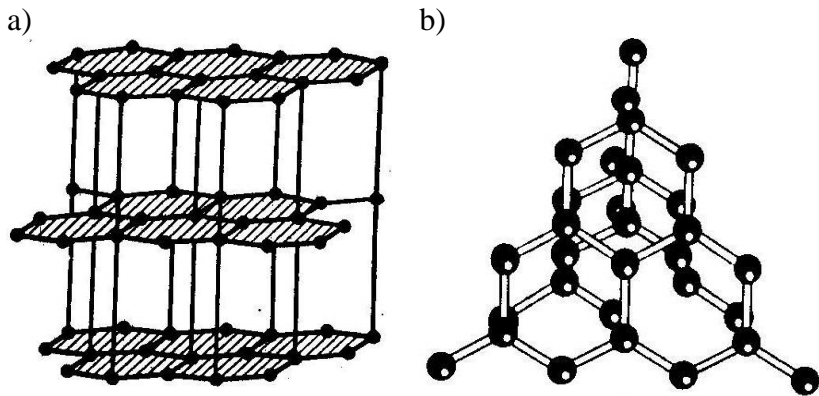
1) atomların kristal şəbəkəsi. Bu şəbəkənin qovşaqlarında atomlar yerləşirlər. Məsələn, almaz və qrafitin kristalları belədirlər (şəkil 1.6.1).

2) ionların kristal şəbəkəsi. Bu şəbəkənin qovşaqlarında ionlar mövqə tutmuş olurlar. Məsələn qalit kristalı (şəkil 1.6.2.).

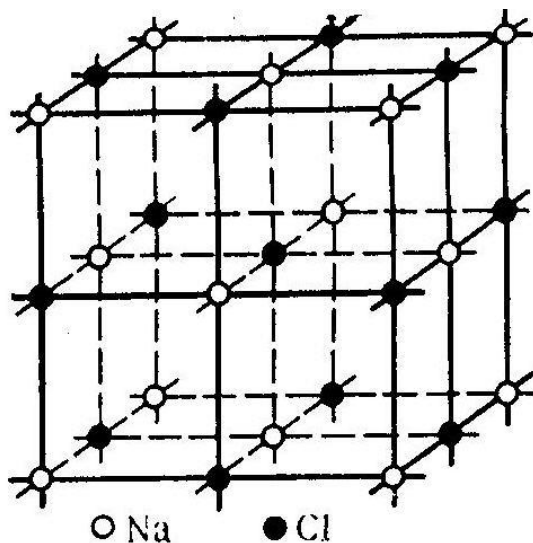
3) molekulların kristal şəbəkəsi. Bu şəbəkənin qovşaqlarında molekullar dayanırlar. Məsələn, şəkərin, aspirinin kristal şəbəkələri belədirlər.

Amorf və kristal maddələrin daxili quruluşundakı fərq onların xassələrindəki fərqdə də özünü göstərir.

Anizotropluq kristal maddələr üçün xarakterikdir (anizotropluğa vektorluluq da deyilir).



Şəkil 1.6.1. Qrafin (a) və almazın (b) kristalı



Şəkil 1.6.2. Qalitin kristal şəbəkəsi

Kristal maddələrin anizotropluğu onların periodik şəbəkəşəkilli quruluşunun nəticəsidir. Kristal maddələr elə elektrik və optik xassələrə malik ola bilərlər ki, onlar amorf maddələr üçün

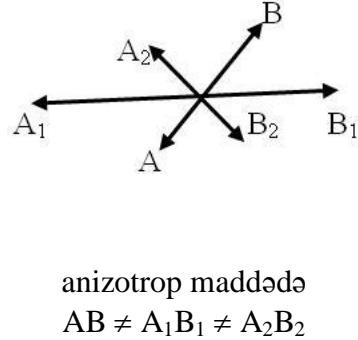
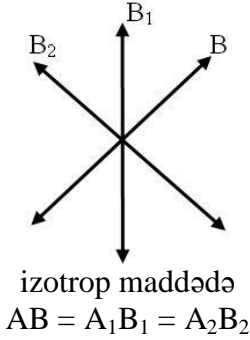
tamamilə yad xassələr olsunlar. Yəni bir sıra təbii kristallardakı pyezoelektrik, elektrooptik, piroelektrik və başqa hadisələrin baş verməsinin əsasını elə təbiət özü qoymuş olur, halbu ki, amorf dielektrlərdə bunlar ya heç olmur, ya da çox güclü xarici təsir nəticəsində baş verə bilər.

Qeyd etmək lazımdır ki, göstərilən fiziki xassələr təbii şərait üçün spesifik olmaqla kristallarda özlərini daha qabarıq şəkildə göstərir. Ona görə də onların istifadəsi maddəyə süni şəkildə verilmiş xassələrə nisbətən daha etibarlıdır. Bu səbəbdən praktikada əksər hallarda təbii və ya süni hazırlanmış piroeffekt, pyezoeffekt, elektrooptik və başqa xassələrə malik kristallardan istifadə olunur.

Kristal minerallarda fiziki xassələrin çoxu (bərklik, bitişiklik, rəng, maqnitlik, elektrikkeçirmə və s.) bir-birinə paralel istiqamətlərdə eyni, paralel olmayan istiqamətlərdə isə müxtəlifdir. Başqa sözlə desək, kristal maddələrdəki hər hansı bir xassə istənilən paralel istiqamətdə sabit olduğu halda başqa istiqamətlərdə dəyişə bilər.

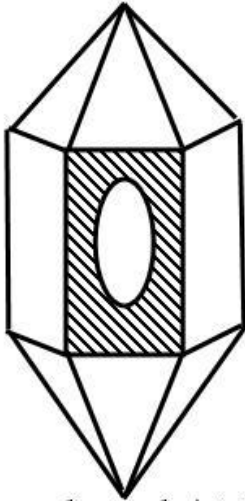
Kristal maddələrin tədqiqi zamanı belə nəticəyə gəlmək olar ki, onu əmələ gətirən hissəciklər arasındakı məsafə paralel və qeyri-paralel sıralarda müxtəlifdir. Ona görə də kristalların fiziki xassələri (məhkəmlik, kövrəklik, bərklik, istidən genişlənmə, müxtəlif dalğaları keçirmə sürəti və s.) şəbəkənin sıralarının istiqamətindən asılı olaraq özünü göstərir, yəni üfiqi sıralar istiqamətində onların qiyməti bir, şaquli sıralar istiqamətində isə başqa ola bilər.

Anizotrop maddələrdən fərqli olaraq izotrop maddələrdə fiziki xassələr bütün istiqamətlərdə eyni qiymətə malik olurlar. Bu xassələri, yəni izotropluğu və anizotropluğu xassələrini qrafik olaraq aşağıdakı kimi göstərmək olar.

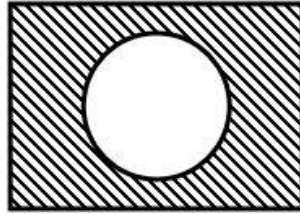


Şəkil 1.6.3.

Bəzi kristal maddələr özünü bu və ya digər xassəyə nəzərən izotrop maddə kimi apara bilər. Məsələn, baza elementi kub olan kristal maddələrdə işıq müxtəlif istiqamətlərdə eyni sürətlə yayılır. Belə maddələrə optik izotrop maddələr deyilir. Ümumiyyətlə, maddə özünü hansı xassəyə nəzərən izotrop və ya anizotrop aparırsa, ona həmin xassə baxımından izotrop və ya anizotrop maddə deyilir. Amorf cisimlərdə xassələrin paylaşılması heç bir qanunauyğunluğa malik deyil. Onlar bütün istiqamətlərdə eyni fiziki xassələrlə xarakterizə olunurlar və deməli, onlar izotrop maddələrdir. Bundan fərqli olaraq kristal maddələr bir qayda olaraq anizotropdurlar. Buna sadə bir təcrübə ilə inanmaq olar. Bir şüşə (izotrop) parçası və bir kvars kristalı (anizotrop) götürüb onlardan hərəsinin bir üzünü nazik parafin qatı qatı ilə örtək və hər hansı qızdırılmış çubuqla onlara toxunaq. Onda şüşənin səthində dairəvi, kvars kristalında isə elliplik oblast əmələ gələcək (şəkil 1.6.4). Bu isə onu göstərir ki, şüşədə (amorf maddədə) istilik bütün istiqamətlərdə eyni sürətlə kvarsda (anizotrop maddədə) isə müxtəlif istiqamətlərdə müxtəlif sürətlə yayılır.



kvars kristal



şüşə

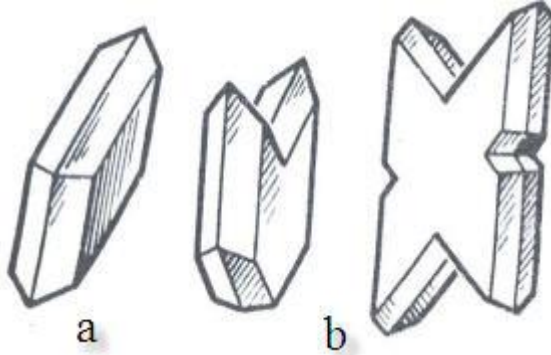
Şüşə 1.6.4.

Kristallik maddələrdə elementar hissəciklərin qanunauyğun nizamlı yerləşməsi, yəni fəza şəbəkəsinin mövcudluğu kristalların spontan üzlüləşməsinə (hamar müstəvi üzlər əmələ gətirməsinə) də zəmin yaradır.

Spontan üzlüləşmə qabiliyyəti – Sərbəst böyümə şəraitində kristalın hamar müstəvi üzlər əmələ gətirmə xassəsinə spontan (öz-özünə) üzlüləşmə xassəsi deyilir. Məsələn, xörək duzundan yonulmuş kürəciyi ifrat doymuş duz məhlulunda yerləşdirsək bir müddətdən sonra həmin kürəcik kub şəklinə düşür, lakin doymamış duz məhlulunda isə əriyib öz formasını itirir və məhlula qarışır. Əksinə şüşə kürəcik uyğun şəraitdə öz formasını dəyişmir, çünki amorf maddələr spontan üzlüləşmə, yəni çoxüzlü şəklində kristal əmələ gətirmə xassəsinə malik deyillər.

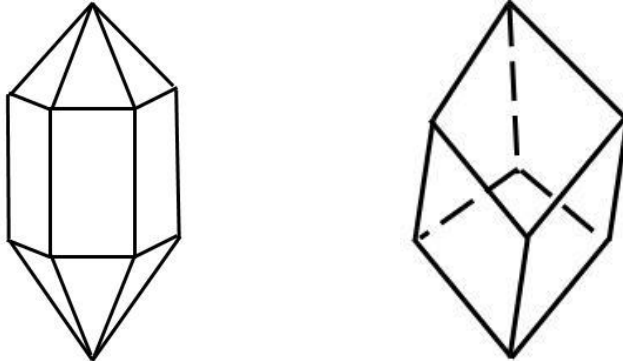
Sərbəst böyümə şəraitində çoxüzlü şəklində kristal əmələ gətirmə xassəsi ancaq kristal maddələrə xas olan xassədir. Müxtəlif mineralların kristalları da müxtəlif formalara malik olurlar və bu hər bir mineral üçün o dərəcədə xarakterikdir ki,

onların bəzilərini xarici görkəminə görə tanımaq olur. məsələn, gipsin kristalı qaranquş quyruğu kimi haça olub, bir-biri ilə bitişmiş iki eyni hissədən ibarət olur. kalsit kristalına xas olan əlamət onun romboedr olmasıdır (şəkil 1.6.5).



Şəkil 1.6.5. Cips kristalı

Dağ billurunun (kvarsın səffaf növü) kristallarının isə xarakterik cəhəti ondan ibarətdir ki, onlar altıüzlü prizma ilə dipiramidanın və ya rombedrin birləşməsindən ibarət olurlar (şəkil 1.6.6).

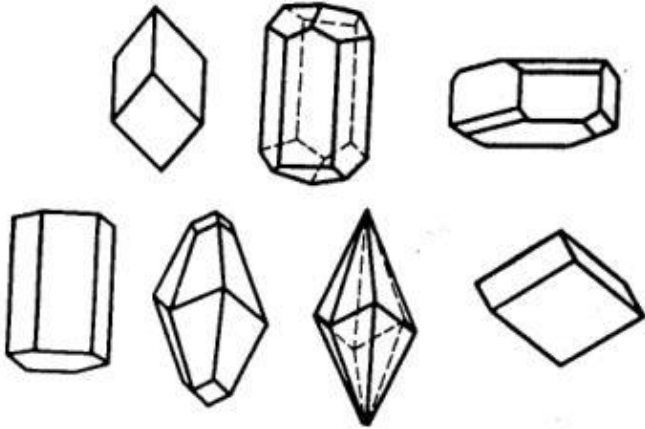


Bipiramida ilə 6-üzlü prizmanın birləşməsi şəklində kvarts kristalı

Romboedr formalı kalsit kristalı

Şəkil 1.6.6.

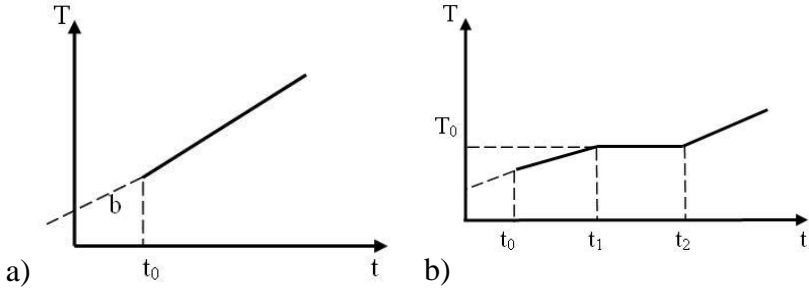
Kristallik çoxüzlülərin quruluşlarının xassə və xüsusiyyətlərinin öyrənilməsi nəticəsində aydın edilmişdir ki, bir çox minerallar müxtəlif formalarda kristallaşma qabiliyyətinə malikdirlər. Məsələn, kalsit mineralı romboedrlər, həbşəkilli və s. formalarda kristallaşa bilirlər (şəkil 1.6.7).



Şəkil 1.6.7. Müxtəlif formalı təbii kalsit kristalları

Sabit ərimə nöqtəsi – amorf maddəni qızdırdıqda onun temperaturu monoton artır və o əridikdə belə temperaturun zamandan xətti asılı olaraq artmaqda davam edir və deməli amorf maddələr üçün temperaturun zamanadan asılılıq qrafiki düz xəttidir (şəkil 1.6.8 a).

Kristal maddəni qızdırdıqda isə onun temperaturu əvvəlcə müəyyən bir T_0 qiymətinə qədər xətti qanunla artır, sonra isə bütün maddə əriyib qurtarana qədər sabit qalır və deməli, sərf olunan istilik miqdarı kristal şəbəkəsinin aşınmasına sərf olunur. Maddə əriyib amorf hala düşdükdən sonra yenə onun temperaturu xətti qanunla artır (şəkil 1.6.8 b).



Şəkil 1.6.8. Temperaturun zamandan asılılığı:
a) amorf, b) kristal maddələr üçün

$$T = \begin{cases} kt + b & t_0 \leq t \leq t_1 \text{ olduqda} \\ T_0 = \text{const} & t_1 < t < t_2 \text{ olduqda} \\ k(t - t_0) + b & t > t_2 \text{ olduqda} \end{cases}$$

Ərimə prosesinin başlanmasına uyğun olan temperatura erimə temperaturu və yaxud erimə nöqtəsi deyilir.

§1.7. Həndəsi kristalloqrafiya

Həndəsi kristalloqrafiya, ümumiyyətlə kristalloqrafiyanın, kristalların simmetriya qanunlarını, kristal maddələrin müxtəlif formalarını, kristalların birləşmələrinin müxtəlif forma və qanunlarını öyrənən bölməsidir.

Kristal öz quruluşuna görə maddənin üçölçülü fəzada kəsirlən periodik şəkildə paylanmasıdır (buna bircins diskontinium da deyilir). Kristalların isə bütün xassə və xüsusiyyətləri onların kimyəvi tərkibi və quruluşu vasitəsi ilə təyin olunur. Kristalın anizotropluğunun xarakteri də onun simmetriyası ilə müəyyən olunur, belə ki, maddənin şəbəkə quruluşu onda simmetriyanın mövcudluğunu göstərməyə əsas verir. Kristalda mövcud olan simmetriyanı bilərək, onu tədqiq etmədən demək olar ki, bütün kristalların ümumi xüsusiyyətləri və ona xas olan

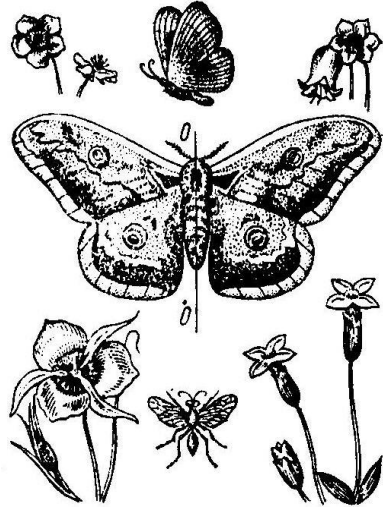
fiziki xassələri haqqında kifayət qədər dolğun və doğru fikirlər söyləmək olar.

Bəs simmetriya nədir?

Simmetriya anlayışını hər şeydən çox həndəsi obyektlərə (fiqurlara) aid edirlər. Fiquru o zaman simmetrik hesab edirlər ki, onu bir birinə nəzərən müəyyən qayda ilə yerləşmiş eyni hissələrə bölmək mümkün olsun. Başqa sözlə, müəyyən əməliyyat nəticəsində üst-üstə düşə bilən simmetrik hissələrdən ibarət olan cismə simmetrik cisim deyilir.

Simmetriya anlayışının insanlara məlum olması bəşər tarixinin çox dərinliklərinə gedir və dəqiq tarixi məlum deyil. Hər halda simmetriyanı, təbiəti müşahidə etməklə ta qədim dövrlərdə anlamışlar. Məsələn, simmetriyanı təbii varlıqlardan olan çiçəklərdə, həşəratlarda və digər canlılarda müşahidə etmişlər (şəkil 1.7.1).

Xəyalən kəpənəyi boyu uzununu bir müstəvi ilə iki yerə ayırsaq eyni ilə biri-birinin güzgüdəki əksi olan və 180° fırlatdıqda tamamilə üst-üstə düşə bilən iki bərabər hissəyə ayırmış olarıq. Eləcə də, heyvanları, çiçəkləri, hətta insanları biri o birinin güzgüdəki əksi olan iki bərabər hissəyə ayırmaq olar. Bu isə o deməkdir ki, simmetriya anlayışının tarixi qədimdir və qədim insanlar ondan memarlıq, torpaq sahələrinin bölgüsündə, məişətlərinin bəzədilməsində, heykəltaraşlıqda və s. istifadə etmişlər. Hətta simmetriyanı ilahiləşdirib onun abidəsini (heykəlini) yaratmışlar.



Şəkil 1.7.1. Canlı aləmdə simmetriyalar

Doğurdan da, görkəmli rus kristalloqrafi, sovet kristalloqafiya institutunun banisi, iki dəfə Dövlət mükafatı laureatı, Sosialist Əməyi Qəhrəmanı, akademik A.V.Şabnikov özünün 1971-ci ildə dərc etdirdiyi «У истоков кристаллографии» adlı oçerkində yazırdı: «1956-cı ildə bir qrup alimlərin Kristalloqrafiya Konqresinin işində iştirak etməsi üçün İspaniyaya ezamiyyəti zamanı akademik N.V.Belov mənim diqqətimi Madriddəki məşhur Prado şəkil qaleriyasının divar rəflərinin birində dayanan mərmərdən yonulmuş gözəl qadın heykəlinə cəlb etdi. Onun altındakı yazı göstərirdi ki, bu simmetriya ilahəsinin heykəlidir. Mənə elə gəlir ki, belə heykəlin mövcudluğu simmetriya anlayışının və bu sözün özünün çox qədim vaxtlarda, hələ simmetriya xüsusi elmin predmeti olmazdan əvvəl yaranmasının isbatına xidmət edən əlavə dəlildir. Simmetriya sözü görünür «gözəllik» sözü ilə eyniləşdirilmişdir. Simmetriyanın ilahiləşdirilməsi aydın göstərir ki, qədimdə, əslində elə indi də, o incəsənətdə böyük rol oynamışdır». Varlıların malikənələri, ictimai binaların inşasında və bəzədilməsində simmetriyadan geniş istifadə etmişlər, beləliklə, simmetriya gözəlliyin vacib tərkib hissələrindən birinə çevrilmişdir.

Fiqurun və ya cismin simmetriyasından danışarkən onun hər hansı bir obyektə nəzərən simmetriyası nəzərdə tutulur. Simmetriya hansı obyektə nəzərən təyin edilirsə, həmin həndəsi obyektə simmetriyanın elementi deyilir. Həndəsi kristalloqrafiyada üç əsas simmetriya elementinə istinad edilir. Bunlar inversiya mərkəzi, simmetriya oxu (inversiya oxu) və simmetriya müstəvisidir. Beləliklə, simmetriya elementləri, nöqtə, düz xətt və müstəvi kimi üç həndəsi obrazdan ibarətdir.

Kristallardakı simmetriyanın öyrənilməsini iki hissəyə bölürlər. Birinci hissədə nöqtəvi simmetriyaya baxılır və burada kristallara sonlu fiqur kimi baxılır. Belə fiqurun simmetrik çevrilmələrində onların ən azı bir nöqtəsi tərpənməz qalır. Belə nöqtəyə simmetriya qrupunun məxsusi nöqtəsi deyilir, simmetriya qrupunun özünə və sözügedən çevirmələrə uyğun qruplara

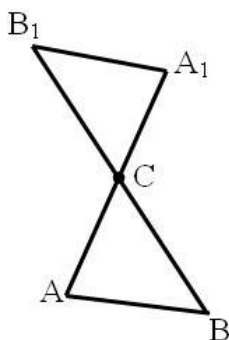
nöqtəvi qruplar deyilir. Bircinsli kəsilməz mühitin anizotropluğunu tədqiq etmək üçün kristalların nöqtəvi simmetriyasına aid təsəvvürə malik olmaq kifayətdir, amma kristallardakı polyarlaşmanın (o cümlədən spontan polyarlaşmanın) meydana gəlməsi və yoxa çıxması kimi hadisələrin tədqiqi üçün nöqtəvi simmetriya təsəvvürü kifayət deyil, bunun üçün kristalların fəza simmetriyasını bilmək zəruridir.

Simmetriya əməliyyatları arasında inversiya və eyniləşdirmə əməliyyatları üzərində xüsusi dayanmaq lazımdır. İnversiya əməliyyatı fiqurun nöqtədən əks olunmasına deyilir. Eyniləşdirmə əməliyyatı (və ya vahid əməliyyat) fiqurun elə çevrilməsinə deyilir ki, bu əməliyyat zamanı o öz yerində qalmış olsun (başqa sözlə 360^0 fırlanmış olsun). Bu çevirmə birinci tərtib simmetriya oxuna uyğun gəlir ki, belə ox bütün fiqurlar üçün mövcuddur. Ona görə də simmetriya oxunun və eləcə də, inversiya oxunun tərtibindən söhbət getdikdə bu tərtib hesaba alınmır.

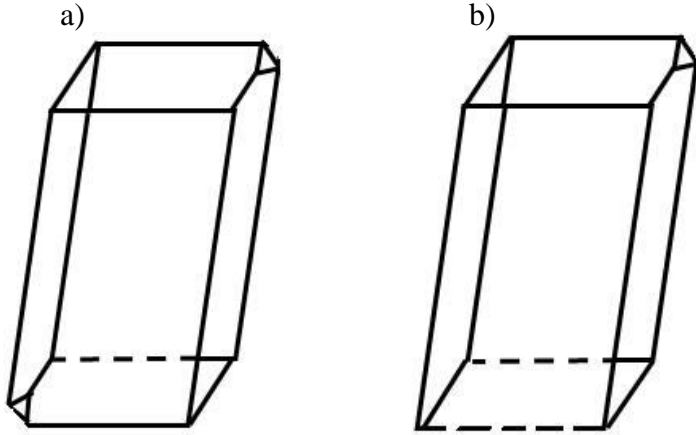
İnversiya mərkəzi fiqurun və ya çoxüzlünün daxilində yerləşən elə C nöqtəsinə deyilir ki, bu nöqtədən keçən düz xətt fiqurun bu nöqtədən müxtəlif tərəflərdə və bu nöqtədən eyni məsafədəki nöqtələrindən keçsin (şəkil 1.7.2).

Kristalın inversiya mərkəzinin olub olmamasını bilmək üçün onun modelini düzəldib hər hansı özü üzərində masa üzərinə qoymaq lazımdır.

Əgər bütün hallarda yuxarıda altdakı üzə paralel və ona bərabər üz görünərsə bu o deməkdir ki, kristalın inversiya mərkəzi mövcuddur. Yuxarıda til, təpə və yaxud altdakı üzə bərabər olub, ona paralel olmayan üz ya da altdakı üzə paralel olub ona bərabər olmayan üz görünərsə, onda kristalın inversiya mərkəzi yoxdur.



Şəkil 1.7.2.



Şəkil 1.7.3. a) *inversiya mərkəzli çoxüzlü; b) inversiya mərkəzsiz çoxüzlü*

Bəzi fiqurlarda (kristallarda) elə hissələr mövcud olur ki, onları sadəcə fırlatma əməliyyatı vasitəsi ilə özü-özü ilə üst-üstə salmaq mümkün olmur, yəni bunun üçün daha mürəkkəb əməliyyata müraciət etmək lazım gəlir. Lazım olan bu əməliyyat, məsələn, əslində iki əməliyyatın, fırlanma və güzgüdə (əslində fırlanma oxuna perpendikulyar müstəvidə) əks etdirmə əməliyyatlarının ardıcıl yerinə yetirilməsindən ibarət olur. bu halda fırlanma oxuna *inversiya oxu* deyilir.

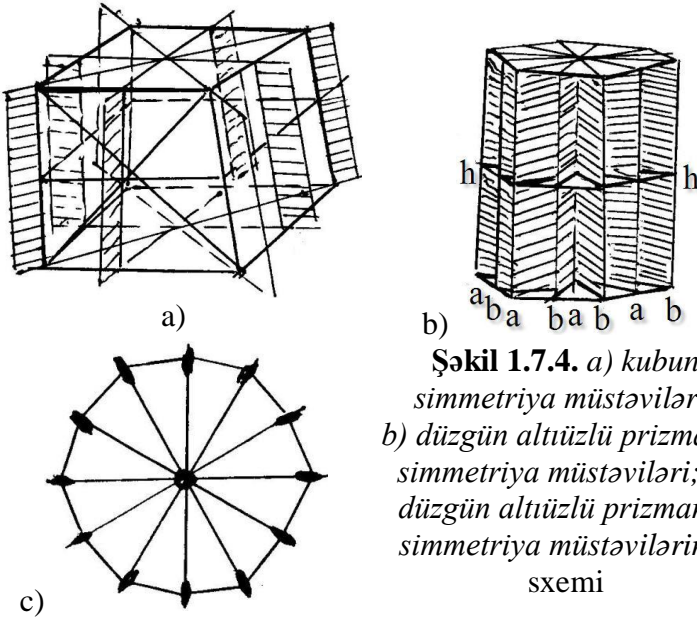
Simmetriya müstəvisi P elə təxayül olunan müstəviyə deyilir ki, o fiquru (cismi) elə iki bərabər hissəyə bölsün ki, onlardan biri o birisinin güzgüdəki əksi kimi görünsün.

Kristalın məhdudiyət elementlərinin (tillər, bucaqlar və üzlər) və başqa xassələrinin müəyyən istiqamətdə düzgün təkrarlana bilməsinə onun simmetriyası deyilir.

Kristallik çoxüzlünün simmetriya müstəvisi elə təxayül olunan müstəviyə deyilir ki, onun hər iki tərəfində və ondan eyni məsafədə kristalın eyni məhdudiyət elementləri və eyni xassələri yerləşmiş olsun.

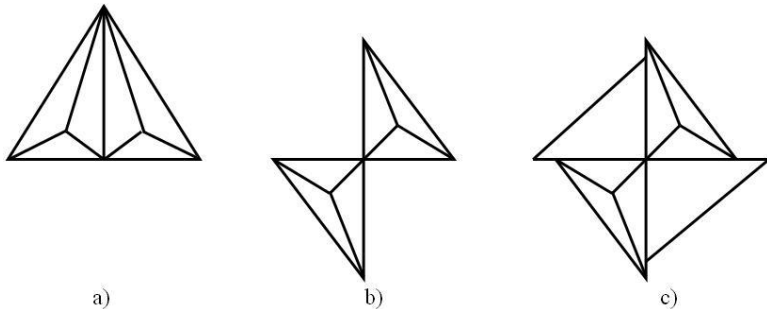
Beləliklə, simmetriya müstəvisi güzgü xassəsinə malikdir. Məsələn, kubun 9 simmetriya müstəvisi var. Bunlar onun üzbə-

üz üzlərinin ortalarından (üç müstəvi), üzbəüz tillərdən keçən (6 müstəvi) müstəvilərdir. Düzgün altıüzlü prizmanın (heksoqonal prizmanın) 7 simmetriya müstəvisi (üçü qarşılıqlı tillərdən və biri tillərin ortalarından keçməklə oxa perpendikulyar) var (şəkil 1.7.3 a, b, c).



Kristalların simmetriya müstəvilərini P ilə işarə edirlər. Əgər P-nin qarşısında əmsal varsa yəni, nP ($n \in \mathbb{N}$) şəklində yazılıbsa, onda n ədədi həmin kristalın simmetriya müstəvilərinin sayını göstərir.

Fıqurun (cismin, kristalın) simmetriya oxu elə təxayül olunan düz xəttə deyilir ki, fıquru (cismi, kristalı) onun ətrafında fırlatdıqda özü özü ilə üst-üstə düşə bilsin (şəkil 1.7.5 b).



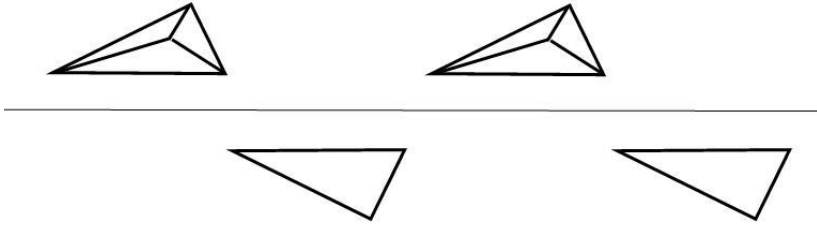
Şəkil 1.7.5. a) bir simmetriya müstəvi fiqur; b) bir simmetriya oxlu fiqur; c) bir inversiya oxu olan fiqur

Fiquru ox ətrafında 360^0 fırlatdıqda onun özü özü ilə neçə dəfə üst-üstə düşməsindən asılı olaraq simmetriya oxunun tərtibi təyin edilir. Bu o deməkdir ki, fiquru ox ətrafında 360^0 fırlatdıqda onun neçə dəfə üst-üstə düşdüyünü göstərən tam ədədə fırlanma oxunun tərtibi deyilir. Fiqurun üst-üstə düşməsi üçün tələb olunan ən kiçik fırlanma bucağına dönmənin elementar bucağı deyilir. Məsələn, fiquru 360^0 fırlatdıqda fiqur iki dəfə üst-üstə düşsə (şəkil 1.7.5. b), onda oxun tərtibi iki, elementar bucaq 180^0 -dir. Fiquru 360^0 fırlatdıqda o altı dəfə üst-üstə düşsə, onda oxun tərtibi altı, elementar bucaq isə 30^0 -dir.

Adətən kristalın simmetriya oxları onun üznlərinin ortalarından, tillərin ortalarından, qarşılıqlı təpələrdən və habelə til və onun qarşısındakı üzün ortasından keçirlər.

Qeyd etmək lazımdır ki, kristallarda ancaq, 1-ci, 2-ci, 3-cü, 4-cü və 6-cı tərtib simmetriya oxları mövcud olurlar və deməli qalan tərtibli oxlar mövcud deyillər, çünki yuxarıda da göstərdiyimiz kimi 5-ci, 7-ci və daha çox tərtiblər kristalların şəbəkə quruluşuna zidd olduqlarından mümkün olmurlar (yuxarıda düzgün beşbucaqlı ilə müstəvini kəsilməz örtməyin mümkün-süzlüyünü göstərmişik). 1-ci tərtib simmetriya oxu cismin sükunətinə, yəni heç fırlanmamasına ekvivalent olduğundan onu hesaba almırlar. Onda deyə bilərik ki, kristallarda ancaq 2-ci, 3-cü, 4-cü və 6-cı tərtib simmetriya oxları mövcuddurlar.

Kristalın inversiya oxu elə düz xəttə deyildir ki, fiqur (kristal) onun ətrafında fırlanıb, sonra isə mərkəzi nöqtədən əks olunmaqla özü-özü ilə üst-üstə düşsün (şəkil 1.7.5.c və 1.7.6).



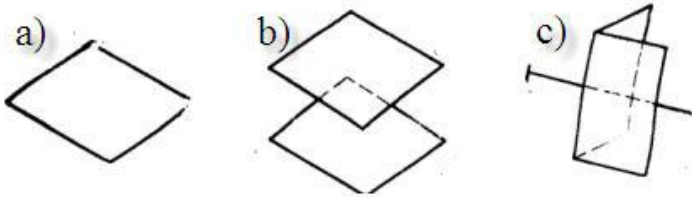
Şəkil 1.7.6.

Simmetriya oxlarını indeksdə tərtibi göstərilməklə L hərfi ilə işarə edirlər. Məsələn, üçüncü tərtib simmetriya oxu L_3 , dördüncü tərtib L_4 kimi yazılır. nL_k şəkilli yazı göstərir ki, kristalın n sayda k -tərtibli simmetriya oxu var. İncisiya oxları L_{ik} kimi işarə olunur. Burada k oxun tərtibini göstərir. Kristallar üçün adi simmetriya oxlarında olduğu kimi eyni səbəbə görə inversiya oxları da ancaq 2-ci, 3-cü, 4-cü və 6-cı tərtiblərə malik olurlar. 5-ci və ondan yuxarı tərtiblər kristalın şəbəkə quruluşuna zidd olduqlarından onlar «qadağan olunmuş» hesab olunurlar. Əslində isə kristalloqrafiyada ancaq 4-cü və 6-cı tərtib inversiya oxlarına baxılır, çünki qalan tərtibli oxlar əvvəlcə baxılmış elementlərə ekvivalentdirlər, yəni: $L_{i_1} = C$ (C ilə mərkəzi inversiya çevirməçi işarə olunur) $L_{i_2} = P$ və $L_{i_6} = L_3P$.

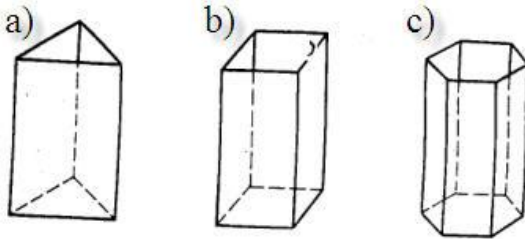
§1.8. Simmetriya qrupları

Təbiətdə mövcud olan kristallar ancaq ya sadə formalı, ya da onların kombinasiyası şəklində üzlər əmələ gətirirlər. Sadə formalara aşağıdakıları misal göstərmək olar: monoedr (bircə müstəvinin əmələ gətirdiyi fiqur); pinakoedr (iki paralel müstəvinin əmələ gətirdiyi fiqur); diedr (iki kəşişən müstəvinin əmələ gətirdiyi iki üzvlü); prizmalar (üç və daha çox üzvlü priz-

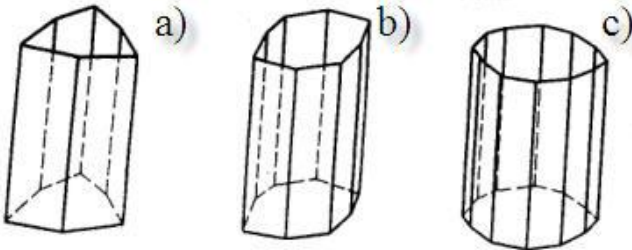
malar); piramidalar, tetraedrlər, dipiramidalar, ditetraedrlər, trapesiyaedrlər və s. (şəkil 1.8. 1-10). Sadə forma dedikdə simmetriya elementləri ilə əlaqələnmiş eyni üzlər toplusu nəzərdə tutulur. Sadə formanın üzləri öz fiziki və kimyəvi parametrləri və xassələri baxımından eyni olmalıdırlar. Normal şəraitdə inkişaf etmiş kristalda onlar öz ölçü və formalarına görə də eyni olmalıdırlar. Kristal bir neçə müxtəlif növ üzlərə malikdirsə, onda bu bir neçə sadə formanın kombinasiyası deməkdir. Kombinasiya simmetriya elementləri ilə əlaqələnmiş iki və ya daha çox sadə formaların üzlaşmasına (uyğunlaşmaqla birləşməsi) deyilir.



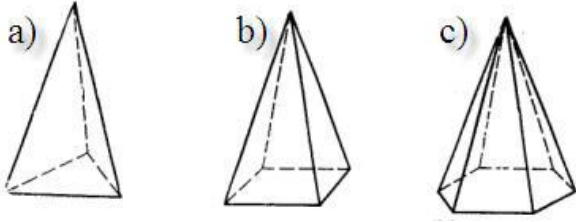
Şəkil 1.8.1. a) monoedr; b) pinakoedr; c) diedr



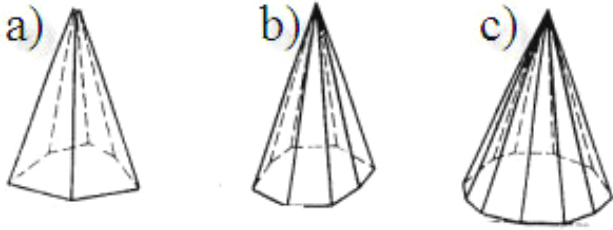
Şəkil 1.8.2. a) triqonal; b) tetraqonal; c) heksoqonal prizmalar



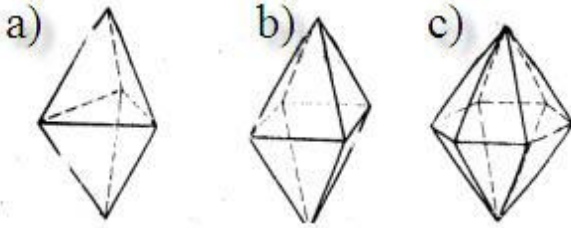
Şəkil 1.8.3. a) ditriqonal; b) ditetraqonal;
c) diheksoqonal prizmalar



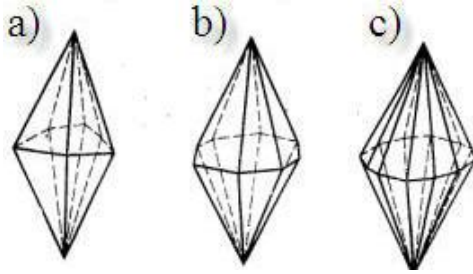
Şəkil 1.8.4. a) triqonal; b) tetraqonal;
c) heksoqonal piramidalar



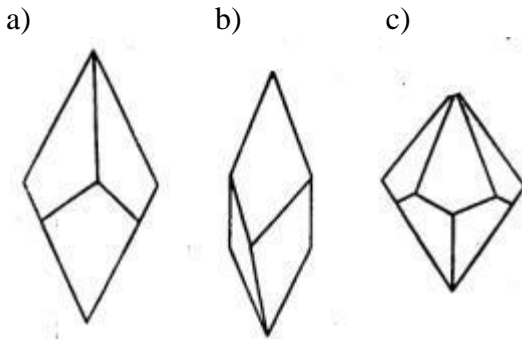
Şəkil 1.8.5. a) ditriqonal; b) ditetraqonal;
c) diheksoqonal piramidalar



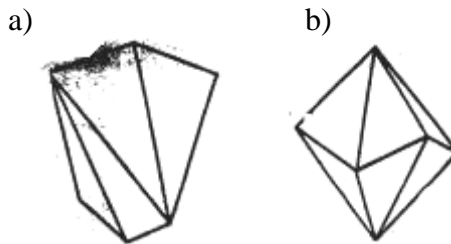
Şəkil 1.8.6. a) triqonal; b) tetraqonal; c) heksoqonal
dipiramidalar



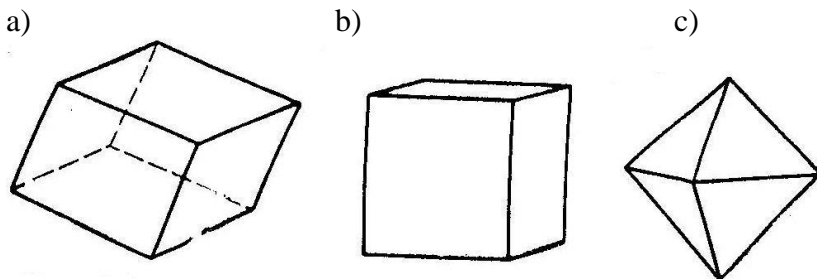
Şəkil 1.8.7. a) ditriqonal; b) ditetraqonal; c) diheksoqonal dipiramidalar



Şəkil 1.8.8. a) tetraqonal; b) triqonal; c) heksoqonal trapesoedrlər



Şəkil 1.8.9. a) tetraqonal; b) ditriqonal skalenoedrlər



Şəkil 1.8.10. a) romboedr; b) kub; c) oktaedr

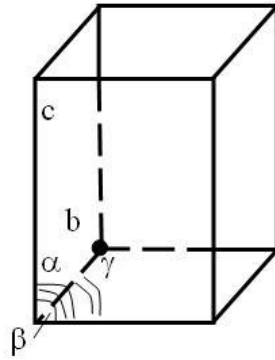
Simmetriya elementlərinin mümkün uzlaşmaları məsələsi, ümumiyyətlə simmetriyanın öyrənilməsində xüsusi tədqiqat obyektini kimi qiymətləndirməlidir. Nöqtəvi simmetriya qruplarının sayı ümumiyyətlə sonsuzdur. Bununla belə, onlardan eyni tiplərini birləşdirməklə onları sistemləşdirmək mümkündür ki, bu da xüsusi əhəmiyyət kəsb edir.

Verilmiş fiquru özü özünə çevirən əməliyyatlar toplusuna simmetriya qrupu deyilir. Məsələn şəkil 1.7.5 a)-dakı fiqur özündə iki əməliyyatı – eynilik və müstəvidə əks olunma əməliyyatlarını şəkil 1.7.5 b)-dəki fiqur da iki – eyniləşmə və inversiya əməliyyatlarını gizlədir. Eləcə də, şəkil 1.7.5 c)-dəki fiqurda da iki əməliyyat fırlanma və əks olunma əməliyyatlarını gizlədir. Beləliklə, hər üç fiqurda simmetriya əməliyyatlarının sayı ikiyə bərabərdir. Simmetriya qrupunu əmələ gətirən qeyri-ekvivalent əməliyyatların maksimal sayına qrupun tərtibi deyilir. Beləliklə, eyni sayda simmetriya əməliyyatlarına malik olan fiqurlar (kristallar) bir qrupda birləşdirilir. Fiqurun tərtibi isə öz növbəsində fiqurun bərabər hissələrinin maksimal sayına bərabərdir. Ümumiyyətlə, kristalloqrafik qrup dedikdə bu və ya digər uzlaşmada olan ancaq 1-6-cı tərtib sadə (və ya inversiya) simmetriya oxlarına malik olan kristalların simmetriyasını təsvir edən fiqurlar nəzərdə tutulur. Kristalloqrafik qrupların ümumi sayının 32 olması isbat olunub [80].

Eyni simmetriya qrupuna daxil olan kristallar toplusuna **kristalloqrafik sinif** deyilir. Deməli, hər hansı kristalloqrafik qrup uyğun kristalloqrafik sinfin tərkib hissəsidir.

Kristalı əmələ gətirən hissəciklər fəza kristal şəbəkəsini əmələ gətirirlər. Hər bir şəbəkə növü üçün onun özünə xas olan əsas paralelopiped (baza elementi) seçilə bilər, belə ki, tilləri ən kiçik transliyasiyalara bərabər olan bu paralelopipedlərdən bütövlükdə kristal şəbəkəsini inşa etmək olar. Sözügedən paralelopipedin tilləri eləcə də, bu tillər boyu yönəldilmiş oxları uyğun olaraq a , b və c ilə onlardan b və c arasındakı bucağı α , c və a arasındakı bucağı β və nəhayət a və b arasındakı bucağı γ ilə işarə edirlər (şəkil 1.8.11).

Beləliklə, hər bir elementar paralelopiped bu altı parametrin köməyi ilə xarakterizə oluna bilər. Buna uyğun olaraq istənilən kristal üçün altı müxtəlif kristalloqrafik koordinat sistemi mövcud ola bilər ki, bunlara da sinqoniyalar deyilir. Sinqoniya sözü iki latın sözləri *sin* – oxşar, *qoniya* – bucaqlılıq sözlərinin birləşməsi olub oxşarbucaqlılıq deməkdir. Belə sinqoniyaların sayı yeddidir və onları üç kateqoriyaya bölürlər:



Şəkil 1.8.11.

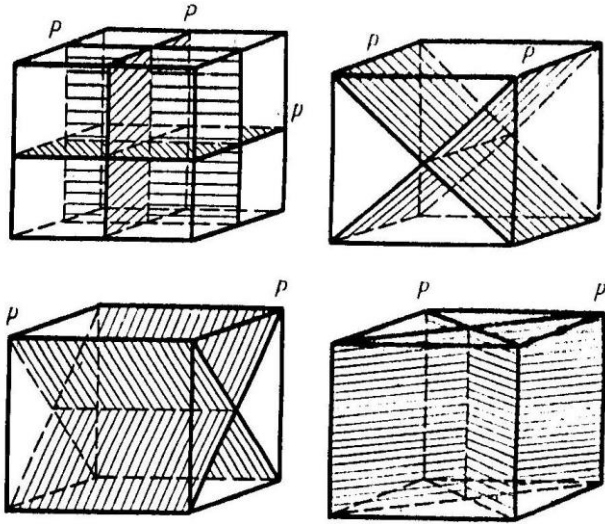
- 1) Kubik sinqoniya. Bunu ali kateqoriya adlandırırlar.
- 2) Heksoqonal, triqonal və tetraqonal sinqoniyalar. Bunlara orta kateqoriya sinqoniyaları deyilir.
- 3) Rombik, monoklin və triklin sinqoniyalar. Bunlara aşağı kateqoriya sinqoniyalar deyilir.

Bu sinqoniyaların adları aşağıdakı yunan sözlərindən yaradılıb:

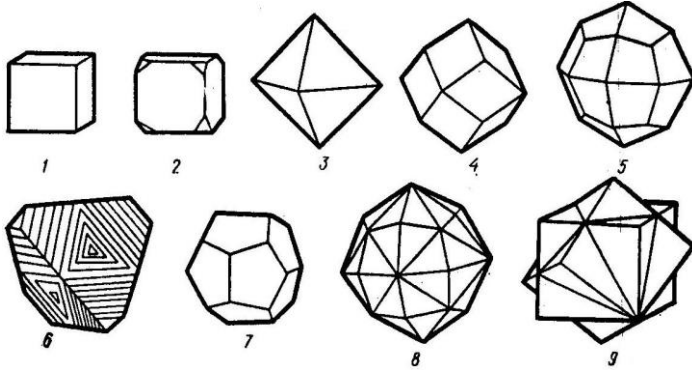
mono – bir, di – iki (iki dəfə, ikiqat) , tri – üç (üç dəfə), tetra – dörd (dörd dəfə, dördqat), penta – beş (beş dəfə, beşqat),

hekxa – altı (altı qat), okta – səkkiz, deka – on, dodeka – on iki, sinqoniya – oxşar bucaqlılıq, edra – üz, qonna – bucaq, pina – lövhə.

Ali kateqoriya sinqoniyada ən çox simmetrik olan kristallar birləşirlər. Bu sinqoniyada tərtib ikidən çox böyük olan simmetriya oxlarının sayı birdən çox olur. Kubik sinqoniya kristalları mütləq dörd üçüncü tərtibi simmetriya oxuna ($4L_3$) və bundan əlavə ya üç qarşılıqlı perpendikulyar olan dördüncü tərtib ($3L_4$), ya da üç ikinci tərtib ($3L_2$) simmetriya oxlarına malik olurlar. Beləliklə, kubik sinqoniyada simmetriya elementlərinin maksimal sayı $3L_44L_36L_29PC$ yəni 3 dənə 4-cü tərtib, 4 dənə üçüncü tərtib, 6 dənə ikinci tərtib simmetriya oxları, 9 dənə simmetriya müstəvisi və bir dənə simmetriya mərkəzi olmaqla on yeddi simmetriya elementi var. Bu qəbildən olan kristallara kub, oktaedr, tetraedr, romboedr, pentaqondodekaedr və b. şəkildə rast gəlinən kristallar misal ola bilərlər (şəkil 1.8. 12, 13).



Şəkil 1.8.12. Kubun simmetriya müstəviləri

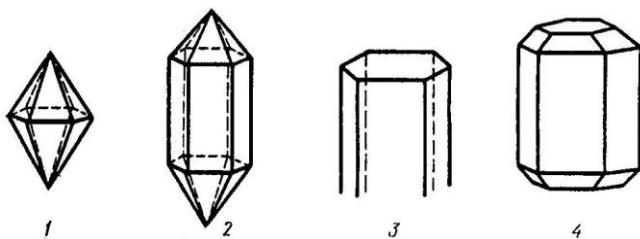


Şəkil 1.8.13. Kubik sinqoniya kristalları:

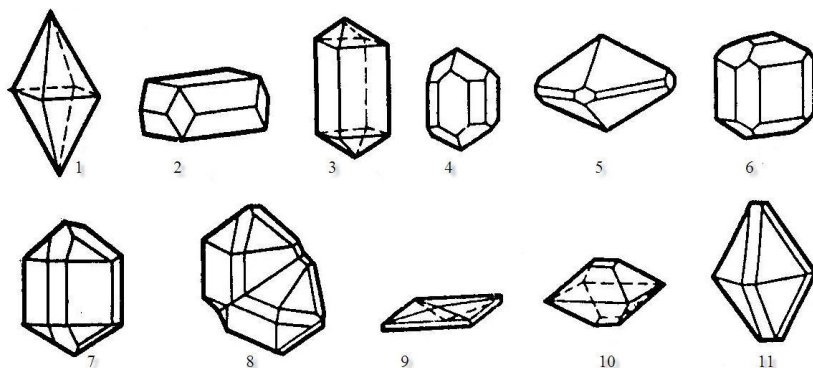
- 1 – kub, 2 – kubooktoedr, 3 – oktoedr, 4 – rombododekaedr, 5 – tettaqon-tritetraedr, 6 – kombinasiya (iki tetraedrin), 7 – pentaqon dedekaedr, 8 – heksooktaedr, 9 – iki kubun birləşməsi (əkizlər)

Orta kateqoriya sinqoniyalarda tərtibi ikidən çox olan ancaq bircə simmetriya oxuna malik olan kristalları birləşdirirlər. Orta kateqoriyaya heksoqonal, tetraqonal və triqonal sinqoniyalar aiddirlər. Bunlardan heksoqonal sinqoniya onunla xarakterizə olunur ki, onun bircə altıncı tərtib simmetriya oxu (L_6) olur. Simmetriya elementlərinin bu sinqoniya üçün maksimal sayı L_66L_27PC , yəni 1 dənə altıncı tərtib, 6 dənə ikinci tərtib simmetriya oxları, 7 dənə simmetriya müstəvisi və 1 dənə simmetriya mərkəzi olmaqla on beş simmetriya elementindən ibarətdir. Heksoqonal sinqoniya kristalları prizmalar, piramidalar, dipiramidalar (oturacaqları ilə birləşmiş iki piramida) şəklində rast gəlinirlər (şəkil 1.8. 14).

Tetraqonal sinqoniya kristalları dördüncü tərtib bir və ya ikinci tərtib 4 simmetriya oxu ilə xarakterizə olunurlar. Burada simmetriya elementlərinin maksimal sayı L_44L_25PC , yəni 11 simmetriya elementindən ibarətdir (şəkil 1.8.15).



Şəkil 1.8.14. Heksoqonal sinqoniya kristalları
 1 – tetraqotnal dipiramida; 2 – heksoqonal prizma ilə heksoqonal dipiramidanın uzlaşması; 3 – heksoqonal prizma; 4 – dipiramida ilə heksoqonal piramida və pinakoidin kombinasiyası

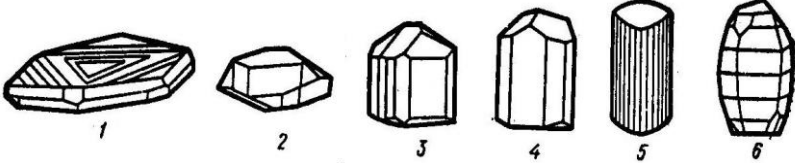


Şəkil 1.8.15. Tetroqonal sinqoniya kristalları:
 1 – tetraqonal dipiramida; 2 – anataz; 3 – tetraqonal prizma ilə tetraqonal dipiramidanın uzlaşması; 4 – dipiramida ilə iki prizmanın uzlaşması (kombinasiyası); 5 – iki prizma ilə dipiramidanın kombinasiyası; 6 – iki tetraqonal prizma ilə dipiramida və pinakoidin kombinasiyası; 7 – iki prizmanın ik dipiramida ilə kombinasiyası; 8 – kisserik akizləri; 9, 10 – vulfenik; 11 – şeelit

Sinqoniyannın kristalları qalay daşı, mis colçedanı, triskon və başqa minerallar şəklində tapılırlar.

Trigonal sinqoniya bir ədəd üçüncü tərtib simmetriya oxu ilə xarakterizə olunur. Simmetriya elementlərinin maksimal

sayı L_3L_23PC qədərdir, yəni 7 simmetriya elementindən ibarətdir. Kristallar prizma, prizma piramida, dipiramida, onların kombinasiyaları və başqa şəkillərdə olurlar. Bu sinqoniya şəklində kristallaşan minerallardan kvars, kalsit, gematit, korund və başqalarını göstərməkə olar (şəkil 1.8.16).



Şəkil 1.8.16. Triqonal sinqoniya kristalları:

1 – gematit; 2 – ilmenit; 3, 4 – turmalin;
5 – üzləri ştrixli turmalin; 6 – korund

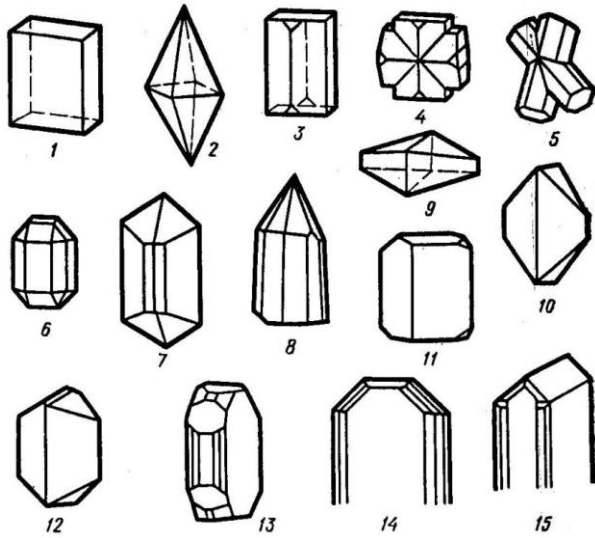
Aşağı kateqoriya sinqoniyalarında yuxarı tərtibli simmetriya oxları olmur. Lakin ancaq ikinci tərtib simmetriya oxuna malikdirlər. Yuxarıda göstərdiyimiz kimi bu kateqoriyaya rombik, monoklin və triklin sinqoniyalar daxildirlər.

Rombik sinqoniya bir neçə ikinci tərtib simmetriya oxuna ya da bir neçə simmetriya müstəvisinə malikdir.

Kristalların xarakterik formaları: rombik tetraedr (şəkil 1.8.17 2) rombik prizma (kəsiyi romb) və rombik dipiramida şəklindədirlər (şəkil 1.8. 17).

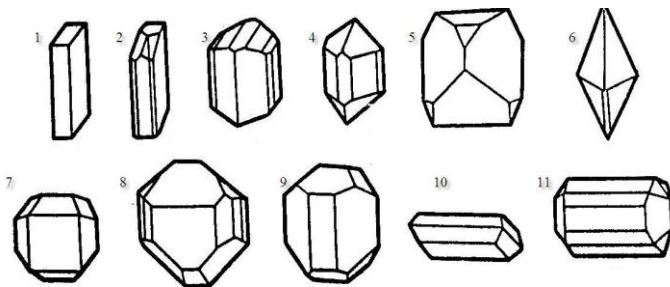
Bu sinqoniyanın simmetriya elementlərinin maksimal sayı $3L_23PC$ qədər, yəni 7 dənə ola bilər. Bu kristallar barit, topaz, markazit, antimonit və b. minerallar şəklində tapılırlar.

Monoklin sinqoniyaların kristalları ya 1 ikinci tərtib simmetriya oxa (L_2), ya 1 simmetriya müstəvisi (P), ya da maksimal L_2PC sayda simmetriya elementləri ilə xarakterizə olunurlar. Kristalların formaları rombik prizma və pinokoidlə monodrin kəsişməsi şəklində olurlar. Monoklin sinqoniyanın xarakterik mineralları: gips, piroksen və başqalarıdır (şəkil 1.8.18).



Şəkil 1.8.17. Rombik sinqoniya kristalları:

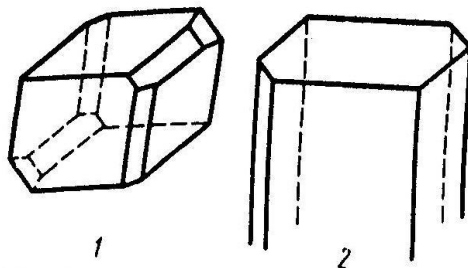
1 – rombik prizma; 2 – rombik dipiramida; 3 – stavrolit kristalı; 4, 5 – stovrolitin xaçvari əkizlər şəklində bitişməsi; 6 – prizma, dipiramida və pinakoidin kombinasiyası; 7 – iki prizma ilə dipiramidanın kombinasiyası; 8 – topaz kristalı; 9, 10 – arsenopirat kristalı; 11, 12 – andaluzit kristalı; 13, 14 – kolumbit-tantalit kristalı; 15 – samarskit kristalı



Şəkil 1.8.18. Monoklin sinqoniya kristalları:

1 – üç pinokoidin kombinasiyası; 2, 4 – piroksen kristalları; 3 – prizma ilə pinokoidin kombinasiyası; 5, 6 – sfen kristalları; 7, 8 – monasit kristalı; 9 – volframit kristalı; 10, 11 – epidot kristalları

Triklin sinqoniyalara ən az simmetrik kristallar daxil olurlar. Onlar ancaq bir cə simmetriya mərkəzinə malik olurlar. Bu sinqoniyanın xarakterik kristal pino-koidlə monoedrlərin kombinasiyasıdır (şəkil 1.18.19).



Şəkil 1.8.19. Triklin sinqoniya kristalları:

1 – akzinit; 2 - kianit

Sinqoniyaların əsas xarakteristikaları aşağıdakı cədvəldə verilir.

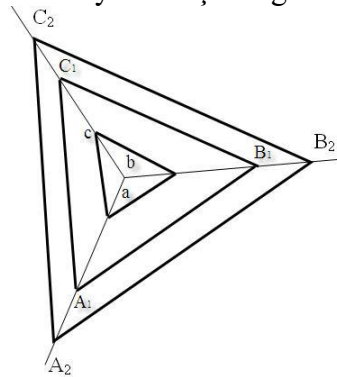
Kateqoriya	Sinqoniya	Vahid istiqamətlərin sayı	Simmetriyanın xarakterik istiqamətləri	Sinqoniyanın elementar paralelepipedinin parametrləri	Simmetriya elementlərinin uzlaşmaları
aşağı	Triqonal	hamısı	C	$a=b \neq c$ $\alpha=\beta=90^0$ $\gamma=120^0$	C
	Monoklin	çoxluq	P_1L_2 L_2PC	$a \neq b \neq c$ $\alpha=\gamma=90^0$ $\beta \neq 90^0$	P, L_2 L_2PC
	Rombik	üç	L_22P3L_2 $3L_23PC$	$a \neq b \neq c$ $\alpha=\beta=\gamma=90^0$	L_22P ; $3L_2$, $3L_23PC$
orta	Triqonal	bir	L_3	$a=b=c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma$	L_3 , L_3C , L_33P L_32L_2 L_33L_23PC
	Tetraqonal	bir	L_4 yaxud L_{i4}	$a=b \neq c$ $\alpha=\beta=\gamma=90^0$	L_4 , L_4PC , L_44P ; L_44L_25PC
	Heksoqonal	bir	L_6 yaxud L_{i6}	$a=b \neq c$ $\alpha=\beta=90^0$ $\gamma \neq 90^0$	L_6 ; L_6PC , L_66L_2 , L_66L_27PC $L_{i6}=L_{i3}P$; $L_{i6}3L_23P=L_33L_24P$
ali	Kubik	yoxdur	$4L_3$	$a=b=c$ $\alpha=\beta=\gamma=90^0$	$4L_33L_23PC$; $4L_33L_2(3L_{i4})6P$ $3L_44L_36L_2$, $3L_44L_36L_29PC$

§1.9. Həndəsi kristalloqrafiyanın qanunları

Bir birlərindən asılı olmayaraq Steno (1638-1687), M.V.Lomonosov (1711-1765) və Rome de Lil (1736-1790) tapmışlar ki, eyni şəraitdə eyni maddənin bütün kristallarının üzləri və tilləri arasındakı bucaqlar həmişə sabitdirlər. Buna bucaqların sabitliyi qanunu deyilir. Eyni maddənin kristalları görkəminə görə bir-birindən fərqli ola bilərlər, lakin buna baxmayaraq onlarda uyğun üzlərin və tillərin aralarındakı bucaqlar bütün kristallarda eyni olub verilən maddə üçün sabit kəmiyyətdir. Kristalların hansı maddəyə aid olmasını bilmək üçün bu əlamətdən istifadə edirlər. Kristalların üzləri və tilləri arasındakı bucaqları ölçmək üçün qoniometr (bucaqölçən) adlı cihazdan istifadə olunur. Bucaqların sabitliyi qanununa Steno qanunu da deyilir.

Kristalloqrafik koordinat sisteminin təyini elə vahid üz adlanan kəsiyin yəni kristal şəbəkəsinin baza paralelopipedinin diaqonal kəsiyinin təyininə gətirir. Bunu şərh etmək üçün əsas paralelopipedin bir tərəfdən çıxan üç tərəfini koordinat oxları qəbul edib onların üzərindəki ən kiçik translyasiyaları (paralelopipedin tərəflərini uyğun) olaraq a , b və c ilə işarə edək. Onda əsas paralelopipedin diaqonal kəsiyi abc üçbucağı olar.

Bu üçbucağın müstəvisinə paralel $A_1B_1C_1$ müstəvisini keçirək. O koordinat oxlarını A_1 , B_1 və C_1 nöqtələrində kəsəcək. Bu müstəvini həmişə elə vəziyyətə gətirmək olar ki, n_1 , n_2 və n_3 ədədləri tam ədədlər olmaqla



$$OA_1=n_1a, OB_1=n_2b, OC_1=n_3c \quad (1.9.1.)$$

bərabərlikləri doğru olsun.

Eyni qayda ilə $A_2B_2C_2$ müstəvisini də elə keçirmək olar ki, m_1, m_2, m_3 ədədləri tam ədədlər olmaqla

$OA_2=m_1OA_1, OB_2=m_2OB_1, OC_2=m_3OC_1$ (1.9.2)
bərabərlikləri doğru olsun. İndi də parametrlərin ikiqat nisbətinə baxaq:

(1.9.1) və (1.9.2) bərabərliklərindən alırıq:

$$OA_2=m_1n_1a, OB_2=m_2n_2b, OC_2=m_3n_3c \quad (1.9.3)$$

Buradan da alırıq:

$$\begin{aligned} \frac{OA_2}{OA_1} : \frac{OB_2}{OB_1} : \frac{OC_2}{OC_1} &= \\ &= \frac{m_1n_1a}{n_1a} : \frac{m_2n_2b}{n_2b} : \frac{m_3n_3c}{n_3c} = m_1 : m_2 : m_3 \end{aligned} \quad (1.9.4)$$

Yəni üç tam ədədin ikiqat nisbətini aldığımız. Buna tam ədədlər nisbəti qanunu və yaxud ikiqat rəşional nisbətələr qanunu deyilir. Başqa sözlə, kristalın istənilən iki uzununun kəşşən üç tilləri üzərində ayırdığı parçaların ikiqat nisbətləri nisbətən ən kiçik olan üç tam ədədin ikiqat nisbətləri kimidir.

Bu qanuna əsasən kristalın istənilən uzunun fəzadakı vəziyyətini təyin etmək olar. Kristalloqrafiyada $m_1=h, m_2=k$ və $m_3=l$ kimi işarə etmək qəbul olunub. Bu parametrləri mötərizədə belə yazırlar (hkl) və buna kəşiyin simvolu deyilir. Məsələn, vahid üzə (baza elementinin diaqonal kəşiyinə) $(1\ 1\ 1)$ simvolu qarşı qoyulur. Kristalloqrafik oxlardan birinə paralel olan üzə isə (0) simvolunu qarşı qoyurlar.

Əgər üz kristalloqrafik üzlərdən hansınasa paraleldirsə, deməli onun oxu kəşiyi nöqtə sonsuzluqdadır. Məsələn, üz a tərəfinə paraleldirsə, onda onun OA_1 tərəfi sonsuz uzundur və uyğun nisbətənin məxrəcində ∞ olduğundan o nisbət sıfıra bərabər olur. Tutaq ki, ABC müstəvisi a və c oxlarına paraleldir. Onda alırıq:

$$\frac{OA_1}{OA_x} : \frac{OB_1}{\infty} : \frac{OC_1}{\infty} = h : 0 : 0 \quad (1.9.5)$$

Bunun hər tərəfini h-a bölməklə indekslərin nisbətini 1:0:0 şəklində alırıq. Deməli, sözügedən üzün simvolu (100 olacaq).

Deyilənlərdən aydın olur ki, parametrlərin ikiqat nisbəti ancaq retikulyar sıxlığa malik olan üzlər üçün çox böyük ola bilər ki, bu da Bragg qanununa görə kristallarda mövcud olmurlar (üzün retikulyar sıxlığı dedikdə onun vahid səthinə düşən qovşaqların sayı nəzərdə tutulur).

Bragg qanununa görə kristallar ancaq böyük retikulyar sıxlığa malik üzlərlə örtülür.

Beləliklə, parametrlərin ikiqat nisbətləri kiçik tam ədədlərlə ifadə olunurlar.

§1.10. Kristallokimyanın bəzi elementləri

1⁰. Kristallokimya kristalların daxili quruluşunu, onun kimyəvi tərkibini, kristalları əmələ gətirən hissəciklər arasında ki əlaqələri və bu əlaqələrin mövlərini və s. öyrənir. Belə ki, kristallik maddənin daxili quruluşu nəticə etibarilə onun bütün xüsusiyyətlərində, kristalın formasında və digər fiziki və kimyəvi xassələrində öz əksini tapır. Kristallokimyanın qarşısında duran əsas məqsəd mineralların quruluşunu öyrənməklə və kimya qanunlarına istinad etməklə əvvəlcədən məlum xassələrə malik, elmin və sənayenin yeni tələblərini ödəyəcək yeni kristalları sintez etməkdir.

2⁰. Kristalı təşkil edən hissəciklər arasında kimyəvi əlaqələr və onların tipləri:

Əvvəllər qeyd etmişdir ki, kristalı əmələ gətirən hissəciklər (atomlar, ionlar, molekullar) fəzada ciddi bir qanunauyğunluqla yerləşirlər. Onda belə təbii sual meydana çıxır ki, bu hissəcikləri fəzada deyilən vəziyyətdə qalmağa hansı qüvvə və ya hansı səbəb vardır edir? Bu hissəciklər arasında hansı rabitələr mövcuddur?

Bu rabitələri bir neçə tipə ayıraraq öyrənmək olar. Sözügedən tiplərin növləri də öz növbəsində kristal şəbəkəsinin qovşaqlarında hansı hissəciklərin, ionların, atomların və yaxud molekulların yerləşməsindən asılı olur. Buna uyğun olaraq rabitələrin adları ion rabitəsi, atom rabitəsi və molekulyar rabitə kimi səsləndirilir.

İon (və ya qeteropolyar) rabitə tipi qovşaqlarında ionlar yerləşmiş kristallarda müşahidə olunurlar, daha doğrusu qovşaqlardakı iki müxtəlif yüklü ionlar arasında mövcud olur. Bu ionlar arasındakı elektrostatik cəzətmə və itələmə qüvvələri ionları bir-birindən müəyyən məsafədə saxlayırlar. Bu rabitə tipi ən sadə rabitə tipi hesab edilir və ən çox qeyri-üzvü birləşmələrə xas olur. Buna misal olaraq nitratları, karbonatları, sulfatları və başqalarını göstərmək olar. İon rabitəsi tez dissosiasiya olunan, yəni ayrılan rabitələrdəndir. Bu o deməkdir ki, ion rabitəli kristallar tez həll olunur və buxarlanırlar. Belə rabitəli kristallar yaxşı dielektriklərdirlər, məs. NaCl.

Kovalent (və ya homopolyar) rabitə tipi qovşaqlarında atomlar, qismən də ionlar yerləşən kristallarda müşahidə olunurlar. Burada hissəciklər qonşu atomlarla ortaq ionların meydana gəlməsi hesabına əlaqələnilirlər, belə ki, iki atom və ya ion onlarda ümumi elektron təbəqəsinin əmələ gəlməsi səbəbindən bir-birini cəzə edirlər və olduqca möhkəm rabitə yaradırlar ki, bu da minerallarda kamilləşmiş möhkəmliyin əmələ gəlməsinə səbəb olur. Kovalent rabitəyə malik kristal maddələr yaxşı izolyatorlardırlar.

Metallrabitə. Bu rabitə növü ancaq kristal şəbəkəsinin qovşaqlarında atomlar yerləşən kristallarda olurlar və onunla xarakterizə olunurlar ki, kristal şəbəkəsinin qovşaqlarında atomların nüvələri yerləşirlər və bu nüvələr sanki sərbəst elektronlardan yaranmış qaz hissəcikləri daxilində yerləşmiş olurlar. Kristal şəbəkəsinin hər bir atomu öz elektronunu verir və beləliklə, müsbət yüklü iona çevrilir, verilmiş hər hansı bir atomla birləşmədə «elektron qazı» şəklində ortaq vəziyyətdə

qalır. Müsbət yüklü ionlarla mənfi yüklü sərbəst elektronlar cəzətmə qüvvəsi, eyni yüklü hissəciklər arasındakı itələmə qüvvəsini tarazlaşdırır. Bunun nəticəsində kifayət qədər möhkəm struktur yaranır və bu strukturda elektronların sərbəst yerdəyişməsi bu struktur üçün səciyyəvi olan bir sıra xassələri müəyyən edir. Buna yaxşı elektrik və istilik keçirmə, metal parlaqlığı, döyülə bilmə və s. kimi xassələri misal göstərmək olar. Belə rabitəyə külçə metallar (mis, qızıl, gümüş və s.) misal ola bilər. Yuxarıda adlarını çəkdiyimiz rabitələrin siyahısını tamamlamaq üçün qalıq rabitə adlanan bir rabitə növü haqqında da danışaq.

Qalıq rabitə molekulyar kristal şəbəkəsində iki molekula arasında rabitə qalıq qüvvə (yaxud Van-der-Vals qüvvəsi) adlanan qüvvə hesabına əmələ gəlir. Baxmayaraq ki, belə şəbəkələrdə molekullar elektrostatika baxımından neytraldırlar və onlardakı bütün yüklər tarazlaşıblar, molekulların bir çoxu dipol halında olurlar. Bu o deməkdir ki, molekuldakı müsbət yüklərin ağırlıq mərkəzi ilə bütün mənfi yüklərin ağırlıq mərkəzi üst-üstə düşürlər. Bu cür dipolun yaranması nəticəsində eyni molekulun ayrı-ayrı hissələri müəyyən yük əldə edirlər. Lakin molekulun özü müxtəlif yüklər bir-birini tarazlaşdırdıqlarından neytral qalır. Lakin bu zaman dipolun yaranması nəticəsində iki molekulun müxtəlif hissələri müxtəlif yükləndiklərindən qalıq rabitə yaranır. Təbii ki, bu rabitə qüvvəsi çox kiçikdir, ona görə də belə rabitə möhkəm deyil. Bu səbəbdən hətta çox kiçik xarici təsir belə maddələrə dağıdıcı təsir göstərir. Bəzi maddələrin kövrəkliyi və asan buxarlanması da bununla izah olunur. Molekulyar rabitə növü ən çox üzvü maddələr üçün xarakterikdir. Deyilənlərdən belə çıxır ki, rabitənin xarakteri kristal maddənin bütün əsas xüsusiyyətlərini müəyyən edir.

Onu da deməliyik ki, təbiətdə rast gəlinən kristalların əksəriyyətində bir yox, bir neçə rabitə növü müşahidə olunur. Məsələn, qrafit üçün atomlar arasında kovalent və laylar

arasında qalıq rabitənin olması xarakterik haldır. Peritdə (FeS_2) kükürdün iki ionu bir-biri ilə kovalent, kükürd ionu ilə dəmir arasında ionlu kovalent rabitə mövcuddur.

İon radiusu. Kristalların xassələrini müəyyən edən xüsusilə onlarda baş verən polyarlaşma xüsusiyyətinə işıq salan faktorlardan biri də kristal quruluşunda hissəciklər arasındakı məsafələrin müəyyənləşdirilməsidir. Məlumdur ki, atom müsbət yüklü nüvə və mənfi yüklü elektronlardan ibarət olmaqla müəyyən nizamlı quruluşa malikdir. Nüvə ilə elektron təbəqəsinin yükləri arasında fərq olduqda müsbət və mənfi yüklü ionlar, kationlar və anionlar əmələ gəlirlər. Təbiidir ki, bunlar arasındakı itələmə və cəzb etmə qüvvələri təsir edir. Nəticədə hər bir ionda, yaxud atomda təsir sferası meydana gəlir və bu sferanın özünəməxsus radiusu olur. Beləliklə, atom və yaxud ion radiusu verilmiş atomun (ionun) təsir sferasının mərkəzinin qonşu atomun (ionun) təsir sferasına yaxınlaşa bildiyi minimal məsafəyə deyilir. Atom və ya ion radiusu əslində kristal şəbəkəsinin qovşaqları arasındakı məsafəni və deməli, verilmiş kristal maddənin quruluşunun xarakterini müəyyən edir. Buradan da təbii olaraq aydındır ki, ion və ya atom radiusu müxtəlif kimyəvi maddələr üçün müxtəlifdir. İon radiusunu iki sistemə əsasən tapırlar bunlardan birinci sistem rentgen şüaları vasitəsi ilə ölçmələrə əsaslanır ki, onu V.M.Qoldsmidt təklif etdiyinə görə onun şərəfinə Qoldsmidt sistemi adlanır.

İkinci sistem kvant mexanikasına əsasən nəzəri hesablamalara söykənən sistemdir. Bu hesablamalar ilk dəfə Polinq, sonra isə Arens və Qrin tərəfindən yerinə yetirildiyi üçün Arens-Qrin sistem adlanır. Qeyd etmək lazımdır ki, Qoldsmidt və Polinqin aldığı nəticələr bir-birinə yaxındırlar. İon və atom radiusları aşağıdakı bir sıra səbəblərdən asılıdırlar.

1) İonun yükü – adətən müsbət yüklü kationların təsir sferası nisbətən kiçik radiusa, mənfi yüklü anionların təsir sferası isə nisbətən böyük radiusa malik olurlar. Müqayisə isə atomun öz radiusu ilə aparılır. Bu onunla izah olunur ki,

müsbət yüklü ionlarda elektronların sayı atomdakına nisbətən az, mənfi yüklü ionlarda isə elektronlar atomun özündəkindən çox olur.

2) Atomun və ya ionun polyarlaşma qabiliyyəti, yəni atom və ionun xarici elektrik sahəsinin təsiri ilə öz konfigurasiyasını dəyişmə qabiliyyəti, atom və ya ion radiusuna təsirsiz ötürür. Polyarlaşma qabiliyyəti kristal quruluşundakı rabitələrin tipindən asılı olduğundan və kovalent rabitəli strukturlarda özünü daha qabarıq göstərdiyindən ion və atom radiusları rabitənin ionluluğundan və ya atomluluğundan əhəmiyyətli dərəcədə asılı olur.

3) Verilmiş kristal maddənin yerləşdiyi termodinamik şəraitdə (təzyiq, temperatur və s.). İon və atom radius temperaturdan düz və təzyiqdən tərs mütənəsb asılıdır.

§1.11. Atom və ionların kip yerləşdirilməsi

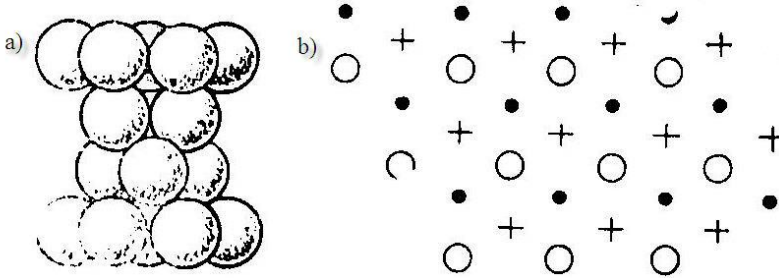
Kristal quruluşunu daha yaxşı təsəvvür etmək üçün onun şəbəkə qovşaqlarındakı atom və ionları onların radiuslarına bərabər radiuslu müxtəlif kürəciklər vasitəsi ilə göstərmək olar. Onda maddənin quruluşunu müxtəlif ölçülü kürəcik sıralarının toplusu kimi təsəvvür etmək olar.

İstənilən belə sistemin dayanıqlığının vacib faktorlarından biri onların kip yerləşdirilməsidir, yəni sistemin dayanıqlığı bu kürəciklərin bir-birinə nə dərəcədə sıxılmış olmalarından asılıdır. Təbiətdə belə kip yerləşmələr əsas yer tutur, çünki bu cür yerləşmə enerji baxımından ən əlverişli və deməli, ən dayanıqlı haldır.

Atomlardan ibarət strukturlarda bütün kürəciklər eyni atomları təsvir etdiklərindən eyni ölçüyə malikdirlər. Belə olduqda ən kip yerləşmə məsələsi sadələşir, belə ki, bunun üçün bütün kürəcikləri elə yerləşdirmək lazımdır ki, onlar bir-biri ilə daha sıx təmasda olsunlar. Yəni ikinci layın hər bir kürəciyi birinci layın üç kürəciyi arasındakı çökəyə düşmüş

olsun. Üçüncü layın kürəciklərinə gəldikdə isə burada iki hal mümkündür:

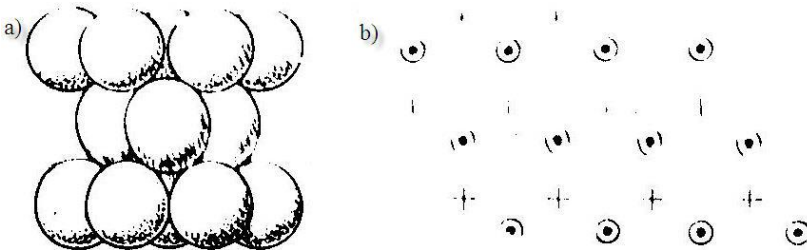
1. üçüncü layın hər bir kürəciyi ikinci layın üç kürəciyinin üstündə elə dayana bilər ki, üçüncü layın kürəciyi altında birinci layın kürəciyi olmasın (şəkil 1.11.1) Bu varianta ən kip kubik yerləşmə deyilir.



Şəkil 1.11.1. Kip kubik yerləşmə:

a) ümumi görünüş; b) üfqi müstəvidə ayrı-ayrı laylardakı kürəciklərin mərkəzlərinin proyeksiyaları

2. üçüncü layın hər bir kürəciyi də ikinci layın üç kürəciyi üzərində elə yerləşsin ki, ikinci layın kürəciyinin altında birinci layın kürəciyi olsun. Bu variant ən kip heksoqonal yerləşmə adlanır (şəkil 1.11.2)

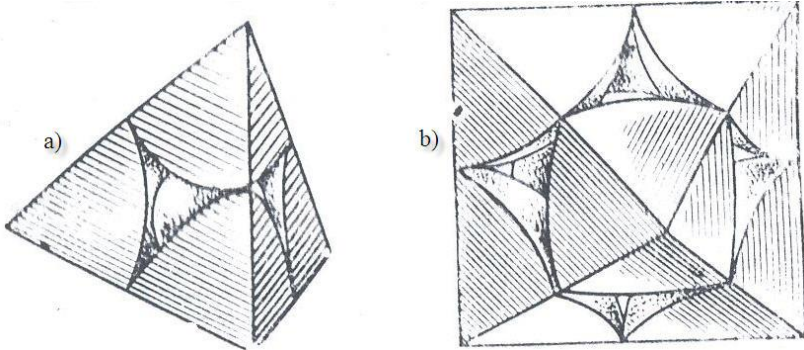


Şəkil 1.11.2. Ən kip heksoqonal yerləşmə:

a) ümumi görünüş; b) müxtəlif laylardakı kürəciklərin mərkəzlərinin üfqi müstəvi üzərində proyeksiyaları

Göstərilən strukturlarda bir çox metallar kristallaşırlar. Ən kip kubik yerləşmə variantı, məsələn, külçə metallara (mis, qızıl, gümüş və s.) xasdır.

Bu quruluşlarda kürəciklər arasındakı boşluqlara xüsusi diqqət yetirmək lazımdır. Bu boşluqlar oktaedrik və tetraedrik olmaqla iki cür olurlar. Onların adları boşluqların həndəsi formasına uyğun olaraq verilib. Oktaedrik boşluğun əmələ gəlməsində yerləşdirmənin səkkiz kürəciyi iştirak edir, tetraedrikdə isə adından da görüldüyü kimi dördü iştirak edir (şəkil 1.11.3).



Şəkil 1.11.3. a) tetraedrik; b) oktaedrik boşluqlar

İon – kristallik tipli müxtəlif strukturları ionların ən kip yerləşdirilməsi zamanı yaranan boşluqları uyğun kationlarla doldurmaqla təsvir etmək olar. məsələn, xörək duzunun strukturunu xlorun bütün ionlarını kip kubik yerləşdirib, natrium ionlarını isə onun oktaedrik boşluqlarında yerləşdirilmiş kimi təsəvvür etmək olar.

§1.12. Koordinasiya ədədi

Hər bir kristalın şəbəkəsinin qovşağında atomu (ionu) əhatə edən atomların (ionların) sayına həmin kristalın koordinasiya ədədi deyilir və hər bir kristal maddənin strukturu bu koordinasiya ədədindən asılı olur. Məsələn, yuxarıda göstərdiyimiz

qızılın, maqneziumun, sinkin (kubik, heksaqonal kip yerləşmə) strukturlarında hər bir atom başqa on iki atomla əhatə olunub ki, bu da onun koordinasiya ədədinin on iki olması deməkdir. İon şəbəkələrdə (yəni, qovşaqlarında ionlar olan şəbəkələrdə) müxtəlif radiuslu ionlar birləşirlər, ona görə də koordinasiya ədədi (yəni hər bir kation ətrafında qruplaşmış atomların sayı) və yaxud hər bir anionu əhatə edən kationların sayı kationun radiusu R_k -nın anionun radiusu R_a -ya nisbətindən asılı olur, yəni $R_k:R_a$ nisbətindən asılı olur.

Koordinasiya ədədi anion və kationların müxtəlif vəziyyətlərdə yerləşməsini də xarakterizə edir və deməli, bu və ya digər kiyməvi birləşmənin quruluşu ən çox xarakterik olan xüsusiyyəti haqqında əvvəlcədən fikir söyləməyə imkan verir. Aşağıdakı cədvəldə koordinasiya ədədinin $R_k:R_a$ nisbətindən asılılığı göstərilir.

Koordinasiya ədədi, n	Koordinasiya çoxüzlüsünün forması	$R_k:R_a$
2	Qantel	0-dan 0,15-ə qədər
3	Üçbucaq	0,15-dən 0,27-yə qədər
4	Tetraedr	0,22-dən 0,41-ə qədər
6	oktaedr	0,41-dən 0,73-ə qədər
8	Kub	0,73-dən 1,37-ə qədər
12	kubooktaedr	1

Koordinasiya haqqında fikrimizi daha da aydınlaşdırmaq üçün bir neçə misala baxaq.

1) Xörək duzunun koordinasiya ədədini tapaq.

Natriumun ion radiusu $R_n=0,98 \text{ \AA}$, xlorun ion radiusu isə $R_x=1,81 \text{ \AA} \Rightarrow R_n:R_x=0,98:1,81 \cong 0,54$. Yuxarıdakı cədvələ əsasən 0,54 ədədi dördüncü qrafaya düşür: $0,41 < 0,54 < 0,75$. Deməli, xörək duzunun koordinasiya ədədi 6-dır.

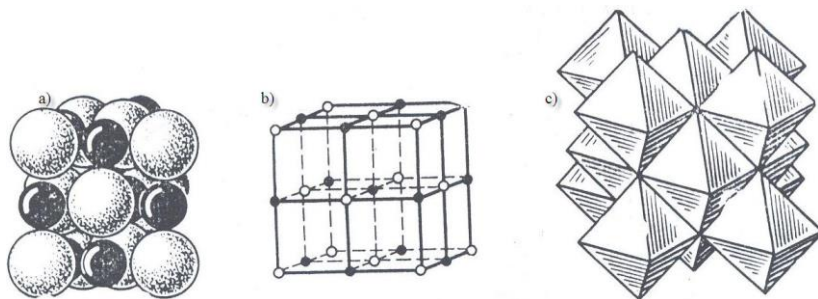
2) Kalsiumun CaF_2 strukturundakı koordinasiya ədədini tapaq: $R_k=1,06$, $R_a=1,33 \Rightarrow R_k:R_a=0,79$; $0,73 < 0,79 < 1,37$.

Deməli, cədvələ əsasən bu strukturun koordinasiya ədədi 8-dir.

§1.13. Struktur motivlər

Kristal maddənin strukturu həm ona daxil olan koordinasiya çoxüzlülərinin formasından, həm də onların qarşılıqlı uzlaşmalarından (kombinasiyalarından) asılıdır. Strukturun motivi dedikdə onu təşkil edən koordinasiya çoxüzlülərinin qarşılıqlı birləşmə üsulları nəzərdə tutulur. Kristallokimyada aşağıdakı motivlər məlumdur:

1) *Strukturun koordinasiya motivi.* Koordinasiya motivi koordinasiya çoxüzlülərinin bir-biri ilə ortaq üzlər və ortaq tillər vasitəsilə birləşməsinə deyilir. Buna qalenit kristalı misal ola bilər (şəkil 1.13.1).



Şəkil 1.13.1. Qalenit kristalında koordinasiya motivi

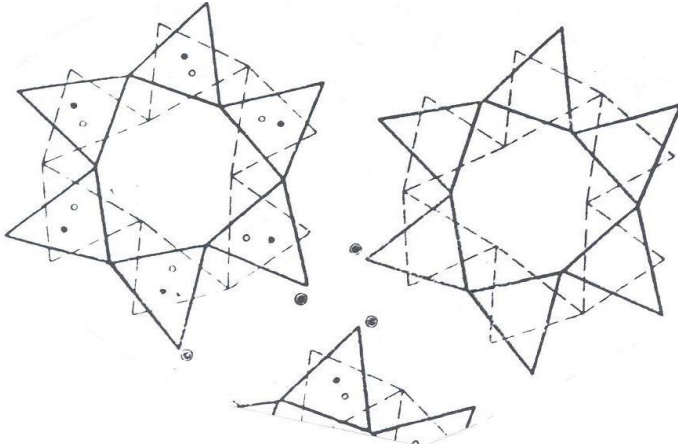
2) *Strukturun ada motivi.* Ayrı-ayrı koordinasiya çoxüzlüləri bir-biri ilə ortaq kationlar və ortaq anionlar vasitəsi ilə birləşirlər. Ada motivinin bir neçə növünə baxılır:

a) ayrı-ayrı koordinasiya çoxüzlüləri (üçbucaqlar, tetraedrlər, oktaedrlər, kublar və s.);

b) koordinasiya çoxüzlüləri qrupu (məsələn, ikiqat oktaedrlər, tetraedrlər və s.) sanki izolə olunmuş və kationlarla birləşmiş adacıqlar əmələ gətirirlər;

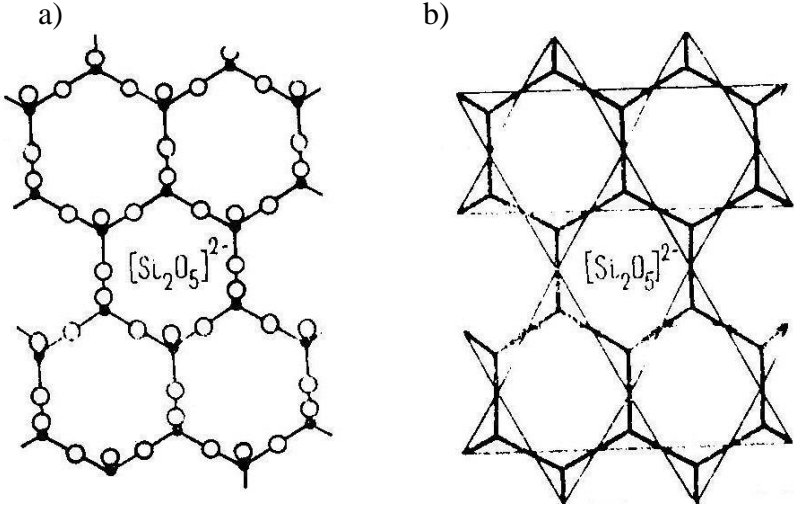
c) bir neçə (3, 4, 6) koordinasiya çoxüzlüsü bir-biri ilə birləşib həlqə yaradırlar ki, bunlar da kationlarla birləşmiş adacıqlar əmələ gətirirlər. Strukturun belə motivinə həlqəvari

motiv də deyilir. Əslində bu elə ada motivinin xüsusi halıdır (şəkil 1.13.2).



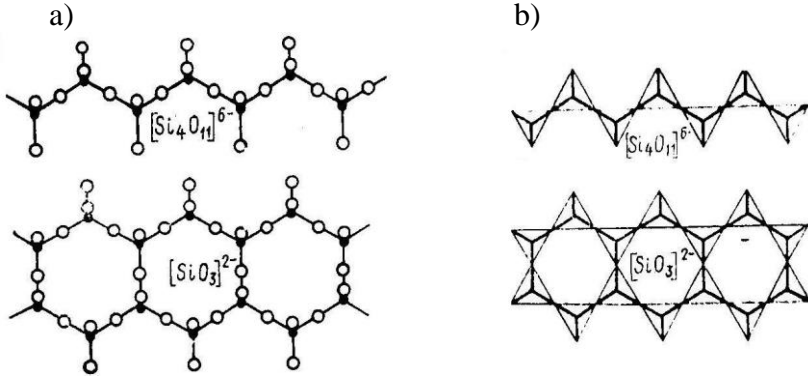
Şəkil 1.13.2. Turmalin kristalında strukturun həlqə motivi

3) *Zəncirvari və lentvari motiv.* Burada koordinasiya çoxüzlüləri bir-biri ilə bir istiqamətdə uzanmış sonsuz zəncir, ya da ikiləşmiş zəncir və yaxud da lent şəklində birləşmiş olurlar (şəkil 1.13.3).



Şəkil 1.13.3. Strukturun zəncirvari motivi

4) *Strukturun laylı motivi.* Koordinasiya çoxüzlüləri iki ölçülü sonsuz lay şəklində birləşirlər. Layın hüdudları daxilində ayrı-ayrı çoxüzlülər bir-birinə yaxın olurlar (şəkil 1.13.4.).



Şəkil 1.13.4. Strukturun lay motivi

Enyi zamanda ayrı-ayrı laylar bir-birindən əhəmiyyətli dərəcədə aralı olurlar.

5) *Strukturun karkas motivi.* Bu motivdə bütün koordinasiya fiqurları bir-biri ilə ancaq təpələrdə yerləşən ortaq ion (atom) vasitəsi ilə birləşirlər və sonsuz üçölçülü fəza karkası yaradırlar. Bu zaman çoxüzlülər heç yerdə bir-biri ilə tillər və üzlər vasitəsi ilə birləşmirlər. Belə birləşmə çoxüzlülər arasında qalan çoxlu, böyük boşluqlarla fərqlənirlər.

Laylı struktura malik olan kristal maddələr həmişə bir istiqamətdə yumşaq kamil bitişikliyə malik olurlar. Həlqəvari motivli kristallar xüsusi ilə də karkasvari strukturlu kristallar daxillərindəki çoxsaylı boşluqların olması ilə fərqlənirlər. Bu boşluqlara suyun və ya başqa maye birləşmələrin asanlıqla nüfuz etməsi mümkündür.

Beləliklə, kristal maddələrin fiziki xassələri əsasən struktura daxil olan atom və ionların özlərinin kimyəvi tərkibi, rabitələrin tipləri və strukturun motivləri vasitəsi ilə müəyyən edilir. Kristaldakı bütün bu əlaqələrin dayanıqlı olmasını kristal

qəfəsinin daxili enerjisi təmin edir. Kristalın daxili enerjisi onun kristal şəbəkəsinə daxil olan kation və anionların birləşməsi zamanı ayrılan enerji miqdarına deyilir. Bu enerjini maddənin bir qrammolekulunu onu təşkil edən ionları bir-birindən ayırmağa sərf olunan iş miqdarı kimi də təyin etmək olar.

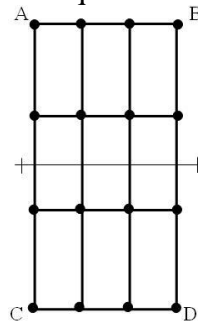
§1.14. Kristalların fiziki xassələri

Xalq təsərrüfatının bir çox sahələrində, radiotexnika, təbabət, metallurgiya və müdafiə sənayesində kristalların geniş tətbiqi, onların əsas xassələrini bilmədən mümkün deyil. Ona görə də, burada onlar haqqında qısa məlumat vermək məqsədyönlü olmalıdır.

Kristallar aşağıdakı əsas xassələrə malikdirlər:

1. *Bitişiklik xassəsi.* Bu kristalların paralel müstəvi üzrə müəyyən laylara ayrılma xassəsidir. Bu laylar həmişə həqiqi və ya mümkün müstəviyə paralel olurlar. Bitişiklik istiqamətinə və kamillik dərəcəsinə görə fərqlənir. Əgər bitişiklik ancaq bir istiqamətdə müşahidə olunursa, deyirlər ki, bitişiklik pino-koidal xarakterlidir, iki istiqamətdə müşahidə olunursa, deyirlər ki, bitişiklik prizmatik xarakterlidir, üç istiqamətdə müşahidə olunduqda isə deyirlər ki, bitişiklik kubik xarakterlidir. Bitişiklik (buna yapışıqlıq da demək olar) və onun kamillik dərəcəsi kristalın daxili quruluşunun xüsusiyyətlərindən asılıdır. Şəkil 1.14.1-də göstərilən müstəvi şəbəkəyə baxaq.

Burada AB istiqamətində qovşaq nöqtələri AC istiqamətinə nisbətən sıx yerləşmişlər. Ona görə də AB istiqamətində ilişmə qüvvəsi AC istiqamətindən çox olmalıdır. Onda aydındır ki, şəkildə göstərilən tor AB istiqamətində cırılmaya daha çox müqavimətli olar nəinki AC istiqamətində. Başqa sözlə, kristalın bitişikliyi daha



Şəkil 1.14.1.

çox retikulyar sıxlığa (yəni vahid sahəyə düşən qovşaqların sayı) malik olan müstəvi boyunca müşahidə olunacaq. Bu xassə mineralların diaqnostikasında mühüm rola malikdir.

2) *Kristalın bərkliyi*. Bərklik dedikdə kristalın hər hansı xarici mexaniki təsirə müqavimət göstərmə dərəcəsi nəzərdə tutulur. Kristalların bərkliyini təyin etmək üçün ən sadə halda cızma üsulundan istifadə olunur. Daha bərk kristal özündən yumşaq olan kristal üzərində cızıq xətti əmələ gətirir. Ən çox Moos şkalası deyilən şkaladan istifadə olunur. Bu şkalada kristallar bərklik dərəcəsinin artması istiqamətində belə düzülüşlər:

1. talk
2. gips
3. kalsit
4. flyuorit
5. apatit
6. ortekloz
7. kvars
8. topaz
9. korund
10. almaz

Kristalın bütün başqa xassələri kimi bərkliyi də onun daxili quruluşundan və kimyəvi tərkibindən asılıdır: a) kristalın müstəvi sıraları arasındakı məsafə nə qədər kiçik olsa kristal bir o qədər bərk olar, b) eyni tipli quruluşa malik olan kristallarda bərklik kationların valentliyinin artması ilə artır, c) kationların koordinasiyasının artması ilə bərkliyi də artır, ç) kristalda ion radiusu kiçik olduqda bərklik çox olur;

3) *Plastik deformasiyaya uğrayabilmə xassəsi*. Kristalların xarici mexaniki təsir nəticəsində öz formasını dönməz dəyişə bilməsinə deyilir. İki cür plastik deformasiyaya baxılır:

a) kristal maddənin laylarının müstəvi sıralarda paralel yerdəyişməsi. Bu zaman yerdəyişmə kristalın cırılması ilə nəticələnmiş və hissəciklər öz paralel oriyentasiyalarını dəyişməmişlər. Sürüşmə deformasiyasının baş verdiyi istiqamətə sürüşmə istiqaməti deyilir;

b) döyülə bilmə xassəsi. Bu cür deformasiya metallarda tez-tez müşahidə olunur. Döyülə bilmə xarici qüvvənin təsiri ilə istənilən formanı ala bilmə xassəsidir. Döyülə bilmə xassəsinə temperatur və kanar qarışıqların təsiri böyükdür.

4) *Pyezoelektriklik xassəsi*. Deformasiya zamanı kristalın səthində elektrik yüklərinin əmələ gəlməsinə və tərsinə elektrik

sahəsinin təsiri ilə kristalın deformasiya olunması xassəsidir. Bu effekti 1880-ci ildə ilk dəfə C və P Kürü qardaşları kvars və turmalin kristallarında aşkar etmiş və öyrənmişlər. Pyezoelektrik effektinin mövcud olması üçün əsas şərt kristalda mərkəzi simmetriyanın olmamasıdır. Pyezoelektrik effekti döənən hadisədir.

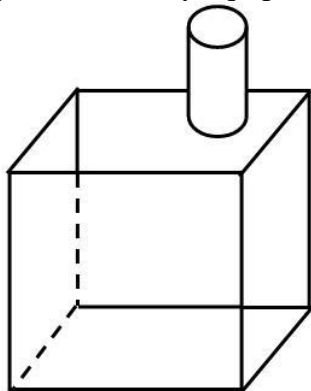
5) *Piroelektiklik xassəsi*. Temperaturun dəyişməsi hesabına kristalın elektricləşməsinə piroelektrik effekti deyilir. Kristallarda piroelektriklik eyni zamanda həm polyar, həm də vahid simmetriya oxları istiqatində baş verir. Bu hadisə ancaq dielektriklərdə baş verir. Piroelektrik effekti, kristallardan temperaturu qeyd etmək, ötürücü (datçik) kimi istifadə etməyə imkan verir.

6) *İstilikkeçirmə xassəsi*. Kristalın bütün xassələrdən başqa o bir də istilikkeçirmə əmsalı ilə xarakterizə olunur. Temperaturlar fərqi bir dərəcə olduqda vahid zamanda kristalın vahid səthindən keçən istilik miqdarına onun istilikkeçirmə əmsalı deyilir. Müəyyən edilib ki, eyni kristalda istilik keçirmə əmsalı müxtəlif istiqamətlərdə müxtəlif ola bilər (istilikkeçirməyə görə anizotropluq).

§1.15. Simmetriyada superpozisiya

Sözügədən prinsip həndəsi və ya fiziki hadisələrin birlikdə bir bütöv kimi baxılan iki və ya daha çox simmetriya formalarının yekun simmetriyasını təyin edən prinsipdir. Bu prinsipi onu ilk dəfə həndəsi fiqurlar üçün aşkar etmiş fransız fiziki P.Kürünin şərəfinə Kürü prinsipi də adlandırırlar. Simmetriyaların superpozisiya prinsipinin daha dəqiq ifadəsi görkəmli rus alimi A.N.Şubnikov tərəfindən verilmişdir. A.V.Şubnikova görə superpozisiya prinsipinin mahiyyəti ondan ibarətdir ki, bir-birinə bərabər olmayan bir neçə simmetrik fiquru bir-biri ilə bir təkibdə birləşdirdikdə (kəsişdirdikdə) alınan sonuncu fiqurda ancaq simmetriyanın verilmiş birləşdirmə və fəzada yerdə-

yişmə üsulu üçün ortaq olan simmetriya elementləri qalır. Bu isə o deməkdir ki, yekunda alınan fiqurun simmetriya qrupu birləşən obyektlərin simmetriya qruplarının ən böyük alt qruplarından ibarət ola bilər. Misal üçün kubla onun yuxarı üzünə perpendikulyar qoyulmuş silindrə baxaq. Əgər silindrin oxu kubun üzlərinin ortalarından keçən simmetriya oxu ilə üst-üstə düşürsə, onda birləşmiş fiqur 4-cü tərtib simmetriya oxuna malik olacaq,



yəni kubun ən böyük tərtibli (həm də silindrlə ortaq) oxuna malik olacaq. Bundan başqa o həm də dörd simmetriya müstəvisinə (yenə də hər ikisi üçün ortaq) malik olacaq. Yəni alınan fiqurun simmetriya qrupu kubun simmetriya qrupunun alt qrupudur.

Kürü prinsipinin bu qədər sadə görünməsinə baxmayaraq onda bəzi incəliklərə diqqət yetirmək vacibdir. Onlardan biri birləşən fiqurların bir-birinə nəzərən qarşılıqlı vəziyyətidir. Məsələn, yenə də kubla silindrin birləşməsinə qayıdaq. Aydındır ki, bu iki fiqurun birləşməsində ən yüksək simmetriya baxdığımız halda, yəni silindrlə kubun ağırlıq mərkəzləri bir düz xətt üzərində (yəni kubun üzlərinin ortalarından keçən simmetriya oxu üzərində) olduğu halda alınacaq. $P4LP=4L2P$ simvolu ilə ifadə olunacaq. Qalan bütün hallarda simmetriya qrupunun tərtibi aşağı olacaq. Buradan bir də aydın olur ki, fiqurların birləşməsindən alınan fiqurun simmetriya qrupu birləşən fiqurlardan ən aşağı simmetriya qrupuna malik olanın qrupundan böyük ola bilməz.

Onu da qeyd etmək lazımdır ki, superpozisiya prinsipi ancaq bərabər olmayan fiqurlar üçün tətbiq oluna bilər, bərabər fiqurlar üçün isə onu tətbiq etmək mənasızdır.

Superpozisiya prinsipini tətbiq edərkən kristalın bütün simmetriya elementlərinin nəzərə alınmasına diqqət yetirmək lazımdır. Məsələn, kubun $4L6L_i$ qrupuna mənsub olan $4L$ oxu təkcə fırlanma oxu deyil, həm də güzgüdə əks etdirmə oxudur. Ona görə də $4L$ oxunu başqa fiqurun $4L_i$ oxu ilə üst-üstə saldıqda yekun fiqur $4L_i$ oxuna da malik olacaq.

Yuxarıda dediyimiz kimi superpozisiya prinsipi həndəsi fiqurlardan başqa fiziki hadisələrə də tətbiq olunur. Lakin bu zaman baxılan fiziki hadisələri ifadə edən səthlərin superpozisiyasına baxmaq lazımdır.

Biz indiyədək nöqtəvi simmetriyaya malik fiqurların superpozisiyasından danışdıq. Bunu fəza fiqurlarına köçürmək elə də çətin deyil. Bunun üçün müxtəlif fəza şəbəkələrinin simmetriya elementlərinin superpozisiyasına baxmaq lazımdır. Çox böyük olduqlarından bu şəbəkələrdə onlar həmişə birbirinə nüfuz edirlər. Eyni şəbəkələrin müəyyən oriyentasiyalar üçün birləşmiş şəbəkənin simmetriyası ortaq ola bilər.

Beləliklə, istilikkeçirmə əmsalı kristalın simmetriyindən və kimyəvi tərkibindən asılıdır. Məsələn, kubik sinqoniyaya mənsub olan kristallarda istilikkeçirmə əmsalı bütün istiqamətlərdə eyni qiymətə malik olduğu halda (istilikkeçirmə baxımından izotrop) orta və aşağı kateqoriya sinqoniya kristallarında istiqamətdən asılı olaraq dəyişir.

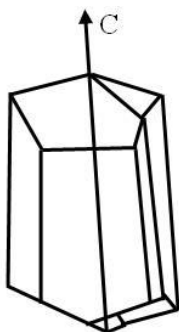
7) *Optik xassələr*. Kristalın əsas optik xassəsi onun şüanı sındırması, ikiqat şüasındırması, işığı polyarlaşdırma bilməsi, interferensiyaya uğratması və başqalarıdır. Lakin bu, kitabımızın məqsədi dairəsindən kənarında olduğu üçün bu xassələr haqqında ətraflı məlumat verməkdə zərurət görmürük.

§1.16. Polyar istiqamət

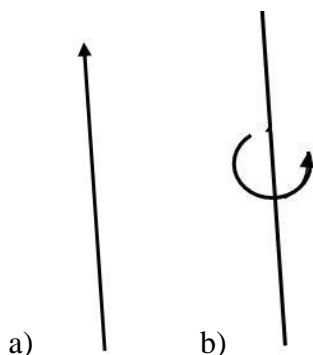
Kristalların bir çox fiziki xassələrini öyrənmək üçün bəzi istiqamətlərin simmetriyasını bilmək vacibdir. Biz burada polyar və məxsusi polyar istiqamətləri nəzərdə tuturuq. İstiqamətə

vektor kimi baxsaq onda başlanğıcı və sonu fiziki baxımından müxtəlif olan istiqamətə polyar istiqamət deyəcəyik. Başlanğıc və sonu fiziki baxımından eyni olan vektorlara isə aksial vektor deyəcəyik. Həndəsi mənada polyar vektor bildiyimiz adi vektordur, sadəcə aksial vektordan fərqləndirmək üçün ona polyar vektor adı verilmişdir. Aksial vektor isə elə vektora deyilir ki, onun yerləşdiyi koordinat sistemi öz oriyentasiyasını dəyişdikdə vektor da öz istiqamətini dəyişsin. Məsələn, elektrik sahə vektoru \vec{E} , elektrik dipolu momenti \vec{p} və elektrik polyarlaşma vektoru \vec{P} polyar vektorlardır, maqnit sahəsinin vektoru, maqnitləşmə, maqnit momentləri vektorları isə aksial vektorlardır.

Kristalda polyar istiqaməti onun simmetriyasını və simmetriya elementlərini bilərək təyin etmək olur. Əgər kristalda istiqamət elə seçilibsə ki, onun əks tərəflərini üst-üstə salmaq mümkün olmasın, deməli seçilmiş istiqamət polyar istiqamətdir. Kristalda seçilmiş polyar istiqamət yeganədirsə, yəni ondan başqa polyar istiqamət mövcud deyilsə, buna məxsusi polyar istiqamət deyilir. Polyar və məxsusi polyar istiqamətlərin simmetriyasının tərtibi polyar vektorun tərtibindən böyük ola bilməz. Polyar və aksial vektorları uyğun olaraq aşağıdakı kimi təsvir etmək olur. Şəkil 1.16.2-də turmalin kristalı təsvir olunub. Onun şəkildə göstərilən oxu polyar oxdur (şəkil 1.16.1).



Şəkil 1.16.1



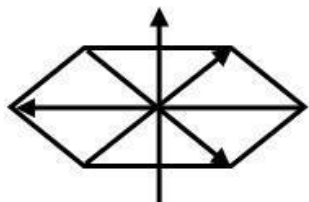
Şəkil 1.16.2. a) polyar və b) aksial vektorların qrafik təsvirləri

Kristallarda simmetriya onlardakı elektrik yüklərinin yerləşmə vəziyyətini də xarakterizə edir.

Beləliklə, kristalların elektrik xassələri onların simmetriyaları ilə bağlıdır. Elektrik yüklərinin yerləşməsinə görə dielektriklər üç tipə bölünürlər:

- 1) müsbət və mənfi yüklərin fəzadakı vəziyyətləri elədir ki, onların ayrılıqda götürülmüş (müsbət yüklərin ayrı, mənfi yüklərin də ayrı) ağırlıq mərkəzləri üst-üstə düşür və deməli, kristal mərkəzi simmetriyaya malikdir. Ayrıca götürülmüş elementar kristal qəfəsi üçün bu o deməkdir ki, elektrik yüklərinin ağırlıq mərkəzləri kristalın simmetriya mərkəzi ilə üst-üstə düşür. Belə kristallarda polyar və deməli məxsusi polyar istiqamət olmur. Ona görə bunlara qeyri-polyar kristallar deyilir.
- 2) İkinci tip dielektriklərin elementar kristal qəfələrində əksadlı elektrik yüklərinin ağırlıq mərkəzi bu qəfəs həddlərində qəfəsin ağırlıq mərkəzi ilə üst-üstə düşürlər. Bu halda alınan elektrik dipollarının momentləri bütün qonşu qəfədəki elektrik dipolları momentləri ilə paralel olurlar və kristalı əmələ gətirən bütün bu cür elementar qəfələrin toplusu onu makroskopik polyarlaşmış edirlər. Daxili elektrik yükləri bu dediyimiz kimi yerləşmiş kristallara polyar kristallar deyilir.
- 3) Üçüncü tip dielektriklərdə yüklərin paylanması elədir ki, müsbət və mənfi yüklərin ağırlıq mərkəzləri üst-üstə düşürlər. Lakin eyniadlı yüklərin toplusu mərkəzi simmetriyaya malik deyil. Belə olduqda elementar kristal qəfəsi həddində dipol momentlərinin elə toplusu yığılmış olur ki, o bütövlükdə bir seçilmiş polyar istiqamətə gətirə bilmir, çünki bütün dipol momentlərinin həndəsi cəmi sıfıra bərabər olur (əks işarəli yüklərin ağırlıq mərkəzlərinin üst-üstə düşməsi). Belə kristallarda hər bir eyni adlı yüklər toplusu polyar istiqamət təyin edə bilməsinə baxmayaraq məxsusi polyar istiqamət təyin edilə bilmir. Belə kristallara

polyar neytral kristallar deyilir, yəni belə kristallar sadə polyar istiqamətlərə (lokal) malik olmalarına baxmayaraq məxsusi polyar istiqamətə malik olmur-lar.



Şəkil 1.16.3. Dipolların nizamlanması

§1.17. Kristalların polyarlaşması

Polyarlaşma dielektriklərin ən vacib xüsusiyyətlərindən biridir. Polyarlaşmadan danışanda onun iki səbəbinə ayrı-ayrılıqda diqqət yetirilməlidir. Əgər dielektrik kristalında polyarlaşma heç bir xarici təsirin iştirakı olmadan əmələ gəlsə, onda ona spontan (öz-özünə) polyarlaşma deyilir. Bəs polyarlaşma özü nədir? Kristal daxilində elektrik dipollarının əmələ gəlməsi hadisəsinə kristalın polyarlaşması deyilir. Kristallokimya baxımından belə izah olunur: - qonşu ionların yaratdığı elektrik sahəsi nəticəsində kristal şəbəkəsində ionların kürəvari örtük forması deformasiyaya uğrayır, yəni onların dəqiq radiusları dəyişir və onlar ellipsvari şəklə düşürlər. Kristallarda baş verən bu hadisəyə polyarlaşma deyilir. Kristallofizika baxımından bu elektrik sahəsinin təsiri altında elektrik dipollarının yaranmasıdır. Polyarlaşmaya aşağıdakı faktorların təsiri var:

a) İonların ölçülərinin təsiri. Aydındır ki, ion təbəqəsinin ölçüsünün dəyişməsi ilə bərabər ion təbəqəsinin nüvədən olan məsafəsi də dəyişir. Beləliklə, ion təbəqəsinin genişlənməsi ilə elektron təbəqəsinin nüvə ilə rəqəti zəifləyir. Elektronlar çox olduqca da elektron təbəqəsinin nüvə ilə rəqəti daha zəif olur. Beləliklə, elektron təbəqəsi nüvə ilə nə qədər zəif əlaqəli olursa, onun polyarlaşma imkanı bir o qədər çox olur. Ölçüləri kiçik olan ionlar isə çətin polyarlaşırlar.

b) İonların valentliyinin təsiri. Fizikadan məlumdur ki, ion nə qədər çox elektrik yükü daşıyarsa, onun valentliyi o qədər çox olur və bir o qədər də çətin polyarlaşır. Digər tərəfdən məlumdur ki, elementin valentliyinin çoxalması ilə onun ionunun ölçüsü kiçilir və deməli, çətin polyarlaşır, bunun əvəzində o özü yaxşı polyarlaşdırır. Polyarlaşma hadisəsi maddənin kristallokimyəvi və fizikokimyəvi xassələrinə əhəmiyyətli dərəcədə təsir edir, belə ki, polyarlaşmanın nəticəsində birləşmələrdə (strukturlarda) rəbitənin kovalentliyi artır və bəzi hallarda isə koordinasiya ədədi dəyişir, həllolma qabiliyyəti azalır, parlaqlığı azalır.

c) Xarici elektrik sahəsi və ya maqnit sahəsinin təsiri ilə də dielektrlərdə polyarlaşma baş verir. Bu spontan polyarlaşmadan fərqli olaraq sadəcə polyarlaşma adlanır. Piroelektrlərdə polyarlaşmanın dəyişməsi və pyezoelektrlərdə elektrik polyarlaşması mexaniki təsirin (deformasiyanın) hesabına reallaşır. Son zamanlar tədqiqatçıların diqqətini daha bir polyarlaşma – maqnitoelektrik effekti hesabına yaranan polyarlaşma da cəlb edir. Bu hadisə maqnit sahəsinin və maqnitləşməsinin təsiri ilə bəzi kristallarda polyarlaşma prosesinin baş verməsindən ibarətdir. Qeyd edək ki, maqnitoelektrik effekti hesabına əmələ gələn polyarlaşma da tenzorial xarakterə malikdir.

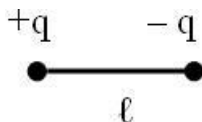
§1.18. Elektrik polyarlaşması

Ən sadə elektrik dipolu bir-birindən ℓ məsafəsində yerləşmiş iki əksişarəli q elektrik yükündən ibarətdir. Dipol elektrik momenti ilə xarakterizə olunur və polyar vektordur, belə ki, mənfi yükə doğru yönəlmişdir.

Onun ədədi qiyməti

$$|\vec{P}| = q|\vec{\ell}| \quad (1.18.1)$$

kimi təyin edilir.



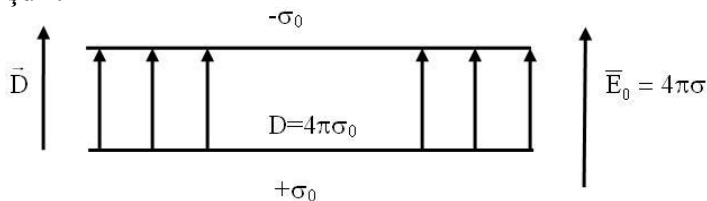
Şəkil 1.18.1.

Ən sadə halda dielektrikdə ancaq atomlar polyarlaşırlar. Adətən hesab edilir ki, dielektriklər elektrik baxımından neytraldırlar, yəni onu təşkil edən hissəciklərdə müsbət və mənfi yüklərin yekun sayları bərabərdirlər və sərbəst (yəni kristal quruluşuna daxil olmayan) yüklər isə yoxdurlar. Atomların polyarlaşmasında onların nüvəyə nəzərən vəziyyətləri daha doğrusu müsbət yüklərə nəzərən vəziyyətləri dəyişir. Bu prosesə elektron yerdəyişməsi, polyarlaşması deyilir. Əgər dielektrik müsbət və mənfi ionlardan təşkil olunubsa, onda polyarlaşmaya ion yerdəyiməsi polyarlaşması deyilir. Bütün hallarda polyarlaşma elementar dipolların meydana gəlməsi ilə müşayiət olunur. Dielektrik özü isə bütövlükdə makroskopik polyarlaşmış olur. Onun vahid həcminə düşən yekun polyarlaşması \bar{P} aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$\bar{P} = N\bar{p} \quad (1.18.2)$$

Belə ki, burada N vahid həcmdəki dipolların sayı, \bar{p} isə bir dipolun elektrik momentidir.

Aşağıdakı şəkildə polyarlaşma prosesinin qrafiki təsvir edilmişdir.



Şəkil 1.18.2. Dielektriksiz kondensator

Fizika kursundan məlumdur ki, əgər hər hansı kondensator lövhəsinin yükləri σ_0 səthi sıxlığına malikdirsə, onda onun daxilindəki vakuumdə elektrostatikaya əsasən E_0 gərginlikli elektrik sahəsi yaranır və

$$E_0 = 4\pi\sigma_0 \quad (1.18.3)$$

münasibəti ilə təyin olunur. E_0 sahəsi öz növbəsində D ilə işarə olunan elektrik induksiya sahəsi yaradır. Ona görə də E_0 -a induksiyalaşdırıcı gərginlik deyilir.

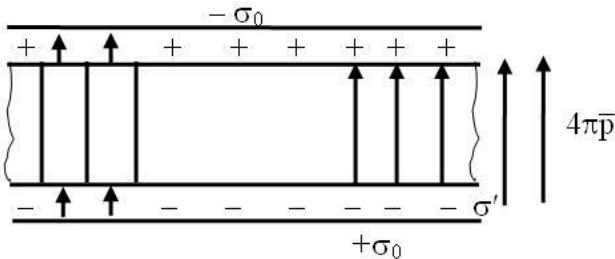
Kondensator lövhələri arasında dielektrik yerləşdirildikdə D induksiyası həmin dielektriki polyarlaşdırır, belə ki, onun müsbət yükləri kondensator lövhələr üzərindəki mənfi yüklərə, mənfi yükləri isə kondensator lövhələri üzərindəki müsbət yüklərlə öz yerlərini dəyişirlər. Dielektrik daxilində elementar dipolların yükləri bir-birini qarşılıqlı surətdə neytrallaşdırırlar və bu paylaşmanın nəticəsi özünü yüklərin səthi sıxlığı σ' -ə bərabər olan sərhəddə biruzə verir. Aşağıdakı şəkildən görünür ki, bütövlükdə dielektrikin dipol momenti

$$qL = \sigma_0 SL \quad (1.18.4)$$

qədər olur, belə ki, L – elektrodlar (lövhələr) arasındakı məsafədir. Öz növbəsində yekun dipol momenti vahid həcmnin dipol momenti ilə belə ifadə olunur

$$PV = pSL \quad (1.18.5)$$

Burada V dielektrikin tam həcmidir.



Şəkil 1.18.3. Dielektrik daxil edilmiş kondensator

Sonuncu iki bərabərliyin müqayisəsindən alırıq:

$$P = \sigma' \quad (1.18.6)$$

Beləliklə, aydın olur ki, dielektrikin vahid həcmnin dipol momenti ədədi qiymətcə bağlı yüklərin səthi sıxlığına bərabərdir. σ' yükü isə sərbəst σ_0 yüklərinin bir hissəsini neytrallaşdırır. Yüklər arasındakı $\sigma_0 - \sigma'$ fərqi dielektrikdə elektrik sahəsinin gərginliyi E -ni təyin edir

$$E = 4\pi(\sigma_0 - \sigma') = 4\pi\sigma_0 - 4\pi\sigma' = D - 4\pi\rho \quad (1.18.7)$$

Kondensator lövhələrinə bağlı olan σ' yükünün qiyməti dielektrikin nə dərəcədə effektiv polyarlaşmasından asılıdır. Dielektrik polyarlaşma əmsalına α desək

$$\sigma' = P = \alpha E \quad (1.18.8)$$

olar. Yenidən sonuncu iki bərabərliklərin müqayisəsindən alırıq:

$$D = (1+4\pi\alpha)E \quad (1.18.9)$$

İndi də $1+4\pi\alpha = \epsilon$ desək

$$D = \epsilon E \quad (1.18.10)$$

ϵ kəmiyyətinə dielektrik nüfuzluluğu deyilir.

ϵ da α kəmiyyəti kimi dielektrikin polyarlaşma qabiliyyətini xarakterizə edir və elektrik sahəsinin σ_0 yükü ilə yaradılmış vakuumdakı gərginliyinin həmin yük tərəfindən dielektrikdə yaradılmış gərginlikdən neçə dəfə çox olmasını göstərir. α və ϵ kəmiyyətləri nə qədər böyük olarlarsa, dielektrikin polyarlaşması o qədər böyük olur və dielektrik daxilində elektrik sahəsinin gərginliyi bir o qədər aşağı olur.

Burada limit vəziyyəti kimi vakuum və metal götürülür. Vakuum üçün $\alpha=0$, $\epsilon=1$, metallar üçün isə sərbəst elektronların mövcudluğu hesabına sahə tamamilə neytrallaşmış olur. Ona görə də formal olaraq $\alpha = \infty$, $\epsilon = \infty$ götürülür.

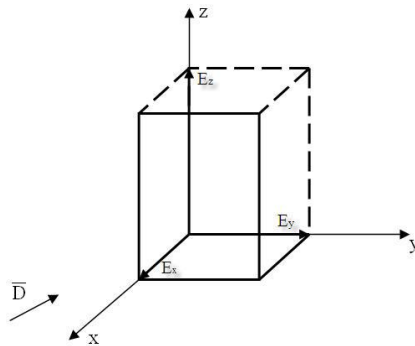
Qeyd edək ki, D induksiyası, E elektrik sahə gərginliyi və P polyarlaşması polyar vektorlardır. Ona görə onları aşağıdakı vektorial bərabərliklə belə təyin etmək olar:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}; \quad \vec{P} = \alpha\vec{E}; \quad \vec{D} = \epsilon\vec{E} \quad (1.18.11)$$

İzotrop dielektrlərdə bu sahələrin hamısı eyni bir düz xətt üzərində olurlar, amma \vec{P} vektoru \vec{D} və \vec{E} vektorlarının əksinə yönəlir.

\vec{D} , \vec{E} və \vec{P} vektorlarını bağlayan yuxarıdakı vektorial münasibətlər kristallar və anizotrop dielektrlər üçün kifayət qədər mürəkkəb olurlar. Bu mürəkkəbləşmə onunla əlaqədardır ki, izotrop maddələrdən fərqli olaraq ümumi halda (anizotrop maddələrdə) hissəciklərin yerdəyişmə istiqamətləri xarici induktivləşdirici sahənin təsiri istiqaməti ilə üst-üstə düşürlər. Yəni anizotrop maddələrdə yüklü hissəciklərin yerdəyişmə istiqaməti xarici D sahəsinin istiqaməti ilə deyil elektrik gərginliyi \vec{E} vektorunun istiqaməti ilə üst-üstə düşür. Bu o deməkdir ki, induktiv D sahəsi elə elektrik sahəsi gərginliyi yaradır ki, onun x , y , z koordinat oxları boyunca yönəlmiş üç E_x , E_y və E_z komponentləri olur.

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} \quad (1.18.12)$$



Şəkil 1.18.4.

Vektor sahələrinin asılılıqlarının belə xarakterinə tenzorial asılılıq deyilir və belə yazılır:

$$P_i = \alpha_{ij} E_j \quad (1.18.13)$$

Burada

$$\alpha_{ij} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \quad P_i = \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{vmatrix} \quad E_i = \begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{vmatrix} \quad (1.18.14)$$

Bu asılılığı açıq şəkildə belə yazmağa bilərik:

$$\begin{aligned} P_1 &= \alpha_{11} E_1 + \alpha_{12} E_2 + \alpha_{13} E_3 \\ P_2 &= \alpha_{21} E_1 + \alpha_{22} E_2 + \alpha_{23} E_3 \\ P_3 &= \alpha_{31} E_1 + \alpha_{32} E_2 + \alpha_{33} E_3 \end{aligned} \quad (1.18.15)$$

Buna analogi olaraq $D_i = \varepsilon_{ij} E_j$ asılılığını da

$$\begin{aligned} D_1 &= \varepsilon_{11} E_1 + \varepsilon_{12} E_2 + \varepsilon_{13} E_3 \\ D_2 &= \varepsilon_{21} E_1 + \varepsilon_{22} E_2 + \varepsilon_{23} E_3 \\ D_3 &= \varepsilon_{31} E_1 + \varepsilon_{32} E_2 + \varepsilon_{33} E_3 \end{aligned} \quad (1.18.16)$$

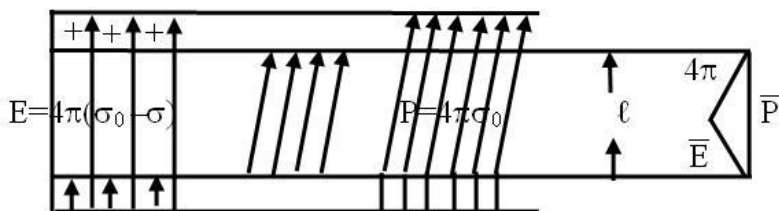
kimi yazmaq olar. Tədqiqatlar göstərir ki, hər bir kristalda üç qarşılıqlı perpendikulyar elə baş istiqamətlər seçmək mümkündür ki, koordinat oxlarını həmin istiqamətlərdə yönəltəndə $\alpha_{ij} = \varepsilon_{ij} = 0$ ($i \neq j$ olduqda) onda (1.18.15) və (1.18.16) bərabərlikləri uyğun olaraq aşağıdakı şəkillərə düşürlər:

$$\begin{aligned} P_1 &= \alpha_{11} E_1 & D_1 &= \varepsilon_{11} E_1 \\ P_2 &= \alpha_{21} E_1 & D_2 &= \varepsilon_{21} E_1 \\ P_3 &= \alpha_{31} E_1 & D_3 &= \varepsilon_{31} E_1 \end{aligned} \quad (1.18.17) \quad (1.18.18)$$

Bu halda α_{11} , α_{22} və α_{33} kəmiyyətlərinə kristalın baş polyarlaşma əmsalları, ε_{11} , ε_{22} və ε_{33} əmsallarına isə baş dielektrik nüfuzluluqları deyilir.

Beləliklə, elektrik sahəsinin gərginliyi \vec{E} baş oxlar üzrə yönəlidir. Bu baxımdan istənilən kristal bu üç istiqamət üzrə özünü izotrop dielektrik kimi aparır, hərçənd dielektrikdən fərqli olaraq kristal bütün üç baş istiqamətdə müxtəlif α_{11} , α_{22} və α_{33} polyarlaşma əmsallarının və müxtəlif ϵ_{11} , ϵ_{22} və ϵ_{33} dielektrik nüfuzluluğuna malik ola bilər. Amma kristalların simmetriya xüsusiyyətləri bu əmsallar üzərinə də müəyyən məhdudiyətlər qoyur. Məsələn, əgər, kristal kubik simmetriyaya malikdirsə, onda belə kristallar üçün $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 0$ olur. Bu isə o deməkdir ki, xarici elektrik sahəsində kubik kristallar elektrik polyarlaşması baxımından izotrop dielektriklərdən heç nə ilə fərqlənmirlər, həm də $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33}$ münasibəti kubik kristallar üçün sahənin istiqamətindən asılı olmur.

Orta sinqoniya kateqoriyasına mənsub olan, yəni tetraqonal, heksoqonal və romboedrik simmetriyalı kristallar isə $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} \neq \epsilon_{33}$ münasibəti ilə xarakterizə olunurlar. Deməli, bu kateqoriyadan olan kristallar qiymətcə müxtəlif iki elektrik nüfuzluluğuna (ϵ_1 , ϵ_3) malikdirlər. Bu kristallarda dielektrik nüfuzluluğu ϵ_3 -ün yönəldiyi istiqamət ən yüksək tərtibli simmetriya oxunun istiqaməti ilə üst-üstə düşür. Aşağı kateqoriya sinqoniya sinfinə daxil olan kristalların bütün baş istiqamətləri və dielektrik nüfuzluluğu bir-birindən fərqli olur $\epsilon_{11} \neq \epsilon_{22} \neq \epsilon_{33}$. anizotrop dielektriklərdə \vec{D} , \vec{E} və \vec{P} sahələrinin ümumi hal üçün oriyentasiyaları aşağıdakı (şəkil 1.18.5) şəkildə qrafik təsvir edilmişdir.



Şəkil 1.18.5.

Onu da qeyd edək ki, dielektriklərin polyarlaşması yuxarıda dediklərimizdən fərqli başqa səbəblərdən də baş verə bilər. Məsələn, piroelektriklərdə (piroelektriklər, seqnetoelektriklər və pyezoelektriklər haqqında az sonra ətraflı danışacağıq) temperaturun dəyişməsi, pyezoelektriklərdə isə mexaniki təsirin nəticəsində baş verə bilər.

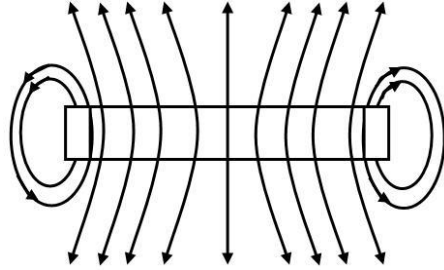
Yuxarıda da qeyd edilmişdir ki, son zamanlar tədqiqatçıların diqqətini daha bir polyarlaşma səbəbi cəlb etmişdir. Bu polyarlaşma maqnetoelektrik effekti ilə bağlıdır, yəni polyarlaşma dielektrik kristallarının maqnit sahəsinin təsiri ilə polyarlaşmasından və elektrik sahəsinin təsiri ilə maqnitləşməsindən ibarətdir. Sonuncu növ polyarlaşma tenzorial xarakterə malikdir. Maqnetoelektrik hesabına polyarlaşma polyar və polyar-neytral kristallarda baş verə bilər. Məsələn, $(4L_i3LP, 6L_i3LP; 6L_iP2L, 6L_i)$ seqnetoelektrik domenlərində baş verə bilməsini misal göstərmək olar. Maqnit sahəsi seqnetoelektrik domenlərində maqnetoelektrik effekti hesabına spontan polyarlaşmanın səmtini dəyişir.

Real kristalların tərkibində həmişə hər hansı qarışıqlar və defektlər olur ki, bu da bəzi proseslər nəticəsində elektrik polyarlaşmasına imkan yaradır. Belə polyarlaşmalara relaksasiya polyarlaşmaları deyilir, hətta bir çox dielektriklərdə relaksasiya polyarlaşması yerdəyişmə polyarlaşmasından güclü olur. Bu hal kifayət qədər saf olmayan kristallarda baş verir.

§1.19. Kristal elektrikbatareyası kimi

Fizika kursundan məlumdur ki, nikel və kobalt kimi metallarda sabit maqnitlilik halı mümkündür və bu metallarda elektronların maqnit momentlərinin nizamlı düzülüşünün nəticəsidir ki, bu da onların spontan maqnitləşməsi adlanır. Lakin dielektrikləri təşkil edən hissəciklərdən (elektron, proton, neytron) elektrik momentinə malik olanları yoxdur. Ona görə belə

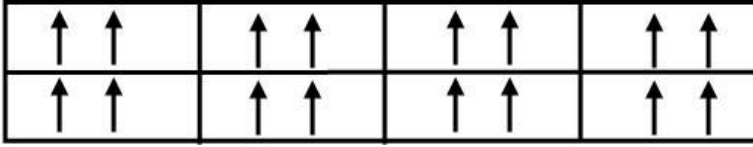
çıxır ki, dielektrlərdə bu analogiyaya əsasən uyğun elektrik polyarlaşmasının olmasını gözləmək olmaz. Amma elə maddələr var ki, ferromaqnitlərlə müqayisədə az öyrənilmişlər. Materiyanı, o cümlədən



Şəkil 1.19.1

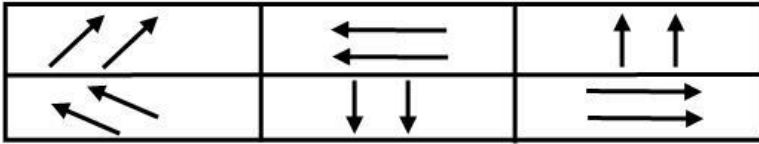
dielektrləri, təşkil edən hissəciklər həm müsbət və həm də mənfi elektrik yüklərinə malikdirlər. Buradan da aydın olur ki, əks işarəli yüklü hissəcikləri nizamlı düzülməyə məcbur edə bilsək (və ya özləri nizamlı düzülənlər) elektrik polyarlaşması alınır. Bəzi dielektrlərdə belə elektrik dipolları həqiqətən də mövcuddurlar və əgər onlar eyni istiqamətə yönələrək nizamlı düzülüblərsə, deməli, dielektrik spontan polyarlaşmışdır. Yəni heç bir xarici təsir, xüsusən də xarici elektrik sahəsinin təsiri olmadan polyarlaşmışdır. Deməli, spontan maqnitləşməyə paralel spontan polyarlaşma da vardır. Lakin spontan maqnitləşmiş maddələrlə spontan polyarlaşmış maddələr arasında fərq var. Bu ondan ibarətdir ki, bir dəfə maqnitləşmiş maddə maqnitlilik xassəsini istənilən qədər saxlaya bilər, ancaq spontan polyarlaşma tezliklə itə bilər. Bu isə onunla izah olunur ki, istənilən dielektrikin daxili keçiriciliyinin nəticəsində sonlu əks işarəli yüklər hərəkət edərək kristalın səthindəki bağlı yüklərə çatacaq onları neytrallaşdırırlar. Bundan da başqa, atmosferdə kristalın səthindəki bağlı yükləri neytrallaşdırmaq üçün həmişə kifayət qədər sərbəst yüklər tapılır. Ona görə də polyarlaşmış dielektrik (elektrik batareyası) tezliklə boşalır. Lakin bu zaman dielektrikin polyarlaşmış vəziyyəti yoxa çıxmır, ancaq sərbəst yüklərin əksişarəli sahəsi ilə kompensasiya olunur, həmin sahə götürüldükdə yenidən polyarlaşmış dielektrik alınır.

Spontan polyarlaşma baxımından dielektrlər iki cür olurlar. Birincilərdə dielektrikin hər yeri eyni istiqamətdə polyarlaşmış olur. Belə dielektrlərə piroelektrlər deyilir.



Şəkil 1.19.2. Bir istiqamətdə polyarlaşmış dielektrik (piroelektrik)

İkinci cür dielektriklər müəyyən sahələrə (domenlərə) bölünmüş olurlar ki, burada hər bir domenin öz polyarlaşma istiqaməti olur (şəkil 1.19.3). Belə dielektriklərə seqnetoelektriklər deyilir.



Şəkil 1.19.3. Domenlərə ayrılmış piroelektrik (seqnetoelektrik)

Aydındır ki, seqnetoelektriklər domenlərə ayrılmış piroelektriklər olmaqla piroelektriklərin xüsusi halıdır. Əslində piroelektriklər xətti dielektriklərdir. Bu o deməkdir ki, piroelektriklərdə polyarlaşma elektrik sahəsinin xətti funksiyasıdır.

$$\vec{P} = \alpha \vec{E}, \quad \alpha = \text{const} \quad (1.19.1)$$

Seqnetoelektriklərdə isə polyarlaşma elektrik sahəsinin qeyri-xətti funksiyasıdır.

$$\vec{P} = \alpha(\vec{E})\vec{E} \quad \alpha(\vec{E}) \neq \text{const} \quad (1.19.2)$$

Kristalların piroelektrik olanlarını onların simmetrikliliyinə əsasən seçmək olar. Doğrudan da əgər kristal spontan polyarlaşa bilirsə, onda polyarlaşmanın istiqaməti təməmilə müəyyəndir (deməli yeganədir) və polyardır. Beləliklə, kristaldakı polyarlaşma məxsusi polyar istiqmətə uyğundur və dməli

spontan polyarlaşa bilən kristallar aşağıdakı 10 polyar siniflərdən birinə daxil olmalıdır. O siniflər bunlardır:

L; 2L; 3L; 4L; 6L; P; 2L2P; 3LP; 4L2P; 6L2P

Lakin bunun tərsi doğru deyil. Polyar vektorla təkcə spontan polyarlaşma ifadə olunmur. Ola bilər ki, kristalda polyar istiqamətin yaranmasında onun hər hansı bir xüsusiyyəti rol oynasın. Onu da qeyd etmək lazımdır ki, təcrübədə bu 10 sinfin birinə daxil olan kristal əksər hallarda həmişə spontan polyarlaşa bilər. Kristalların spontan polyarlaşmasının mütləq qiymətini təqribi olaraq aşağıdakı mülahizəyə əsasən təyin etmək olar:

Göstərmişdik ki, kristalın polyarlaşması (o cümlədən spontan polyarlaşması da) ədədi qiymətcə səthi yüklərin sayına bərabərdir. Limit halında o kristalın elementar qəfəsinin səthində yerləşən bütün elektronların yükləri cəminə bərabərdir. Deməli, ən sadə halda qəfəsin bir kvadrat santimetrinə düşən qovşaq nöqtələrini saymaq kifayətdir.

$$N = \frac{1}{a^2}.$$

Burada a qəfəsin parametridir.

Qələvi halloid kristallar üçün $a \approx 6 \cdot 10^8$ sm.

Buradan $N \approx 3 \cdot 10^{14}$ sm⁻².

Adətən spontan polyarlaşma Kulonlarla ifadə olunur.

$$1 \text{ mK} = 3 \cdot 10^3 \text{ el.v}$$

(yükün bir elektrostatik vahidi = $3^{-1} \cdot 10^3$ mK) və deməli

$$\sigma \cong 40 \frac{\text{mK}}{\text{sm}^2}.$$

İ F Ə S İ L.

SEQNETOELEKTRİKLƏR

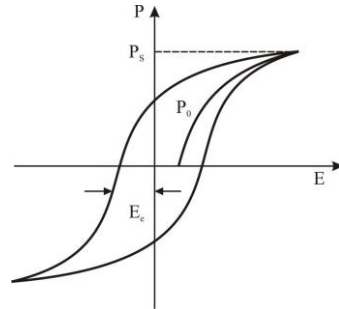
§2.1. Ümumi məlumat

Müəyyən temperatur aralığında spontan polyarlaşma qabiliyyətinə malik dielektrik materiallara seqnetoelektriklər deyilir. Seqnetoelektriklər mahiyyətcə domenlərə ayrılmış piroelektriklərdir. Piroelektriklərdə isə kristalların bütün baza elementlərində elektrik dipolları eyni istiqamətə yönəlmiş olurlar.

Seqnetoelektriklərdə baza elementləri dipollarının eyni istiqamətə yönəlməsi bir domen hüdudunda olur, qalan domenlərdə dipollar müxtəlif oriyentasiyalara malik olurlar. Pyezoelektrik termini altında sözün əsl mənasında spontan polyarlaşmış xətti dielektriklər başa düşülür. Xətti sözü isə onu göstərir ki, bu cür dielektriklərdə polyarlaşma elektrik sahəsinin gərginliyinin xətti funksiyasıdır, seqnetoelektriklərdə isə bu asılılıq qeyri-xəttidir. Ötən əsrin ortalarına qədər seqnetoelektriklər haqqında demək olar ki, heç nə məlum deyildi. Seqnetoelektriklər haqqında ilk məlumatı 1921-ci ildə çex alimi Valaşak vermişdir. Onun tədqiqatları XX əsrin ortalarında o zamankı Leninqrاد Fizika-Texnika İnstitutunun əməkdaşlarından İ.V.Kurçatov, P.İ.Koveko və başqaları tərəfindən davam etdirilmişdir. Seqnetoelektrik termini də İ.V.Kurçatova məxsusdur (əcnəbi alimlər onu ferroelektriklər adlandırırlar ki, bu da o qadar də uğurlu seçim deyil). Seqnetoelektriklərin öyrənilməsində görkəmli rus alimi V.M.Vulun [16-18] tədqiqatları da əhəmiyyətli rol oynayıb. 1944-45-ci illərdə Sovet alimləri ilə paralel Yaponiya və Amerika alimləri də özləri üçün seqnetoelektrikləri kəşf etdilər. Bu hadisə pyezokeramikanın meydana çıxmasının başlanğıcı oldu. Lakin barium titanat üçün pyezoelektrik effekti xeyli sonralar aşkarlanmışdır. Spontan polyarlaşmanın dəyişə bilməsi imkanı onunla izah edilir ki, seqneto-

elektrikin polyar quruluşu əslində azacıq təhrif olunmuş qeyri-polyar quruluşdur. Məsələn, barium-titanat 120°C -dən yuxarı temperaturlarda seqnetoelektrik deyil və onun elementar qəfəsi kubik quruluşa malikdir, 120°C -dən aşağı temperaturlarda isə tetraqonal qəfəsə, yəni kubun çəplənmiş formasından ibarət qəfəsə malik olur. Bir sıra seqnetoelektrlərdə elektrik sahəsinin təsiri altında dielektrik xassəsinin qeyri-xəttiliyi müşahidə olunur. Seqnetoelektrikin polyarlaşmasının xarici elektrik sahə gərginliyi \bar{E} -dən asılılığı histerizes ilgəyi adlanan əyri ilə təsvir olunur (şəkil 2.1.1).

Şəkildən də görüldüyü kimi əvvəlcə polyarlaşma \bar{P} , gərginlik \bar{E} ilə qeyri-mütənasib asılı olur. Lakin polyarlaşma müəyyən P_0 qiymətinə çatdıqdan sonra asılılıq düz mütənasibliyə çevrilir. Bu nöqtədə polyarlaşmanın qiyməti spontan və induksiyanmış polyarlaşmaların cəminə bərabərdir. Spontan polyarlaşmanın xətti hissəsini P oxu ilə kəşisənə qədər ekstrapolyasiya etməklə tapmaq olar. Elektrik sahəsinə yox etdikdən sonra qalıq polyarlaşma P_0 saxlanılır və nəhayət bu polyarlaşmanın yox olmasına uyğun olan elektrik sahəsi E_c -yə koersitiv sahə deyilir.

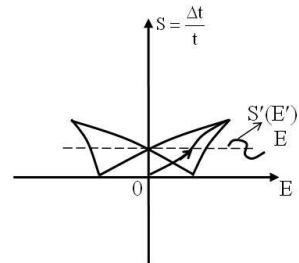


Şəkil 2.1.1.

Elektrik sahəsi dielektriki sahə istiqamətində deformasiyaya uğradır.

Mexaniki deformasiya ilə sahə arasındakı asılılıq kəpənək tipli histerizes ilgəyi ilə xarakterizə olunur.

Ən böyük dəyişən sahə periodik dəyişən $S'(E')$ deformasiyasını yaradır və tərsinə periodik deformasiya elektrik yüklərinin periodik



Şəkil 2.1.2.

dəyişməsinə gətirir. (şəkil 2.1.2).

Beləliklə, seqnetoelektriklər üçün aşağıdakılar xarakterikdir:

- sabit polyarlaşmanın mövcudluğu və onun istiqamətinin elektrik sahəsinin təsiri altında dəyişməsi;
- domen strukturunun mövcudluğu;
- xarici elektrik sahəsi ilə polyarlaşma arasında asılılığın mövcudluğu;
- dielektrik nüfuzluluğunun yüksək olması.

Dielektriklərdə seqnetoelektriklik halı bir qayda olaraq aşağı temperaturalarda (Kuri temperaturu) baş verir.

Sabit polyarlaşmanın dəyişə bilməsi və onun nəticəsində polikristallik cisimlərdə qalıq polyarlaşmanın peyda olması seqnetoelektriklərdən pyezoelektrik keramika hazırlamağa imkan verir. Lakin bu ancaq o seqnetoelektriklərdə mümkündür ki, onlar keramiuka tozunu bişirmək üçün zəruri olan yüksək temperaturalarda aşınmasınlar.

Seqnetoelektriklərdə dielektrik itgisinin olması və dielektrik nüfuzluluğunun temperaturdan asılılığı onların mümkün tətbiq sahələrini bir qədər də genişləndirir, belə ki, seqnetoelektriklərin idarə oluna bilməsi onlarda dielektrik nüfuzluluğunun sabit elektrik sahəsindən asılılığı ilə müəyyən edilir. Buna seqnetoelektriklərin reversivlik xassəsi deyilir. Seqnetoelektriklərin reversivlik xassəsi sabit və ya yavaş dəyişən elektrik sahəsi ilə idarə olunan qeyri-xətti elementlər kimi tətbiqinə imkan yaradır. Qeyd etmək lazımdır ki, praktik tətbiq sahəsi keramik seqnetoelektriklərin əksəriyyəti üçün onların temperatur dayanıqsızlığı ucbatından xeyli məhdudlaşır. Onların parametrlərinin elektrik sahəsinin amplitudundan asılılığı və yüksək tezliklərdə reversivliyin saxlanması onları bir sıra funksional qurğuların (gücləndiricilər, modulyatorlar və s.) yaradılmasında tətbiq etməyə imkan verir.

Seqnetoelektriklərin yuxarıda dediyimiz xassələri onlarda ayrı-ayrı oblastlarda (domenlərdə) spontan polyarlaşmanın

mövcud olması ilə əlaqədardır. Belə metallarda spontan polyarlaşma əsasən iki halda ola bilər: a) seqnetoelektrik halı – bu halda domenlər eyni oriyentasiyalı elementar qəfəslərin toplusundan ibarət olur; b) antiseqnetoelektriklik halı – bu halda isə domenlər eyni polyar lakin əksistiqamətli (antiparalel) elementar qəfəslərin alt toplusundan ibarət olur. Belə olduqda dipolların momentləri cəmi sıfıra bərabər olur.

Yuxarıda dediyimiz kimi spontan polyarlaşmanın yoxa çıxmasına uyğun olan temperatura Kuri nöqtəsi (və ya Kuri temperaturu) deyilir. Bu nöqtədən yuxarı temperaturalarda polyarlaşmış haldan polyarlaşmamış hala faza keçidi baş verir. Bu hala piroelektriklik halı deyilir.

Yuxarıda sadalanan bütün xarakteristikalarına görə seqnetoelektrikləri üç qrupa bölürlər:

Birinci qrupa dielektrik nüfuzluluğu elektrik sahəsinin nisbətən az dəyişməsinə kiçik dəyişmə ilə cavab verən metalları daxil edirlər. Seqnetoelektriklərin bu qrupu barium-titanat əsasında hazırlanırlar və yüksək qeyri-xəttilik və elektrik xarakteristikalarının müxtəlifliyi ilə seçilir.

İkinci qrupa yüksək (ifrat yüksək tezliklər də daxil olmaqla) tezliklərdə kiçik dielektrik itgisinə malik olan seqnetoelektriklər və antiseqnetoelektriklər daxil edilir. Piroelektrik fazada piroelektriklər də bu qrupa daxil edilirlər.

Üçüncü qrupa temperaturun geniş diapazonunda dielektrik nüfuzluluğu az dəyişən seqnetoelektriklər daxil edilirlər. Bu qrupa Kuri nöqtəsi yüksək müsbət temperatur oblastına daxil olan və dielektrik nüfuzluluğu seyrəlmiş (размытый) maksimuma malik olan seqnetoelektriklər də daxil olurlar. Belə metallara P_6TiO_3 (qurğuşun titanat), $P_6Nb_2O_6$, $PbTa_2O_6$, $(Pb_xBa_{1-x}) \times ZrO_3$ və s. misal ola bilərlər.

Eyni kristalda müxtəlif temperaturalarda müxtəlif elektrik nüfuzluluğu piroelektrik, paroelektrik, seqnetoelektrik və antiseqnetoelektrik halları ola bilər, bu halların üçü də baş verə bilər. Elə kristallar da var ki, onlarda bir istiqamətdə piro-

elektrik o biri istiqamətdə isə seqnetoelektriklik nizamlılığı mövcud olur.

Son zamanlar qeyri-məxsusi seqnetoelektriklər adlanan seqnetoelektriklərin tədqiqinə diqqət artmışdır. Bu maddələr də makroskopik polyarlaşmalı domenlərə malikdirlər, lakin bu polyarlaşmanın qiyməti adətən çox kiçik olur. Bu isə onunla əlaqədardır ki, qeyri-məxsusi seqnetoelektriklərdə faza keçidi spontan polyarlaşmanın hesabına deyil hər hansı başqa fiziki hadisə səbəbindən baş verir. Bu, məsələn, kristalın deformatsiyaya uğraması, optik aktivliyin əmələ gəlməsi və s. səbəblər ola bilərlər. Ona görə də spontan polyarlaşma qeyri-məxsusi seqnetoelektriklərdə faza keçidi üçün parametr rolu oynaya bilməz. Qeyri-məxsusi seqnetoelektriklərin tipik nümayəndələri qadolin-molibdenit $Cd_2(M_3O_4)$, fluorberillat $(NH_4)BeF_4$ sayıla bilərlər.

Hazırkı vaxtda seqnetoelektrik xassəsinə malik olan yüzdən çox maddə mövcuddur və seqnetoelektriklər bütün elektrik kristalları arasında ən çox tətbiq olunandır.

Spontan polyarlaşmanın meydana çıxması baxımından bütün seqnetoelektrikləri iki qrupa ayırmaq olar. Birinci qrup üçün spontan polyarlaşma müəyyən struktur elementlərinin (məsələn, hidrogen əlaqəsinin) nəticəsi olur. İkinci qrup üçün isə strukturda keçidə qədər mərkəzi simmetriya mövqeyi tutan ionların yerdəyişməsi nəticəsində baş verir.

§2.2. Pyzeoelektriklər, elektrostruksiya və pyzoeffekt

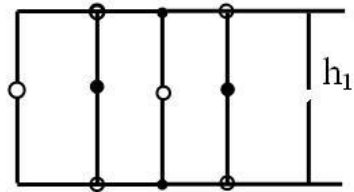
Elektrik sahəsində yerləşdirilmiş dielektrik polyarlaşır, yəni polyarlaşma vektoru \vec{P} dəyişir və bu dəyişmə vahid həcmə düşən dipol momentlərinin cəmi vasitəsi ilə təyin olunur:

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}}{\Delta V} \quad (2.2.1)$$

Belə ki, burada $\sum \vec{p}$ hissəciklərin (atom, molekullar və ionların) yekun elektrik momenti, ΔV bu hissəciklərin yerləşdikləri həcm, $\vec{P} = q\vec{\ell}$, $|\vec{\ell}|$ - dipolu təşkil edən müsbət və mənfi q yüklərinin ağırlıq mərkəzləri arasındakı məsafədir. Bu dəyişmə dielektriklərin həcmindəki elektrik yüklərinin vəziyyətinin dəyişməsi hesabına baş verir. Hər bir yük isə elementar hissəciklərlə bağlı olduqlarından, yüklərin bu dəyişməsi dielektrikin ölçülərinin dəyişməsinə gətirir.

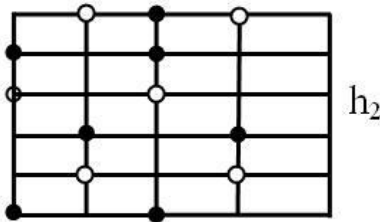
Dielektrikdən düzəlmiş h_1 qalınlıqlı lövhəyə baxaq. onun sadələşdirilmiş ikiölçülü strukturu Şəkil 2.2.1-dəki kimi olsun. Bu dielektrik iki növ hissəciklərdən əmələ gəlmiş, yəni mənfi A və müsbət B ionlarından əmələ gəlmiş olsun.

Bu quruluşun simmetriya mərkəzi var. Bu dielektriki elektrik sahəsində yerləşdirsək, onda ionların yerdəyişməsi hesabına lövhənin qalınlığı dəyişəcək və h_2 qalınlığına malik olacaq: $h < h_2$.

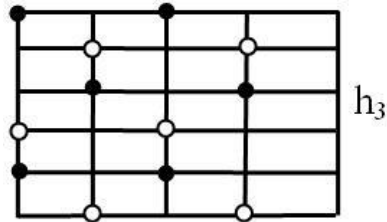


Şəkil 2.2.1.

Lakin elektrik sahə vektorunun istiqamətinin dəyişməsi deformasiyanın işarəsini dəyişməyəcək, sadəcə hissəciklər elə düzüləcəklər ki, $h_2 = h_3$ olacaq (Şəkil 2.2.3).



Şəkil 2.2.2.



Şəkil 2.2.3.

Dielektriklərdə deformasiya işarəsinin xarici elektrik sahə vektorunun istiqamətindən asılı olmamasına elektrostriksiya

deyilir. Beləliklə, deformasiya elektrik sahəsinin cüt funksiyası kimi təqdim edilə bilər. Birinci yaxınlaşma kimi onu

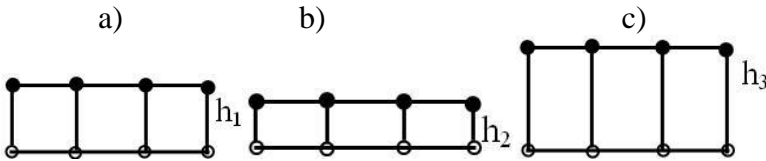
$$S = KE^2 \quad (2.2.2)$$

şəklində ifadə etmək olar. Burada k – elektrostriksiya əmsalındır və ümumiyyətlə 4-cü rəngli tenzordur (2.2.2) bərabərliyini ümumi şəkildə belə yazmaq olar

$$S_{ij} = K_{ijkl}E_l \quad (i,j,k=1,2,3) \quad (2.2.3)$$

Elektrostriksiya bütün dielektriklərdə müşahidə olunur. Xətti dielektriklərdə elektrostriksiya əmsalı çox kiçik olur (10^{-12} CGSE vahidi tərtibində). Kristal sıxıldıqda və ya dartıldıqda yüklü hissəciklər yerlərini dəyişirlər, lakin bu zaman dielektrikin ölçüləri və onların dipol momentləri dəyişsə də onun polyarlaşması dəyişmir. Bu onunla izah olunur ki, kristal mərkəzi simmetriyaya malik olduqda yüklər də mərkəzi simmetriyaya malik olurlar və müsbət yüklərin dipol momentlərinin dəyişməsi mənfi yüklərin dipol momentlərinin dəyişməsi ilə kompensasiya olunurlar və nəticədə yekun effekt sıfıra bərabər olur. Beləliklə, mərkəzi simmetriyaya malik olan kristalda əks elektrostriksiya effekti müşahidə olunur.

Mərkəzi simmetriyaya malik olmayan kristallarda isə vəziyyət təməmilə başqa xarakterli olur (şəkil 2.2.4).



Şəkil 2.2.4. Mərkəzi simmetriyaya malik olmayan yüklərin elektrik sahəsində vəziyyətlərinin dəyişməsi

Belə kristal T sıxılmasına məruz qaldıqda elementar moment azalacaq (çünki $h_2 < h_1$), dartılmaya məruz qaldıqda isə artacaq (çünki $h_3 > h_1 > h_2$). Bu isə kristalın neytrallaşmasına

gətirəcək və yaxud onun səthində yüklərin sıxlığını dəyişəcək. Mexaniki təsir nəticəsində elektrik momentinin dəyişməsi effektinə **pyzeoeffekt** deyilir. Bu zaman kristalın səthində elektrik yüklərinin sıxlığının və yaxud polyarlaşmasının dəyişməsi ilə mexaniki təsir arasındakı asılılıq birinci yaxınlaşmada

$$\bar{P} = d\bar{T} \quad (2.2.3.)$$

kimi, \bar{P} və T-nin bütün komponentlərinin iştirak etdiyi ümmi halda isə

$$\bar{P}_k = d_{kij}T_{ij} \quad (i,j,k=1,2,3) \quad (2.2.4)$$

kimi ifadə olunur. Buradan görünür ki, pyzeoeffekt tək funksiya ilə ifadə olunur. Yəni mexaniki təsir öz işarəsini dəyişdikdə polyarlaşma da öz işarəsini dəyişir. Baxdığımız kristalın elektrik sahəsində yerləşdirsək bu yüklü hissəciklərin yerdəyişməsinə səbəb olacaq. Sahənin bir işarəsi üçün bu yüklər bir-birinə yaxınlaşacaq (şəkil 2.2.4.b) başqa (əks) işarə üçün isə bir-birindən uzaqlaşacaqlar (şəkil 2.2.4 c). Beləliklə, elektrik strukturu mərkəzi simmetriyaya malik olmayan kristallarda tərs pyzeoeffekt də mövcuddur. Kristalın ölçülərinin dəyişməsi təsir edən elektrik sahəsi \bar{E} vektoru ilə düz mütənasibdir. Bu bir-ölçülü hal üçün

$$\bar{S} = d\bar{E} \quad (2.2.5)$$

kimi ifadə olunur. Ümumi halda \bar{E} və \bar{S} vektorlarının bütün komponentlərini nəzərə aldıqda isə

$$S_{ij} = d_{kij}E_k \quad (i,j,k=1,2,3) \quad (2.2.6)$$

kimi ifadə olunur.

Diqqət yetirmək lazımdır ki, tərs pyzeoelektrik effektində deformasiya və elektrik sahəsi elə polyarlaşma və mexaniki gərginliyi əlaqələndirən əmsallarla əlaqələnilir.

Simmetriya mərkəzinə malik olmayan strukturlarda elementar qəfəsin dipol momenti sıfırdan fərqli ola bilər və onlarda pyzeoelektrik xassəsi müşahidə oluna bilər. Lakin bu

pyezoelektrikin yaranması üçün zəruri olsa da kafi deyil. Buna baxmayaraq pyzeoeffekt hadisəsi kifayət qədər geniş yayılıb. Pyezoelektrik kristalların sayı bu gün mindən çoxdur. Amma təbii ki, birləşmələrin məhdud miqdarından istifadə olunur. Bütün dediklərimizi nəzərə alsaq pyezoelektriklərə belə tərif vermək olar:

Əgər mexaniki təsir kristalda elektriklik, yaxud elektrik polyarlığı yaradırsa, başqa sözlə sıxıldıqda və ya dartıldıqda elektricləşirsə, ya da elektrik sahəsinin təsiri ilə deformasiyaya uğrayırsa, onda belə kristala pyezoelektrik kristal deyilir. Bunlardan birinci iki təklif düzünə pyezoelektrik effektini, üçüncüsü isə təsr pyezoelektrik effektini ifadə edir.

Əslində bu təriflərin bəzi düzəlişlərə ehtiyacı var. Birincisi, sıxılma dartılma ilə əvəz olunduqda elektrik polyarlığının işarəsi dəyişir. Onda belə sual oluna bilər ki, kristal özünü necə elektricləşməli olduğunu haradan və necə bilir? Bu suala belə cavab vermək olar: - Pyezoelektrik kristalın daxili quruluşunda [44] səthin verilmiş hissəsində sıxılma zamanı əmələ gəlmiş işarəsini təyin edən müəyyən «birtərəfli istiqamət» var. Tərs effekt zamanı həmin «birtərəfli istiqamətlik» deformasiyanın işarəsini təyin edir. Elektrik sahəsinin istiqaməti dəyişdikdə deformasiyanın da öz işarəsini dəyişməsi pyezoelektriki elektrostriksiyadan fərqləndirir.

Belə birtərəfli istiqamətliyyə 32 kristal sinfindən yalnız 20-si malikdir. yerdə qalanlarında polyar istiqamət sıxılma zamanı heç nə ilə təyin olunmur. Elə bu səbəbə görə də onlar polyarlaşa bilmirlər.

İkincisi mexaniki təsir sıxılma və ya dartılma ola bilər. amma o sürüşmə də ola bilər (bu isə sıxılma ilə sıx bağlıdır isbatı [27]).

Bütün kristal sinifləri arasında bircə sinif var ki, bu sinifdə polyarlaşma istənilən tipli istənilən gərginliklə meydana gələ bilər, həm də bu zaman polyarlaşmanın intensivliyi təbii olaraq gərginlikdən asılı dəyişir. Bu sinif asimmetrik triklin sinfidir ki,

ən az simmetriyaya malikdir. Elə bir sinif mövcud deyil ki, orada pyezoelektrik polyarlaşması bircə və ancaq bircə istiqamətə malik olsun, lakin bir neçə elə siniflər var ki, polyarlaşma müəyyən müstəvi ilə təyin olunur. Bu zaman təsir edən elektrik sahəsinin bu müstəvi üzərində ən azı bir komponenti olmalıdır.

Bir halda ki, mexaniki gərginliyin 6, elektrik polyarlaşmasının isə 3 komponenti mövcuddur, onda aydındır ki, kristalın mexaniki elektrik halları arasında 18 mümkün münasibət olmalıdır. Bu münasibətlərə 18 pyezoelektrik sabitləri daxil olur ki, onlar sinfin simmetriyasının sabitlərinin sıfır da daxil olmaqla identik qiymətlərinə gətirdiyi hal istisna olmaqla bütün hallarda sərbəst və sıfırdan fərqli olurlar.

§2.3. Pyezoelektrik, effektlərin və reaksiyaların qısa şərh

Fərz edək ki, ixtiyari istiqamətli elektrik sahəsinə hemedrik triklin simmetriyalı kristalı daxil etmişik. Bu zaman bir sıra effektlər baş verir. Elektrik gərginliyi vektorunun hər bir komponenti daxili mexaniki gərginlik tenzorunun altı sərbəst komponentlərini əmələ gətirir ki, bunlara da pyezoelektrik gərginlikləri deyilir. Gərginliklərin tam sistemi yuxarıda dediyimiz kimi on səkkiz müxtəlif həddən ibarət olur (elektrik sahəsinin gərginlik vektorunun hər bir komponentinə mexaniki gərginliyin altı komponenti uyğun olmaqla). Bu gərginliklərin əmələ gətirdikləri deformasiyalara da deformasiyanın bütün mümkün tipləri daxil olur və bu kristalın bütün tilləri və onlar arasındakı bucaqların dəyişməsinə gətirir.

Lakin bu hələ hadisənin bütün təfərrüatlarını əhatə edə bilmir. Məsələn burasındadır ki, əgər kristalın üzləri elektrodlarla təmasda deyillərsə, onda onun səthində düz pyezoelektrik effekti kimi deformasiya nəticəsində polyarlaşma yükləri əmələ gəlir. Bu yüklər elektrik sahə vektorunun komponentlərinə müəyyən uyğun artımlar əlavə edirlər. Bu isə öz növbəsində gərginlik və deformasiyaların tam sistemini dəyişikliyə uğradır

və kristalın səthində yeni polyarlaşma yüklərinin əmələ gəlməsinə səbəb olur və s. Yekun nəticə isə bütün bu cür vəziyyətlərdən asılı olur.

Bundan əlavə, baxdığımız kristal həm də ötən paraqraflarda dediyimiz kimi pyezolektrik siniflərdən heç olmazsa birinə mənsub olduğundan elektrik sahəsi piroelektrik effekti hesabına onda müəyyən temperatur dəyişməsinə səbəb olur ki, bu da elastiklik sabitlərinə və deməli, nəticədə deformasiyalara və habelə piroelektrik effekti vasitəsi ilə polyarlaşmanın vəziyyətinə təsir edir.

Nəhayət, kristalın deformasiyası həm də elektrostriksiya effekti hesabına da dəyişir və bu da öz növbəsində polyarlaşmanın sonrakı dəyişməsinə gətirir. Kristalın son halına bu termik və elektrostriksiya effektlərinin təsiri də daxil olur. Lakin bunlar çox kiçik olduqlarından adətən nəzərə alınmırlar. Bu dediklərimizin öyrənilməsi pyezoelektrika nəzəriyyəsinin predmetini təşkil edir.

§2.4. İzomorfluq

Seqnetokeramika və peyzokeramika bəhslərini, habelə onların sintezlərini daha yaxşı bilmək üçün kristallarda izomorfizm və polimorfizm, habelə kristal qəfəsinin enerjisi anlayışlarının şərhinə ehtiyac var.

Kristal qəfəsinin enerjisi dedikdə bərk kristal qəfəsində izolə olunmuş halda yerləşən kation və anionların birləşməsi zamanı ayrılan enerji miqdarı başa düşülür və yaxud, başqa sözlə desək, maddənin bir qrammolunu ionlara parçalamaq üçün sərf olunan iş miqdarıdır.

Bilirik ki, metal ərintiləri dəyişən tərkibli kristallik quruluşa malikdir. Bu quruluşda bir elementin atomları o biri elementin kristal şəbəkəsinin aralıqlarında yerləşirlər. Bunlara ikinci növ bərk məhlullar deyirlər. Birinci növ məhlullarda isə bir kristallik maddənin atom və ya ionları başqa kristallik maddə-

nin atom və ya ionları ilə əvəz oluna bilər və bunlar kristal şəbəkəsinin qovşaqlarında yerləşirlər. Bu qəbildən olan məhlullara izomorf qarışıqlar deyilir.

Təbiətdə elə elementlərə rast gəlinir ki, onların əksəriyyəti özləri kristal şəbəkəsinə malik olurlar, lakin başqa mineralların tərkibində izomorf qarışıqlar şəklində (burada aparıcı element izomorf olaraq ikinci dərəcəli elementlə əvəzlənir) tapılırlar. Bu ikinci dərəcəli elementlərə rubidiy, indium, kadmium, rallium və s. misal ola bilər. Beləliklə, elementlərin (atomların və ya ionların) kristal şəbəkəsində onun quruluşuna xələl gətirmədən bir-birini əvəz edə bilmə xüsusiyyətinə izomorfizm deyilir.

Müəyyən şəraitdə izomorfizmin meydana gəlməsi üçün bir sıra şərtlərin ödənilməsi vacibdir:

- ancaq eyni işarəli ionlar bir-birini əvəz edə bilər, yəni kation kationla və ion ionla əvəzlənə bilər;
- ölçüləri yaxın olan atom və ya ionlar bir-birini əvəz edə bilərlər. V.M.Qoldsmidə görə əvəz olunan ion radiusu ilə əvəz edən ion radiusunun fərqləri kamil izomorfizmdə 15%-i aşmamalıdır, qeyri-kamil izomorfizmdə isə 25%-i aşmamalıdır. Əgər $[(R_2 - R_1) : R_1] \cdot 100 > 40\%$ -dirsə, izomorfizm ümumiyyətlə mümkün deyil. Məsələn, qeyri-kamil izomorfizmdə Fe^{2+} ionunu Mg^{2+} ionu ilə çox məhdud hallarda əvəz etmək olar;
- polyarlıq dərəcəsi yaxın olan, yəni ion-kovalent əlaqəsi dərəcəsi yaxın olanlar bir-birini əvəz edə bilər;
- izomorf əvəzetmə elə baş verməlidir ki, kristal şəbəkəsinin elektrostatik balansını pozulmasın;
- verimliş kristal quruluşunda ancaq kordinasiya ədədləri eyni olan elementlər bir-birini əvəz edə bilər;
- izomorf əvəzlənmə kristal qəfəsinin enerjisinin artma istiqamətində getməlidir.

Qeyd etmək lazımdır ki, öz geokimyəvi tərkiblərinə görə yaxın olan elementlər cütü üçün izomorfluq dərəcəsi müxtəlif

olur. İzomorfluq həm də kristal şəbəkəsinin quruluşundan da asılıdır. Məsələn, sluyadada kalium seziumla əvəz edilə bilər, lakin kaliumun çöl şpatında bu əvəzlənməsi məhdud dairədə mümkündür. Buradan belə nəticə çıxartmaq olar ki, kristal qəfəsinin hər bir ionu özünün izomorfluq xüsusiyyətinə malikdir ki, bu da onun başqa ionlarla əvəzlənmə həddini müəyyən edir.

Bir neçə ionun bir-birini izomorf əvəz etməsini yazıda ifadə etmək üçün onlar əyri mötərizə daxilində onların kristaldakı miqdarının azalma sırası ilə düzüb vergüllə bir-birindən ayırırlar. Məsələn, $(Ca, Mn, F)CO_3$ yazısı göstərir ki, karbonatda kalsium manqan və dəmirlə əvəz oluna bilər manqan isə dəmirlə əvəz oluna bilər.

İzomorfluğu 4 tipə ayıraraq öyrənirlər:

1) izovalent; 2) geterovalent; 3) izostruktur; 4) polimorfizm.

İzovalent izomorfizm ion radiusları fərqi 15%-i aşmayan eyni valentli ionların əvəz edilməsi ilə xarakterizə olunur. Aydın ki, burada yuxarıda sadalanan şərtlərə əməl edilməsi nəzərdə tutulur. Məsələn, Na və Ca üçün

$$\frac{R_N - R_C}{R_N} \cdot 100 = \frac{0,98 - 0,96}{0,98} \approx 0,02\% < 15\%$$

olması göstərir ki, natrium və mis izomorf/atomlardır, lakin onların müxtəlif polyarlaşma dərəcələri ucbatından aralarında izomorfluq mümkünsüzdür.

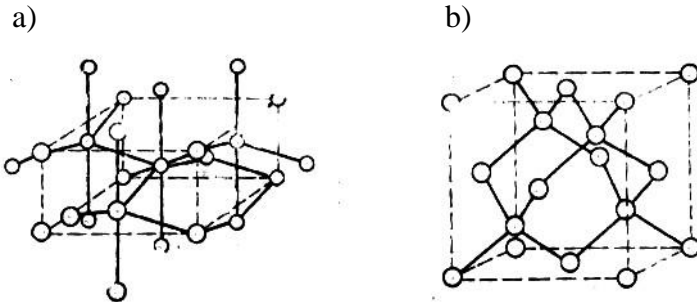
Geterovalent izomorfizm zamanı müxtəlif valentli ionların bir-birini əvəz etməsi baş verir. Belə əvəzləmədə bir ion kristal qəfəsinin balansını pozmadan başqası ilə əvəz oluna bilməz. Ona görə də geterogen izomorfizmdə ion ionla deyil müəyyən valentli ionlar qrupu yekun valentliyi eyni olan başqa ionlar qrupu ilə əvəz olunur. Yadda saxlamaq lazımdır ki, valentliyi bir cür olan ion, valentliyi başqa cür olan ionla əvəzlənmə valentliyin kompensasiya olunması ilə müşayiət olunmalıdır. Bu isə birləşmənin kation və eləcə də anion hissəsində ola bilər. burada da aşağıdakı şərtlərə əməl edilməlidir:

a) əvəzlənən ionların valentləri cəmi əvəz edən ionların valentləri cəminə bərabər olmalıdır;

b) əvəz edən ionların ion radiusları cəmi əvəz olunan ionların ion radiusları cəminə yaxın olmalıdır, daha doğrusu onların fərqi 15%-i aşmamalıdır.

İzostruktur izomorfizm. Bu izomorfizm onunla xarakterizə olunur ki, bu zaman bir ionun başqası ilə yaxud bir ionlar qrupunun başqa ionlar qrupu ilə əvəz olunması deyil bir kristal qəfəsinin (elementar qəfəs) tam «bloku» başqa bunun kimi «blok»la əvəz olunma prosesi baş verir. Bu isə o zaman mümkündür ki, kristalların quruluşu eynitipli olsun və elementar qəfəslərin ölçüləri yaxın olsun. Məsələn, vellimit mineralında $Zn_2[SiO_4]$ həmişə berillium müşahidə olunur, lakin sinkin ion radiusu $0,78 \text{ \AA}$ berilliumun ion radiusu isə $0,34 \text{ \AA}$ -dir. Deməli, formal olaraq bunlar izomorf deyillər. Amma buna baxmayaraq vellimit $Be_2[SiO_4]$ -lə yəni finakiflə izostruktur izomorf durlar. Deməli, vellimitin kristal qəfəsində $Zn_2[SiO_4]$ -un $Be_2[SiO_4]$ -lə əvəz olunması baş verə bilər.

Polimorfizm sözü əsl mənasında çoxformalılıq deməkdir, yəni kimyəvi tərkibinə görə eyni olan maddənin müxtəlif quruluşda kristallaşmış, müxtəlif sinqoniyaya mənsub kristallar əmələ gətirməsi hadisəsidir. Məsələn, ağ qalay temperatur -18°C -dən aşağı düşdükdə dayanıqsız olur və toz kimi səpələnir, sonra isə boz qalay əmələ gətirəcək kristallik quruluşa malik olur.



Şəkil 2.4.1. a) ağ və b) boz qalay quruluşları

§2.5. Seqnetokeramika və pyezokeramika

Əvvəlcə qeyd edək ki, bu adlara daxil olan «keramika» sözü bizim bildiyimiz klassik mənada işlənən keramika mənasında işlənmişdir. Çünki bu keramikaların tərkibində gil qatışıq yoxdur, lakin onların hazırlanması texnologiyası klassik keramikanın hazırlanma texnologiyasının analoqu olduğundan burada da ənənəvi keramika sözü saxlanmışdır. Seqnetokeramika seqnetoelektriklərin sintezindən alınmış bərk məhlul, pyezokeramika isə polyarlaşdırılmış pyezoaktivlik xassəsinə malik olan seqnetokeramikalardır. Adi halda seqnetokeramika pyezoaktivlik xassəsinə malik deyil, çünki bu halda o xaotik şəkildə yerləşmiş kristallik dənələrdən və onların domenlərə ayrılmış halından ibarət izotrop maddədir, həm də bu domenlər müxtəlif istiqamətli spontan polyarlaşmış haldadırlar. Pyezokeramika isə anizotrop maddədir və bu anizotropluğun səbəbi seqnetokeramikada pyezoelektrik teksturun yaradılmasıdır.

Pyezokeramika çoxlu problemlərin həllində, ucuz, texnologiya baxımından asan başa gəldiyindən elektrik kristalları asanlıqla əvəz edə bilər. Başqa sözlə desək indi qədər qəbul olunmuş texnoloji sxemə görə ilk mərhələdə sintezləşdirilən materialın komponentlərinin, yəni sintezləşən materialların toz halına salınmış oksidlərinin mexaniki qarışığı hazırlanır, sonrakı ikinci mərhələdə isə yüksək temperatur şəraitində müəyyən tərkibə və xüsusiyyətə malik bərk məhlul hazırlanır. Yüksək keyfiyyətli məhsul almaq üçün bu zaman sintez olunan maddələrin izomorfluq şərtlərinə və əvvəlcədən hazırlanmış təlimata əməl edilir. Bu çərçivədən kənara çıxmaq materialın dielektrik nüfuzluluğuna, dielektrik itgisinə və digər parametrlərinə mənfi təsir göstərir.

İndiyə qədər dəfələrlə qeyd etmişdik ki, hazır monokristallardan və yaxud bərk polikristallardan lazım olan keyfiyyətdə hər hansı cihaz hissəsini hazırlamaq həm olduqca baha başa gələn, hətta əksər hallarda praktik qeyri-mümkün bir işdir.

Onu da qeyd etmişdik ki, onları asanlıqla pyezokeramika ilə əvəz etmək olur. Bunun üçün hazırlanacaq hissə üçün qəlib hazırlanır və oraya sintez olunacaq maddələrin oksidlərinin tozu (təlimata uyğun olaraq) tökülüb kipləşdirilir, sonra yüksək temperatur şəraitində bişirilib sintezləşdirilir. Bu alınan məhsul seqnetokeramika olur. Bundan sonra yenə də yüksək temperatur şəraitində alınmış seqnetoelektrik detalın səthinə metal hopdurulub onu elektrodlarla təchiz etmiş olurlar. Nəhayət onu yüksək sabit elektrtik sahəsində xeyli müddət saxlayırlar. Bu zaman elektrik sahəsinin təsiri altında seqnetokeramikanın domenləri elektrik sahə vektoru istiqamətində dönürlər, yəni seqnetokeramika polyarlaşıb pyezokeramikaya çevrilir. Sonra detal soyudulur və bununla da «dondurulmuş» qalıq polyarlaşmaya malik pyezokeramik detalın pəstahı alınmış olur. Məsələ bununla da bitmir və alınmış pəstah yeni emala məruz qalır. Bu emal prosesinə cilalama, dəqiqləşdirmə və s. daxildir və ancaq bundan sonra istənilən detal əldə edilmiş olur.

Seqnetokeramikanın polyarlaşdırılmasında məqsəd ondakı spontan polyarlaşmalı bütün domenlərin bütün polyarlaşma vektorlarının elə istiqamətlənməsinə nail olmaqdır ki, onların cəmi, yəni prosesin sonunda alınan qalıq polyarlaşma maksimum qiymətə malik olsun. Daha doğrusu seqnetokeramikanı polyarlaşdırmaqda məqsəd seqnetoelektrik nümunəsinə xarici elektrik sahəsi ilə təsir edib ondakı domenlərin mümkün qədər çox hissəsinin öz oriyentasiyalarını dəyişib dayanıqlı domen konfigurasiyası alınması üçün zəruri olan müddətdə təsir etməklə monodomen hala salmaqdır. Maksimal polyarlaşmaya nail olmaq üçün bütün spontan polyarlaşma vektorlarının sahənin istiqaməti ilə minimal bucaq əmələ gətirmələrinə nail olmaq zəruridir.

§2.6. Keramikanın pyezoaktivliyinin artırılması

Seqnetokeramikanın polyarlaşmamış izotrop haldan polyarlaşmış anizotrop hala keçməsi prosesi entropiyanın azalması və müəyyən qədər enerji sərfi ilə müşayət olunur. Bu enerjinin mənbəyi isə tətbiq olunan elektrik sahəsinin enerjisidir. Polyarlaşmamış haldan polyarlaşmış hala keçid aktiv xarakterli prosesdir. Ona görə də seqnetokeramikanın polyarlaşmamış haldakı sərbəst enerjisi polyarlaşma prosesinin gedişini asanlaşdırmalıdır. Polyarlaşmamış seqnetokeramikanın sərbəst enerjisinin artırılması yollarından biri polyarlaşmadan qabaq Küri temperaturunu aşan temperaturda bişirməkdir, polyarlaşma zamanı isə qızdırmaqdır. Bu domen strukturunun genişlənməsinə və defektlərin nizamsızlığına gətirir. Buna seqnetokeramikanın gəncəlməsi deyilir. Bu zaman sərbəst enerji artır, sonra isə köhnəlmə prosesində müəyyən minimal qiymətə yaxınlaşaraq azalır. Paraelektrik fazasından seqnetoelektrik fazasına keçid zamanı sürətli soyuma (buna seqnetokeramikanın bərkiməsi deyilir)-bərkimədə sərbəst enerjinin artması ilə müşayiət olunmalıdır. Bu zaman metalda dayanıqlı domen quruluşu yaranır. Bunun səbəbi sürətli soyumada əmələ gələn və kristal qəfəsinin bir sinqoniyadan başqasına keçməsi ilə güclənən daxili gərginlik ola bilər, çünki bu zaman spontan deformasiya yaranır.

Sürətli soyuma ola bilər ki, ona gətirir ki, domenlərin orta ölçüsü gəncəlmədəkindən kiçik olar. Bu da yeni fazanın rüşeymlərinin müvazinətsiz yaranması ilə əlaqədardır. Domenlərin ölçüləri kiçildikdə domen sərhədlərinin sahələri böyüyür və seqnetokeramikanın sərbəst enerjisi artır. Başqa bir mexanizm də mümkündür. O da mahiyyətə ondan ibətdir ki, sürətli soyuma zamanı sərbəst yüklər və qəfəsin defektləri «dondurulur» və domen sərhədlərində mövqelərini möhkəmləndirməyə macal tapmırlar, ya da domen sərhədləri defektlərdə möhkəmlənməyə macal tapmırlar. Onda defektlərdə və domen sərhədlərində hərəkət imkanı yüksəlir.

Seqnetokeramikanın Küri temperaturu və ya daha yüksək temperatur yolu ilə möhkəmləndirilməsi pyezoaktivliyinin əhəmiyyətli dərəcədə yüksəlməsinə gətirir. Möhkəmləndirmə təkcə pyezoaktivliyi artırmır o həm də polyarlaşmadan sonrakı köhnəlməni azaldır.

Gəncələşdirilmiş və möhkəmləndirilmiş nümunələr arasındakı fərq polyarlaşdırıcı elektrik sahəsinin artması ilə azalır.

§2.7. Pyezoelektriklərin fiziki sabitlərinin idarə oluna bilməsi

Pyezokeramikanın, ümumiyyətlə pyezoelektriklərin monokristallara nisbətən üstün cəhətlərindən biri də onların fiziki sabitlərinin idarə oluna bilməsidir. Fiziki sabitlərin idarə olunması dedikdə onların müəyyən xarici təsirlər vasitəsi ilə qiymətlərinin məqsədyönlü şəkildə dəyişdirilə bilməsi imkanının varlığı nəzərdə tutulur.

Praktikada pyezoelektriklər özlərinin yüksək dayanıqlı parametrlərə malik olmaları ilə fərqlənirlər. Lakin buna baxmayaraq çoxlu dəqiq cihazların hazırlanmasında bəzi pyezoelektrik hissələrdə müəyyən dəqiqliyə nail olmağa ehtiyac yaranır. Yaxşı ki, pyezoelektrik sabitlərinin məqsədyönlü şəkildə dəyişdirilə bilmə imkanları mövcuddur. Belə imkanların varlığı demək olar ki, bütün pyezoelektrik materiallara aiddir. Ancaq seqnetoelektrikdə özlərini daha qabarıq şəkildə göstərə bilirlər.

Məlumdur ki, xarici təsirin köməyi ilə dielektriklərdə pyezoelektrikliyin əmələ gəlməsinə nail olmaq, eləcə də bunun nəticəsi olaraq pyezoelektrik sabitlərinə təsir etmək mümkündür. Bu da öz növbəsində dielektrik mühitin simmetriya, habelə kəmiyyət və keyfiyyət tərəflərinin idarə olunmasına gətirir.

İdarəetməyə pyezoelektrik sabitlərinin özlərinin və komponentlərinin sayına təsir etmə və həmin sabitlərin öz qiymətlərinin dəyişdirilməsi daxildir.

İdarəetmə mikroskopik və makroskopik xarakterli ola bilər. Birinci halda idarə edən (siqnal) yoxdursa, pyzeoeffekt də yoxdur və o ancaq idarəedici siqnal olduqda peyda ola bilər. Məsələn, elektrostruksiya halında olan dielektrikdə polyarlaşdırıcı elektrik sahəsinin təsiri atomun yüklərinin yerini dəyişdirərək tək funksiya xarakterli effektin yaranmasına səbəb olur. Makroskopik idarəetmədə isə elə vəziyyət yaranır ki, bu vəziyyətdə pyzeoeffekt ancaq ayrı-ayrı domenlərdə yaranır, amma bütövlükdə sistemdə mikroblastların müxtəlif oriyentasiyalı olmalarına görə pyzeoeffektin yekunu özünü göstərə bilmir, ya da çox kiçik olur. Bu zaman idarəedici siqnal bir istiqamətdə kəmiyyət üstünlüyünə şərait yaradır. Bu da nəticədə bütövlükdə sistemdə pyezosabitlərin dəyişməsinə gətirir.

İdarəetməni polyarlaşdırıcı elektrik sahəsinin, mexaniki gərginliyin, temperaturun və ya bunların toplusunun vasitəsi ilə də yerinə yetirmək olar. Bundan başqa bir də pyezomühitin iş şəraitini dəyişməklə idarəetmə imkanı da var. Xüsusi halda da kristalın dəyişməsi gərginliyin (elektrik, mexaniki) dəyişdirilməsi hesabına ola bilər. Dielektrikdə simmetriya mərkəzinin olmamasının pyzeoeffektin əmələ gəlməsinin əsas şərti olmasını qeyd etmişik. Bu isə onu göstərir ki, qeyri-polyar dielektrikdə pyzeoeffekt xarici elektrik sahəsinin təsiri ilə yaratmaq olar. Pyezoeffektin idarə olunması dielektriklər üçün kifayət qədər xarakterik xüsusiyyətdir.

Keramikanın polyarlaşmasında əsas iki məqsəd güdüdür:

a) pyezoelektrik sabitləri üçün mümkün qədər daha yüksək və daha dayanıqlı qiymətlərə nail olmaq; b) pyezoelektrik sabitlərini idarə etmək.

Birinci halda lazım olan polyarlaşma pyezoelektrik maddəni yüksək temperaturda (Küri temperaturuna yaxın) və eyni

zamanda yüksək elektrik sahəsində saxlamaq, sonra isə bu vəziyyətdə soyutmaqla əldə edilir.

İkinci halda polyarlaşdırıcı elektrik sahəsi pyezoelektrik sabitləri ilə təyin olunan fiziki proses üçün siqnal rolunu oynayır. İdarəetmənin kəmiyyət tərəfi müəyyən mənada idarəedici siqnalın dəyişmə sürətindən asılıdır. Pyezoelektriklərin çoxölçülü idarə olunmasının mümkünlüyü haqqında tədqiqatlar göstərir ki, pyezokeramika polyarlaşdırıcı sahənin bütün koordinat oxları istiqamətində təsiri vasitəsi ilə yaxşı idarəolunma xüsusiyyətinə malikdir.

Monolit pyezoelektrik qurğularda idarəedici təsirlər elementdən elementə ancaq elektrik siqnalları şəklində deyil, həm də mexaniki impulslar şəklində də ötürülə bilər. Bununla əlaqədar olaraq pyezoelektrik xassələrin mexaniki gərginliklər vasitəsi ilə idarə olunması da maraq doğurur. Məsələn, bu xassədən mexaniki kəmiyyətlərin göstəricilərini (pyezodatçikləri) hazırlamaq üçün istifadə etmək olar.

Mərkəzi simmetriyaya malik olmayan mexaniki təsirlər xüsusi maraq doğurur. Doğurdan da, simmetriya qruplarının superpozisiyası haqqında Kuri prinsipinə əsasən xarici təsir nəticəsində kristal mühitin simmetriyası dəyişir, bu isə Neyman prinsipinə əsasən fiziki xassələrin dəyişməsinə gətirir. Bununla əlaqədar aşağı simmetriyalı lakin çoxkomponentli təsir mühitin simmetriya və xassələrin böyük dəyişikliyinə gətirə bilər.

Mexaniki təsir öz-özlüyündə polyarlaşmamış və yaxud mərkəzi simmetriyasız keramikada polyarlaşma prosesi yarada bilməz, lakin mexaniki təsir artıq polyarlaşmış keramikanın polyarlığını dəyişdirə bilər. Əgər dəyişən elektrik sahəsində yerləşdirilmiş seqnetoelektrik mexaniki təsirə məruz qalarsa, onda onun dielektrik polyarlaşma xarakteristikası deformasiyaya uğrayır və bu deformasiya mexaniki gərginliyin kəmiyyət göstəricisinin dəyişməsindən asılı olur. Bu dəyişikliyin xarakteri həm də mexaniki təsirin polyar oxa nəzərən oriyentasiyasından asılı olur.

Xüsusi halda seqnet düzlarında biroxlı mexaniki gərginlik histerizes ilgəyinin təhrif olunmasına gətirir.

Beləliklə, görürük ki, pyezokeramik, seqnetoelektrik və dielektrik sabitlərinin məqsədyönlü dəyişdirilməsi üçün lazım olan təsir vasitələri kifayət qədərdir.

§2.8. Kristalların simmetriyalarına uyğun dielektrik, pyezoelektrik sabitləri və elastiklik modulları tenzorları

Biz göstərdik ki, tenzorlardan istifadə koordinat sisteminin dəyişməsi ilə əlaqədar olan çoxlu hesablamaları daha sadə şəkildə yerinə yetirməyə, habelə müxtəlif maddi sabitlər arasında zəruri əlaqələrin tapılmasına, bəzi sabitlər məlum olduqda bir sıra başqa qohum sabitləri onların vasitəsi ilə təyin etməyə (4.9.28) imkan verir. Aşağıda müxtəlif kristallar üçün maddi sabitlərin onların simmetriyalarının xarakterini əks etdirən tenzorlarının [52]-dən əxz edilmiş struktur cədvəllərini veririk. Göstərilən kristalda 32 simmetriya sinfinə və 7 əsas sistemə ayrılmış kristallar üçün dielektrik nüfuzluğu, pyezoelektrik sabitləri və elastiklik modulları üçün uyğun iki, üç və dördvalentli tenzorların quruluşu verilib və orada tenzorun valentliyi uyğun sabitlərin tenzorial yazılışdakı indekslərin sayı ilə təyin olunması nəzərdə tutulur. Məsələn, C_{ij} elastiklik modulları tenzorlarla C_{lmnp} şəklində, yəni dördvalentli tenzor şəklində ifadə olunurlar. Hər hansı pyezokeramik konstruksiya elementinin öyrənilməsində başqa sabitlərin tenzoruna ehtiyac olarsa, (4.9.28) düsturları vasitəsi ilə onları asanlıqla tərtib etmək olar.

¹⁰. Müxtəlif kristal sinifləri üçün ikivalentli tenzorlar. Bütün kristal sinifləri üçün simmetrik münasibətlər çıxarılmışdır. İkivalentli tenzor (məsələn, dielektrik nüfuzluğu tenzoru ϵ_{ij}) müxtəlif kristal sinifləri üçün aşağıdakı şəkillərə düşürlər:

Triklin sistem üçün

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{vmatrix}$$

Monoklin sistem üçün

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{11} & 0 & \epsilon_{13} \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ \epsilon_{13} & 0 & \epsilon_{33} \end{vmatrix}$$

Rombik sistem üçün

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{vmatrix}$$

Tetraqonal, triqonal və heksaqonal sistemlər üçün

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{vmatrix}$$

Kubik sistem üçün

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{11} \end{vmatrix}$$

Bir izotrop kəsikli və z oxu ilə üst-üstə düşən ∞ tərtibli simmetriya oxlu mühit üçün

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}$$

2⁰. Müxtəlif kristal sinifləri üçün üçvalentli tenzorlar. Nümunə kimi pyezoelektrik h_{ij} tenzorlarına baxaq:

Sınıf 1. Monoedrik simmetriya şəkli, (1) simmetriyanın yoxluğu

$$\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} & h_{15} & h_{16} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} & h_{25} & h_{26} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} & h_{35} & h_{36} \end{vmatrix}$$

Sınıf 2. Simmetriyanın pinokoidal şəkli (2) simmetriya mərkəzinin varlığı

$$h_{ij} = 0$$

Sınıf 3. Simmetriyanın oxvari diedrik şəkli (2), oxu y oxu ilə üst-üstə düşür

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & h_{14} & 0 & h_{16} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & 0 & h_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{34} & 0 & h_{36} \end{vmatrix}$$

Sınıf 4. Simmetriyanın oxsuz diedrik şəkli (m), m müstəvisi y oxuna perpendikulyardır

$$\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & 0 & h_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{24} & h_{25} & h_{26} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & 0 & h_{35} & 0 \end{vmatrix}$$

Sınıf 5. Simmetriyanın prizmatik şəkli (2:m) simmetriya mərkəzi var.

$$h_{ij} = 0$$

Sınıf 6. Simmetriyanın rombo-tetraedrik şəkli (2:2) 2 oxu x, y, z oxları ilə üst-üstə düşürlər

$$\left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & h_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{36} \end{array} \right\|$$

Sınıf 7. Simmetriyanın rombo-piramidal şəkli (2:m) 2 oxu z oxu ilə üst-üstə düşür, m müstəviləri x və y oxlarına perpendikulyardırlar

$$\left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & h_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{24} & 0 & 0 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

Sınıf 8. Simmetriyanın rombo-dipiramidal şəkli (m·2·m) simmetriya mərkəzi var.

$$h_{ij} = 0$$

Sınıf 9. Simmetriyanın tetraqonal-tetraedrik şəkli ($\bar{4}$) $\bar{4}$ oxu z oxu ilə üst-üstə düşür

$$\left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & h_{14} & h_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_{15} & h_{14} & 0 \\ h_{31} & -h_{31} & 0 & 0 & 0 & h_{36} \end{array} \right\|$$

Sınıf 10. Simmetriyanın tetraqonal-piramidal şəkli (4) 4 oxu z oxu ilə üst-üstə düşür (bu tenzor da anizotrop mühitə aiddir. ∞ tərtibli simmetriya oxu var)

$$\left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & h_{14} & h_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{15} & -h_{14} & 0 \\ h_{31} & h_{31} & h_{33} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

Sınıf 11. Simmetriyanın tetraqonal-skalenoedrik şəkli $(\bar{4} \cdot m)$ 4 oxu z oxu ilə, 2 oxları x və y oxları ilə üst-üstə düşürlər

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & h_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{36} \end{vmatrix}$$

Sınıf 12. Simmetriyanın tetraqonal-trapesioedrik şəkli (4:2) 4 oxu z oxu ilə, 2 oxları x və y oxları ilə üst-üstə düşürlər

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & h_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Sınıf 13. Simmetriyanın tetraqonal-dipiramidal şəkli (4:m) simmetriya mərkəzi var

$$h_{ij} = 0$$

Sınıf 14. Simmetriyanın ditetraqonal-piramidal şəkli (4-m) 4 oxu z oxu ilə üst-üstə düşür, m müstəviləri x və y oxlarına perpendikulyardırlar:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & h_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{15} & 0 & 0 \\ h_{31} & h_{31} & h_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Sınıf 15. Simmetriyanın ditetraqonal-dipiramidal şəkli (m-4-m) simmetriya mərkəzi var

$$h_{ij} = 0$$

Sınıf 16. Simmetriyanın triqonal-piramidal şəkli (3) 3 oxu z oxu ilə üst-üstə düşür.

$$\begin{vmatrix} h_{11} & -h_{11} & 0 & h_{14} & h_{15} & -h_{22} \\ -h_{22} & h_{22} & h_{23} & h_{15} & -h_{14} & -h_{11} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Sınıf 17. Simmetriyanın romboedrik şəkli ($\bar{6}$) simmetriya mərkəzi var.

$$h_{ij} = 0$$

Sınıf 18. Simmetriyanın triqonal-trapesiyaedr şəkli (3:2) 3 oxu z oxu ilə, 2 oxu x oxu ilə üst-üstə düşürlər

$$\left\| \begin{array}{cccccc} h_{11} & -h_{11} & h_{13} & h_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h_{14} & -h_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

Sınıf 19. Simmetriyanın triqonal-dipiramidal şəkli (3:m) 3 oxu z oxu ilə üst-üstə düşür m müstəvisi z oxuna perpendikulyardır

$$\left\| \begin{array}{cccccc} h_{11} & -h_{11} & 0 & 0 & 0 & -h_{22} \\ -h_{22} & h_{22} & 0 & 0 & 0 & -h_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

Sınıf 20. Simmetriyanın ditriqonal-piramidal şəkli (3·m) 3 oxu z oxu ilə üst-üstə düşür, m müstəvisi y oxuna perpendikulyardır.

$$\left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & h_{15} & -h_{22} \\ -h_{22} & h_{22} & 0 & h_{15} & 0 & 0 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

Sınıf 21. Simmetriyanın ditriqonal-skaleoedrik şəkli ($\bar{6} \cdot m$) simmetriya mərkəzi var

$$h_{ij} = 0$$

Sınıf 22. Simmetriyanın ditriqonal-dipiramidal şəkli (m·3:m) 3 oxu z oxu ilə üst-üstə düşür. m müstəviləri z və y oxlarına perpendikulyardır.

$$\left\| \begin{array}{cccccc} h_{11} & -h_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

Sınıf 23. Simmetriyanın heksaqaonal-piramidal şəkli (6). 6 oxu z oxu ilə üst-üstə düşür

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & h_{14} & h_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{15} & -h_{14} & 0 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Sınıf 24. Simmetriyanın heksaqaonal-trapesiyaedrik şəkli (6:2). 6 oxu z oxu, 2 oxu x oxu ilə üst-üstə düşürlər.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & h_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Sınıf 25. Simmetriyanın heksaqaonal-dipiramidal şəkli (6:m) simmetriya mərkəzi var

$$h_{ij} = 0$$

Sınıf 26. Simmetriyanın diheksaqaonal-piramidal şəkli (6-m) 6 oxu z oxu ilə üst-üstə düşür, m müstəviləri x və y oxlarına perpendikulyardırlar.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & h_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{15} & 0 & 0 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Sınıf 27. Simmetriyanın diheksaqaonal-dipiramidal şəkli (m-6:m) simmetriya mərkəzi var

$$h_{ij} = 0$$

Sınıf 28. Simmetriyanın Pentaqon-tritetraedrik şəkli (3/2) 2 oxları x, y, z oxları ilə üst-üstə düşürlər.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & h_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{14} \end{vmatrix}$$

Sınıf 29. Simmetriyanın Pentaqon-trioktaedrik şəkli (3/4) simmetriya mərkəzi var

$$h_{ij} = 0$$

Sınıf 30. Simmetriyanın didodekaedrik şəkli ($\bar{6}/2$) simmetriya mərkəzi var

$$h_{ij} = 0$$

Sınıf 31. Simmetriyanın heksatetraedrik şəkli ($3/\bar{4}$) $\bar{4}$ oxları x, y, z oxları ilə üst-üstə düşürlər

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & h_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{14} \end{vmatrix}$$

Sınıf 32. Simmetriyanın heksaoktaedrik şəkli ($\bar{6}/4$) simmetriya mərkəzi var

$$h_{ij} = 0$$

Eninə izotrop mühit, ∞ oxu z oxu ilə üst-üstə düşür

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & h_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{15} & 0 & 0 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Matrislərin burada göstərilən formaları e_{ij} pyezoelektrik sabitləri üçün də doğrudur. Sürüşmə deformasiyalarının qəbul olunmuş tərifinə uyğun olaraq d və g pyezoelektrik sabitləri matrisləri 16, 18, 19 və 22 siniflər üçün h_{ij} -lər üçün yuxarıda göstərilən matrislərdən bir qədər fərqlənirlər

$$\text{Sınıf 16.} \begin{vmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & d_{14} & d_{15} & -2d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & d_{15} & -d_{14} & -2d_{11} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{Sinif 18. } \left\| \begin{array}{cccccc} d_{11} & -d_{11} & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{14} & -2d_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

$$\text{Sinif 19. } \left\| \begin{array}{cccccc} d_{11} & -d_{11} & 0 & 0 & 0 & -2d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & 0 & 0 & -2d_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

$$\text{Sinif 22. } \left\| \begin{array}{cccccc} d_{11} & -d_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2d_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

Sinif 20 üçün də matris fərqlidir və o belədir

$$\left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & -2d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

3⁰. Kristalların müxtəlif sinifləri üçün dördvalentli tenzorlar. Misal üçün elastiklik modulları tenzoruna baxaq.

Sinif 1.2. Simmetriya triklin sistem. 21 modul.

$$\left\| \begin{array}{cccccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{array} \right\|$$

Sinif 3; 4.5. Monoklin sistem. 13 modul.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & c_{15} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & c_{25} & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & c_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{46} & 0 & c_{66} \end{pmatrix}$$

Sınıf 6.7.8. Rombik sistem. 9 modul.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}$$

Sınıf 9.10.13. Tetraqonal sistem. 4 oxu z oxu ilə üst-üstə düşür. 7 modul.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}$$

Sınıf 11,12.14.15. Tetraqonal sistem. 4 oxu z oxu ilə üst-üstə düşür. 2 oxlar x oxu ilə üst-üstə düşürlər. 6 modul.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}$$

Bu 5 halin hamısı üçün elastiklik sabitləri tenzoru s_{ij} tamamilə c_{ij} tpenzornun forması ilə analojidir.

Sınıf 16.17. Triqonal sistem 3 oxu z oxu ilə üst-üstə düşür. 7 modul.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & -c_{25} & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & c_{25} & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} & -c_{14} & 0 & c_{44} & 0 & c_{25} \\ -c_{25} & c_{25} & 0 & 0 & c_{44} & c_{14} \\ 0 & 0 & 0 & c_{25} & c_{14} & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{pmatrix}$$

Elastiklik sabitləri tenzoru $S_{46}=2S_{25}$, $S_{56}=2S_{14}$, $S_{66}=2(S_{11}-S_{12})$ bərabərlikləri istisna olmaqla tamamilə analojidir.

Sınıf 18.20.21. 3 oxu z oxu ilə, 2oxu x oxu ilə üst-üstə düşürlər. 6 modlu

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} & -c_{14} & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14} & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{pmatrix}$$

Elastiklik sabitləri tenzoru, $S_{56}=2S_{14}$, $S_6 = 2(S_{11} - S_{12})$ komponentləri istisna olmaqla bu tenzora tam analogidir.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{pmatrix}$$

Elastiklik sabitləri tenzoru $S_{66}=2(S_{11} - S_{12})$ komponentindən başqa tamamilə oxşardır.

Sınıf 19.22,23,24.25,26.27. Heksoqonal sistem. 6 oxu z oxu ilə, 2 oxları x oxu ilə üst-üstə düşürlər. 5 modul.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{pmatrix}$$

Elastiklik sabitləri tenzoru $S_{66}=2(S_{11} - S_{12})$ istisna olmaqla bununla tam analogidir.

Sınıf 28.29,30.31.32. Kubik sistem. 3 modul.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix}$$

Elastiklik sabitləri tenzoru bununla istisnasız analogidir.
İzotrop cisim 2 modul

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{vmatrix}$$

$S_{44} = S_{55} = S_{66} = 2(S_{11} - S_{12})$ komponentlərindən başqa elastiklik sabitləri tenzoru tam oxşardır. Eninə izotrop mühit. ∞ oxu z oxu ilə üst-üstə düşür. 5 modulu var.

Eninə izotrop mühit ∞ oxu z oxu ilə üst-üstə düşür. 5 modulu

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{vmatrix}$$

Elastiklik sabitləri tenzoru $S_{66} = 2(S_{44} - S_{12})$ istisna olmaqla bununla tam analogidir.

III F Ə S İ L

TENZORLAR CƏBRİNİN ELEMENTLƏRİ

§3.1. Birinci və ikinci tərtib tenzor anlayışı

Fərz edək ki, üçölçülü Evklid fəzasında üst-üstə düşməyən iki $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ və $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$ ortonormal bazis vektorları verilib və onlar eyni başlanğıca malikdirlər. Bunlar üzərində iki dekart koordinat sistemi qurulmuş olsun. Bunlardan, bazis vektorları $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ olana birinci (və ya köhnə), bazis vektorları $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$ olana isə ikinci (və ya təzə) koordinat sistemi deyək. Onda ikinci bazisin ort vektorlarını birinci bazisin ortvektorları ilə belə ifadə etmək olar:

$$\begin{aligned}\bar{e}'_1 &= a_{11}\bar{e}_1 + a_{12}\bar{e}_2 + a_{13}\bar{e}_3 \\ \bar{e}'_2 &= a_{21}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + a_{23}\bar{e}_3 \\ \bar{e}'_3 &= a_{31}\bar{e}_1 + a_{32}\bar{e}_2 + a_{33}\bar{e}_3\end{aligned}\quad (3.11)$$

Göstərək ki, a_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) əmsalları uyğun olaraq təzə və köhnə ortların (bazislərin) vektorları arasındakı uyğun bucaqların kosinuslarıdır. Bunun üçün (3.1.1)-i birinci bazisin \bar{e}_1 vektoruna skalyar vuraq. Onda alarıq (nümunə üçün ancaq birinci bərabərliyi vururuq)

$$(\bar{e}_1, \bar{e}'_1) = a_{11}(\bar{e}_1, \bar{e}_1) + a_{12}(\bar{e}_1, \bar{e}_2) + a_{13}(\bar{e}_1, \bar{e}_3)$$

Lakin burada $(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = 1$ $(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = (\bar{e}_1, \bar{e}_3) = 0$ və deməli

$$(\bar{e}_1, \bar{e}'_1) = a_{11} = |\bar{e}_1| |\bar{e}'_1| \cos(\bar{e}_1 \wedge \bar{e}'_1)$$

Eyni qayda ilə (3.1.1) münasibətlərini birinci bazisin vektorlarına skalyar vurmaqla tapırıq:

$$a_{ij} = (\bar{e}_i, \bar{e}'_j) = \cos(\bar{e}_i \wedge \bar{e}'_j) \quad (3.1.2)$$

(3.1.2)-dən görünür ki,

$$a_{ij} = (\bar{e}_i, \bar{e}'_j) = (\bar{e}'_j, \bar{e}_i) = a_{ji} \quad (3.1.3)$$

Bu isə o deməkdir ki, $\|a_{ij}\|$ matrisi ilə $\|a_{ji}\|$ matrisi qarşılıqlı tərs matrislərdir, bundan başqa onlardan biri o birisinin transponirə olunmasından alınır. Bunu isbat etmək üçün fərz edək ki, (3.1.1)-in $\|a_{ij}\|$ matrisi cırılşmayandır. Onda (3.1.1) çevirməsinin tərs çevirməsi var və onu belə yazmaq olar:

$$\begin{aligned}\bar{e}_1 &= \bar{a}_{11}\bar{e}'_1 + \bar{a}_{12}\bar{e}'_2 + \bar{a}_{13}\bar{e}'_3 \\ \bar{e}_2 &= \bar{a}_{21}\bar{e}'_1 + \bar{a}_{22}\bar{e}'_2 + \bar{a}_{23}\bar{e}'_3 \\ \bar{e}_3 &= \bar{a}_{31}\bar{e}'_1 + \bar{a}_{32}\bar{e}'_2 + \bar{a}_{33}\bar{e}'_3\end{aligned}\quad (3.1.4)$$

(3.1.4)-ün birinci bərabərliyini \bar{e}'_1 -ə skalyar vuraq. Onda alırıq:

$$\begin{aligned}(e'_1 \bar{e}_1) &= \bar{a}_{11}(e'_1 \bar{e}_1) = a_{11} \\ (e'_2 \bar{e}_1) &= \bar{a}_{21} = a_{21}\end{aligned}\quad (3.1.5)$$

Beləliklə görürük ki, tərs çevirmənin matrisi

$$\begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\quad (3.1.6)$$

Yəni $\|a_{ij}\|$ -nin tərs matrisi elə $\|a_{ij}\|$ matrisinin transponirə olunması ilə tapılır. Belə xassəyə malik olan matrislərə ortoqonal matrislər deyilir.

Bu xassəni belə ifadə etmək olar:

$$\sum_n a_{jn} a_{nk} = \delta_{jk} = (e_j \bar{e}_k) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}\quad (3.1.7)$$

Deməli, ortoqonal matrisin determinantı ± 1 -ə bərabərdir. Burada yeni və köhnə ortlar eynisəmtli (eyni oriyentasiyalı) olduqda işarə müsbət, əks halda mənfi götürülür.

İndi sıfırdan fərqli hər hansı \bar{x} vektoruna baxaq və onun köhnə sistemdəki koordinatlarına x_1, x_2, x_3 yeni sistemdəki koordinatlarına isə x'_1, x'_2, x'_3 deyək. Aydındır ki,

$$x_1 = (\bar{x} \bar{e}_1) \quad x_2 = (\bar{x} \bar{e}_2) \quad x_3 = (\bar{x} \bar{e}_3)\quad (3.1.8)$$

Eləcə də:

$$\mathbf{x}'_1 = (\bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{e}}'_1) \quad \mathbf{x}'_2 = (\bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{e}}'_2) \quad \mathbf{x}'_3 = (\bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{e}}'_3)$$

Koodinat sistemi başlanğıc ətrafında fırlandıqda $\bar{\mathbf{x}}$ vektorunun koordinatlarının necə çevrilməsinə baxaq.

(3.1.1) bərabərliklərini $\bar{\mathbf{x}}$ -ə skalyar vursaq olaraq

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_1 &= a_{11}\mathbf{x}_1 + a_{12}\mathbf{x}_2 + a_{13}\mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}'_2 &= a_{21}\mathbf{x}_1 + a_{22}\mathbf{x}_2 + a_{23}\mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}'_3 &= a_{31}\mathbf{x}_1 + a_{32}\mathbf{x}_2 + a_{33}\mathbf{x}_3 \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Buradan görünür ki, koordinat sisteminin başlanğıc ətrafında fırlanmasında istənilən $\bar{\mathbf{x}}$ vektorunun koordinatları eyni (3.1.1) ortoqonal çevirmə ilə çevrilir. Müqayisə üçün yazırıq:

$$\bar{\mathbf{e}}'_k = \sum_i a_{ki} \bar{\mathbf{e}}_i \quad \mathbf{x}_k = \sum_i a_{ki} \mathbf{x}_i \quad (3.1.10)$$

(3.1.9)-un determinantı sıfırdan fərqli olduqda onun tərs çevirməsi var:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= a'_{11}\mathbf{x}'_1 + a'_{12}\mathbf{x}'_2 + a'_{13}\mathbf{x}'_3 \\ \mathbf{x}_2 &= a'_{21}\mathbf{x}'_1 + a'_{22}\mathbf{x}'_2 + a'_{23}\mathbf{x}'_3 \\ \mathbf{x}_3 &= a'_{31}\mathbf{x}'_1 + a'_{32}\mathbf{x}'_2 + a'_{33}\mathbf{x}'_3 \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Belə ki, burada $\|a'_{ij}\|$ matrisi $\|a_{ij}\|$ matrisinin həm tərs, həm də transponirə olunmuş matrisidir.

(3.1.9) və (3.1.11) çevirmələrini yığcam şəkildə belə yazıb bilərik:

$$\mathbf{x}'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \mathbf{x}_j = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{x}'_i}{\partial \mathbf{x}_j} \mathbf{x}_j \quad \mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^3 a_{ji} \mathbf{x}'_j = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{x}'_j} \mathbf{x}'_j \quad (3.1.12)$$

Tərif: (3.1.12) çevirmə qaydası ilə verilmiş \mathbf{x}_j ($i=1,2,3$) kəmiyyətlər toplusuna birinci tərtib (birinci rəng, birvalentli) tenzor və yaxud vektor deyilir.

Ümumilik xatirinə skalyar kəmiyyətə sıfır tərtibli tenzor kimi baxılır.

İkinci tərtib (iki valentli) tenzor anlayışına keçmək üçün iki \bar{x} və \bar{y} vektorlarının skalyar hasilinə baxaq.

Bu vektorların koordinatları (3.1.9) qanunu ilə belə çevrilirlər:

$$\bar{x}'_i = a_{ij}x_j \quad y'_\ell = b_{k\ell}y_k \quad (3.1.13)$$

Bunları skalyar vursaq alarıq

$$(\bar{x}'_i y'_\ell) = (a_{ij}x_j)(b_{k\ell}y_k) = (a_{ij}b_{k\ell})x_j y_k$$

$\bar{x}'_i y'_\ell = w'_{i\ell} \quad x_j y_k = w_{i\ell}$ desək alarıq:

$$w'_{i\ell} = a_{ij}b_{k\ell} w_{i\ell} \quad (3.1.14)$$

(3.1.12)-ə əsasən (3.1.14)-ü belə də yazı bilərik

$$w'_{i\ell} = \frac{\partial x'_\ell}{\partial y_i} \frac{\partial y_k}{\partial x'_\ell} w_{i\ell} \quad (3.1.15)$$

(3.1.12) və (3.1.14) bərabərliklərinin sağ tərəfində indekslərdən biri təkrarlanır və həmin indeksə görə toplama əməli yerinə yetirilir. Bu bizə Σ işarəsindən imtina etmək imkanı verir. Deməli, (3.1.12) ifadəsini belə yazı bilərik:

$$x'_i = a_{ij}x_j \quad x_i = a_{ji}x'_j \quad (3.1.6)$$

(3.1.5) və (3.1.14) ifadələrində də təkrarlanan indekslərə görə toplama əməli yerinə yetirilməsi nəzərdə tutulur. Gələcəkdə tenzorlarda təkrarlanan indeksə görə toplama əməlinə tenzorların bükülməsi deyəsəyik. (3.1.14)-də ℓ indeksi təkrarlanır. Bu o deməkdir ki, bu qısa yazılış əslində doqquz tənlikdən ibarət sistemdir. Ümumiyyətlə hər hansı sistemdə verilmiş doqquz $w_{i\ell}$ kəmiyyətlər toplusu başqa sistemə keçdikdə (3.1.14) və yaxud (3.1.15) qanunu ilə çevrilirsə, onda onlara ikinci tərtib (ikivalentli) tenzor deyilir. Nəhayət, indekslərə aid iki vacib şərti qeyd etməliyik: 1) təkrarlanan indeks bu indeksin 1-dən 3-ə qədər dəyişməsi ilə toplama əməlinin yerinə yetirilməsini göstərir. Bu indekslərin yerdəyişməsi nəticəyə təsir etmədiyindən onlara lal indekslər də deyilir; 2) sərbəst (yəni təkrarlanmayan) indekslər 1, 2, 3 qiymətlərini alırlar.

Burada göstərdiyimiz qayda ilə bir neçə vektoru ardıcıl vurmaqla daha yüksək tərtibli tenzorlar düzəltməyə nail ola bilərik. Onda məsələn w_{ijklst} kəmiyyətlər toplusu belə çevrilməlidirlər.

$$w'_{ijk/st} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x'_j}{\partial x_\beta} \frac{\partial x'_k}{\partial x_\gamma} \frac{\partial x'_\ell}{\partial x'_t} \frac{\partial x_s}{\partial x'_q} \frac{\partial x_t}{\partial x'_p} w_{\alpha\beta\gamma tqp} \quad (3.1.17)$$

Beləliklə, komponentləri (3.1.17) qanunu ilə çevrilən $3^b=724$ sayda komponentdən ibarət olan kəmiyyətlər toplusuna (buna bəzi müəlliflər riyazi obyekt də deyirlər) 6-cü tərtib tenzor deyilir. Tenzorların tərtibinə onun valentliyi və yaxud rəngi də deyirlər. Biz isə bu terminlərdən eyni hüquqlu kimi hər üçündən istifadə edəcəyik.

§3.2. Vektorun kovariant və kontravariant komponentləri. Qarşılıqlı bazis vektorları

Düzbucaqlı koordinat sistemində olduğu kimi, çəpbucaqlı koordinat sistemində də verilmiş \bar{x} vektorunun komplanar olmayan hər hansı $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ bazisi üzrə ayrılması məsələsi uc x_1, x_2, x_3 naməlum kəmiyyəti

$$\bar{x} = x^1 \bar{b}_1 + x^2 \bar{b}_2 + x^3 \bar{b}_3 \quad (3.2.1)$$

vektorunun verilmiş koordinat sisteminin oxları üzərinə proyeksiyalanmasından alınan üç skalyar

$$(\bar{x} \bar{b}_1) = x^1 \quad (\bar{x} \bar{b}_2) = x^2 \quad (\bar{x} \bar{b}_3) = x^3 \quad (3.2.2)$$

tənliklərindən tapılması məsələsinə gətirilir. Lakin bu məsələni birbaşa qarşılıqlı bazis vektorlarından istifadə etməklə də həll etmək olar.

Verilmiş iki $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ və $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$ bazis vektorları

$$(e^i e_k) = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (3.2.3)$$

Şərtini ödəyirlərsə, onda belə bazislərə qarşılıqlı bazislər və yaxud biortoqonad bazislər deyilir. \bar{e} vektorları üzərindəki

rəqəmlər qüvvət dərəcəsi deyil, ancaq indekslərdir. Burada söhbət çəpbucaqlı koordinat sistemindən getdiyi üçün e_k və e^i vektorları ortoqonal vektorlar deyillər. Qarşılıqlı bazislərə verilən tərifdən belə çıxır ki, verilmiş bazislərdən birinin hər bir vektoru qarşılıqlı bazisin iki vektoruna perpendikulyardır və bu vektorun özü ilə indeksi eyni qiymətə malik olan vektoru ilə iti bucaq əmələ gətirir.

$(e^k e_k) = 1$ şərtindən, yəni $1 = |e^k| |e_k| \cos(e^k e_k)$ şərtini alırıq

$$|e^k| = \frac{1}{|e_k| \cos(e^k e_k)} = \frac{1}{h_1} \quad (3.2.4)$$

Yəni bu qarşılıqlı bazis vektorlarından birinin modulu qarşılıqlı bazisin üzərində qurulmuş paralelopipedin bu vektora paralel olan hündürlüyünün tərs qiymətinə bərabərdir.

Qarşılıqlı bazislərdən biri verildikdə o birisini tapmaq olar. Doğrudan da $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ bazisi verilmiş olsun. Onda tərifə görə qarşılıqlı bazisin \bar{e}^1 vektoru birinci bazisin, e_2 və e_3 vektorlarına ortoqonal olduğuna görə \bar{e}^1 e_2 və e_3 vektorlarının vektorial hasilinin ifadə etdiyi vektorla kolleniar olmalıdır, yəni

$$\bar{e}^1 = m[e_2 \cdot e_3] \quad m = \text{const} \quad (3.2.5)$$

m sabitini $(e_1 e^1) = 1$ şərtindən seçə bilərik.

Bu şərti belə də yazı bilərik

$$m(\bar{e}_1[\bar{e}_2 \bar{e}_3]) = 1 \quad (3.2.6)$$

$(\bar{e}_1[\bar{e}_2 \bar{e}_3]) \neq 0$ olduğundan (3.2.6)-dan tapırıq:

$$\bar{e}^1 = \frac{[\bar{e}_2 \bar{e}_3]}{(e_1[\bar{e}_2 \bar{e}_3])} = \frac{[\bar{e}_1 \bar{e}_2]}{V_1} \quad (3.2.7)$$

V_1 birinci bazis vektorları üzərində qurulmuş paralelopipedin həcmidir

$$|V_1| = |e_1 \cdot e_2 \cdot e_3| \quad (3.2.8)$$

Eyni qayda ilə yazı bilərik:

$$\bar{e}^i = \frac{[\bar{e}_j \bar{e}_k]}{e_\ell \cdot e_m \cdot e_k} = \frac{[\bar{e}_j \bar{e}_k]}{V_1} \quad (3.2.9)$$

Burada i, j, k və ℓ, m, n indeksləri 1, 2, 3 ədədlərinin dairəvi yerdəyişmələrini göstərirlər. Aldığımız ifadələr ikinci bazis vektorlarının onunla qarşılıqlı olan birinci bazis vektorları ilə ifadələrini verir. Birinci bazis vektorlarının qarşılıqlı ikinci bazis vektorları ilə ifadələrini də analogi olaraq belə yazıb bilərik:

$$\bar{e}_i = \frac{[e^j e^k]}{e^\ell \cdot e^m \cdot e^k} = \frac{[e^j e^k]}{V_2} \quad (3.2.10)$$

Qarşılıqlı bazislər aşağıdakı xassələrə malikdirlər.

- 1) Ortoqonal bazisin qarşılıqlı bazisi də ortoqonaldır və onlar üst-üstə düşürlər;
- 2) Qarşılıqlı bazislərin ya hər ikisi sağ, ya da hər ikisi sol sistem təşkil edirlər, yəni onlar həmişə eynisəmtli olurlar. Bu $V_1 V_2 = 1 > 0$ münasibətindən aydındır.

Birinci mülahizə isə:

$$(\bar{e}_i \cdot \bar{e}_k) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

və

$$[e_k \cdot e_\ell] = \bar{e}^m \quad \text{və} \quad [\bar{e}_n \bar{e}_n] = 0$$

münasibətləri ilə təsdiqlənir.

İndi x^k -ləri ($k=1,2,3$)

$$\bar{x} = x^1 \bar{b}_1 + x^2 \bar{b}_2 + x^3 \bar{b}_3 = \sum_{k=1}^3 x^k \bar{b}_k \quad (3.2.11)$$

münasibətlərindən tapmaq üçün \bar{x} vektorunu qarşılıqlı bazisin vektorlarına növbə ilə skalyar vuraq, onda alırıq

$$(\bar{x} b_i) = \sum_{k=1}^3 x^k (b_k^1 b_i) = x^k. \quad (3.2.12)$$

Buradan isə tapırıq:

$$x^1 = \frac{(\bar{x} [\bar{b}_2 \bar{b}_3])}{(\bar{b}_1 [\bar{b}_2 \bar{b}_3])} \quad x^2 = \frac{(\bar{x} [\bar{b}_1 \bar{b}_3])}{(\bar{b}_2 [\bar{b}_1 \bar{b}_3])} \quad x^3 = \frac{(\bar{x} [\bar{b}_1 \bar{b}_2])}{(\bar{b}_3 [\bar{b}_1 \bar{b}_2])} \quad (3.2.13)$$

Beləliklə görürük ki, istənilən \bar{x} vektorunu birinci $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ vektorları üzrə ayırmaq olar

$$\bar{x} = x^1 \bar{e}_1 + x^2 \bar{e}_2 + x^3 \bar{e}_3 \quad (3.2.14)$$

eləcə də eyni müvəffəqiyyətlə qarşılıqlı bazisin $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$ vektorları (indeksləri münasiblik xatirinə yuxarıda yazırıq) üzrə ayırmaq olar:

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}^1 + x_2 \bar{e}^2 + x_3 \bar{e}^3 \quad (3.2.14^*)$$

Belə olduqda x^k ədədlərinə \bar{x} vektorunun kontravariant, x_k ($k=1,2,3$) ədədlərinə isə onun kovariant komponentləri deyilir (3.1.1)-i və (3.1.4)-ü uyğun olaraq məzmununu pozmadan belə yazı bilərik:

$$\bar{e}'_1 = \alpha_1^1 \bar{e}_1 + \alpha_1^2 \bar{e}_2 + \alpha_1^3 \bar{e}_3 = \alpha_1^k e_k$$

$$e'_2 = \alpha_2^1 \bar{e}_1 + \alpha_2^2 \bar{e}_2 + \alpha_2^3 \bar{e}_3 = \alpha_2^k e_k$$

$$e'_3 = \alpha_3^1 \bar{e}_1 + \alpha_3^2 \bar{e}_2 + \alpha_3^3 \bar{e}_3 = \alpha_3^k e_k$$

və ya
$$e'_k = \alpha_i^k \bar{e}_i \quad (3.2.15)$$

və tərsinə
$$\bar{e}_j = \alpha_i^k e'_k \quad (3.2.16)$$

(3.2.15) və (3.2.16) münasibətlərinə uyğun olaraq düz və tərs çevirmələr, onların əmsallarına isə düz və tərs çevirmənin əmsalları deyəcəyik. Vektorun komponentlərinin kovariant və kontravariant adları kovariant komponentlərin çevrilməsi düz çevirmənin α_i^k əmsalları, kontravariant komponentlərin çevrilməsi isə tərs çevirmənin α_k^i əmsalları vasitəsi ilə yerinə yetirilməsi ilə əlaqədardır.

$$x_k = \alpha_k^i x_i \quad x^k = \alpha_k^i x^i \quad (3.2.17)$$

Komponentləri $x_k = \alpha_k^i x_i$ çevirməsinin əmsalları ilə çevrilən riyazi obyektə birinci tərtib (birinci rəq, birvalentli) kovariant tenzor və yaxud kovariant vektor deyilir, eləcə də komponentləri $x^k = \alpha_k^i x^i$ çevirməsinin əmsalları ilə çevrilən riyazi obyektə kontravariant tenzor və yaxud kontravariant vektor deyilir. Tenzor hesabında yuxarı indekslərin kontravariantlığı, aşağı indekslərin isə kovariantlığı göstərməsi şərtləşdirilib.

§3.3. Çoxvalentli tenzorlar

Yuxarıda çoxvalentli tenzorlar haqqında qısa məlumat vermişdik. İndi isə iki kontravariant \bar{a}^r və \bar{b}^s vektorlarının skalyar hasilinə baxaq. Bu zaman (3.2.17) çevirmələrini nəzər alaq

$$\begin{aligned} (a^r b^s) &= (\alpha_m^r a^m)(\alpha_n^s b^n) = \alpha_m^r \alpha_n^s a^m b^n \\ a^r b^s &= a^{rs} \quad a^m b^n = a^{mn} \text{ deyək. Onda alarıq:} \\ a^{rs} &= \alpha_m^r \alpha_n^s a^{mn} \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Beləliklə, komponentləri (3.3.1) qanun ilə çevrilən riyazi obyektə ikinci tərtib kontravariant tenzor deyilir. Analoji olaraq \bar{a}_r və b_s kovariant vektorların skalyar vurulmasından alırıq:

$$(\bar{a}_r \bar{b}_s) = \bar{a}_{rs} = (\alpha_r^m a_m)(\alpha_s^n b_n) = \alpha_r^m \alpha_s^n a_m b_n$$

yaxud

$$a_{rs} = \alpha_r^m \alpha_s^n a_{mn} \quad (3.3.2)$$

Komponentləri (3.3.2) qanunu ilə çevrilən riyazi obyektə ikivalentli kovariant tenzor deyilir.

Nəhayət kontravariant a^r və kovariant b_s vektorlarının skalyar hasilinə baxaq:

$$(a^r b_s) = a_s^r = (\alpha_m^r a^m)(\alpha_s^n b_n) = \alpha_n^r \alpha_s^n a_m b_n = \alpha_m^r \alpha_s^n a_n^m \quad (3.3.3)$$

Komponentləri $a_s^r = \alpha_m^r \alpha_s^n a_n^m$ qanun ilə çevrilən riyazi obyektlərə ikivalentli qarışıq (yuxarı indeksə görə kontrvariant, aşağı indeksə görə kovariant) tenzorlar deyilir və onlar bir yuxarı və bir də aşağı indekslə işarə olunurlar. Göstərdiyimiz bu üsulla istənilən valentli və istənilən növlü tenzorlar ala bilərik. Məsələn, belə hasilə baxaq:

$$(a^r b_s c_t) = (\alpha_m^r a^m)(\alpha_s^n b_n)(\alpha_t^k c_k) = \alpha_n^r \alpha_s^n \alpha_t^k a_m b_n c_k$$

$$(a^r b_s c_t) = a_{st}^r \quad a^m b_n c_k = a_{nk}^m \text{ desək}$$

$$a_{st}^r = \alpha_m^r \alpha_s^n \alpha_t^k a_{nk}^m \quad (3.3.4)$$

Yəni yuxarı indeksə görə kontravariant, aşağı indekslərə görə kovariant üçvalentli qarışıq tenzor aldıq.

Bu əməliyyatları yerinə yetirərkən valentliyin balansına diqqət yetirilməlidir, yəni bərabərliyin hər iki tərəfindəki tenzorlar eyni kontravariantlığa və eyni kovariantlığa malik olmalıdırlar.

Dediklərimizi bir qədər də ümumiləşdirmək üçün xətti cəbr və çoxölçülü həndəsəyə müraciət edək.

Fərz edək ki, bizə bazisi e_1, e_2, \dots, e_n olan L və verilmiş bazislə qarşılıqlı e^1, e^2, \dots, e^n bazislə malik olan L_1 xətti fəzaları verilib və bütün mümkün $e_1 \dots e_p e^1 \dots e^q$ hasilləri T_q^p çoxluğunda bazis təşkil edirlər. Belə ki, $T_q^p (e_q e^p)$ şəkilli skalyar hasillər çoxluğudur. Onda $\forall t \in T_q^p$ üçün aşağıdakı ayrılış doğrudur:

$$t = \sum \tau_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \dots e_{i_p} e^{j_1} \dots e^{j_q} \quad (3.3.5)$$

$\tau_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ ədədləri t tenzorunu təşkil edirlər. Bir bazisdən digərinə keçdikdə onlar hər bir yuxarı indeksə görə kontravariantlıq hər bir aşağı indeksə görə isə kovariantlıq qanunu ilə çevrilirlər, yəni

$$\tau_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \sum \tau_{j_1' \dots j_q'}^{i_1' \dots i_p'} A_{i_1'}^{i_1} \dots A_{i_p'}^{i_p} B_{j_1'}^{j_1} \dots B_{j_q'}^{j_q} \quad (3.3.6)$$

belə ki, cəmləmə ştrixlənməmiş indekslərə görə yerinə yetirilir.

İsbati. Məlumdur ki, bazis vektorları aşağıdakı kimi çevrilirlər:

$$e_{i'} = \sum A_{i'}^i e_i \quad e^{i'} = \sum B_j^{i'} e^j \quad (3.3.7)$$

Bu düsturların tərsi isə belədir:

$$e_i = \sum B_j^{i'} e_{i'} \quad e^i = \sum A_{i'}^i e^{i'} \quad (3.3.8)$$

Onda (3.3.5)-i belə yazma bilərik

$$\begin{aligned} t &= \sum \tau_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \dots e_{i_p} e^{j_1} \dots e^{j_q} = \\ &= \sum \left(\sum \tau_{j_1' \dots j_q'}^{i_1' \dots i_p'} A_{i_1'}^{i_1} \dots A_{i_p'}^{i_p} B_{j_1'}^{j_1} \dots B_{j_q'}^{j_q} \right) e_{i_1} \dots e_{i_p} e^{j_1} \dots e^{j_q} \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Digər tərəfdən

$$t = \sum \tau_{j_1 \dots j_q}^{i_1' \dots i_p'} e_{i_1} \dots e_{i_p} e^{j_1} \dots e^{j_q} \quad (3.3.10)$$

(3.3.9) və (3.3.10)-nün müqayisəsindən (3.3.6)-nı alırıq. Yəni (3.3.6)-nın doğruluğu isbat olundu.

İndi də göstərək ki, hər bir çoxdəyişənli $a(x_1 \dots x_n u^1 \dots u^n)$ invariant xətti formasına T_q^p çoxluğundan bir tenzor qarşı qoymaq mümkündür. Baxdığımız L fəzasından götürülmüş hər bir kovariant x_k vektoru $e_1 \dots e_n$ bazisi üzrə belə ayrıla bilər

$$x_k = \sum_{i=1}^n x_k^i e_i \quad (3.3.11)$$

və hər bir kotrariant \bar{u} vektoru $e^1 \dots e^n$ bazisi üzrə ayrıla bilər

$$u^k = \sum_{i=1}^n u_i^k e^i \quad (3.3.12)$$

Onda yazı bilərik:

$$\begin{aligned} & a(x_1 \dots x_q u^1 \dots u^p) = \\ & = a\left(\sum x_1^{j_1} e_{j_1} \dots \sum x_q^{j_q} e_{j_q} \sum u_{i_1}^{i_1} e^{i_1} \dots \sum u_{i_p}^{i_p} e^{i_p}\right) \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Buradan çoxdəyişənli invariant xətti formanın koordinatlarla ifadəsini alırıq:

$$a(x_1 \dots x_q u^1 \dots u^p) = \sum a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} x_{j_1 \dots j_q} u_{i_1 \dots i_p}^{1 \dots p} \quad (3.3.14)$$

Belə ki,

$$a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = a(e_{j_1} \dots e_{j_q} e^{i_1} \dots e^{i_p}) \quad (3.3.15)$$

L fəzasında yeni bazisə keçdikdə

$$e_{j_k}^{i_k} = \sum P_{j_k}^{i_k} e_{j_k} \quad (3.3.16)$$

L_2 fəzasında isə

$$e^{i_k} = \sum Q_{i_k}^{i_k} e^{i_k} \quad (3.3.17)$$

Xətti formanın koordinatlarla ifadəsi yeni bazisdə yeni əmsallarla ifadə olunacaq və nəticədə xətti formanın invariantlığına əsasən onlara formanın əmsallarının yeni bazisdəki qiymətləridir. Belləklə

$$a_{j_1' \dots j_q'}^{i_1' \dots i_p'} = a(e_{j_1} \dots e_{j_q} e^{i_1} \dots e^{i_p}) \quad (3.3.18)$$

(3.3.15), (3.3.16) və (3.3.17) münasibətlərinə əsasən (3.3.18)-dən alırıq:

$$a_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p} = \sum a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} Q_{i'_1}^{i_1} \dots Q_{i'_p}^{i_p} P_{j'_1}^{j_1} \dots P_{j'_q}^{j_q} \quad (3.3.19)$$

Sağdakı cəmləmə ştrixsiz indekslərə görədir. Buradan görürük ki, (3.3.19) çevirmə qanunu elə (3.3.6) çevirmə qanunu ilə eynidir. Deməli, hər bir $a(x_1 \dots x_q, u^1 \dots u^p)$ çoxdəyişənli xətti formasına T_q^p çoxluğundan bir

$$a = \sum a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \dots e_{i_p} e^{j_1} \dots e^{j_q} \quad (3.3.20)$$

tenzoru qarşı qoyulur və bu tenzora verilmiş xətti formanın tenzoru deyilir.

Beləliklə hər bir koordinat sistemində bizə 1) 3^n sayda $i_1 \dots i_n$ indeksləri ilə nömrələnmiş a_{i_1, i_2, \dots, i_n} verilibsə, 2) indekslərdən hər biri o biri indekslərdən asılı olmayaraq 1, 2, 3 qiymətləri ala bilirsə, 3) bu indekslərin a-nın yanındakı yazılış sırasında özünün seçilmiş mövqeyi varsa, yəni bir-birindən 1-ci, 2-ci, ..., n-ci yerdə dayanmaları ilə fərqlənirlərsə, 4) koordinat sisteminin başlanğıc ətrafında fırlanması zamanı

$$a'_{p_1, p_2, \dots, p_n} = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_n} A_{p_1 i_1} \cdot A_{p_2 i_2} \cdot \dots \cdot A_{p_n i_n} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} \quad (3.3.21)$$

qanunu ilə çevrilirlərsə, deyirlər ki, bizə n-variantlı kovariant tenzor verilib. Çoxvalentli kontravariant və qarışıq tenzorların təriflərini də analogi olaraq vermək olar.

§3.4. Tenzorlar üzərində cəbri əməllər

Tenzorlar üzərində hansı koordinat sistemində baxılmasından asılı olmayan bir sıra əməlləri yerinə yetirmək olar:

1⁰. Eynivalentli və eynitipli tenzorları toplamaq (çıxmaq) olar. Doğurdan da fərz edək ki, $a_1 = a_1(x_1 x_2 \dots x_p)$ və $a_2 = a_2(x_1 x_2 \dots x_p)$ L fəzasındakı eyni vektor arqumentlərin eyni p dərəcəli xətti formalarıdır. Yada salaq ki, L xətti fəzasında p sayda vektor arqumentlərdən asılı olmaqla öz arqumentlərinin

hər birinə görə xətti olan $a(x_1x_2\dots x_p)$ funksiyasına L fəzasında çoxdəyişənli xətti forma (polileneynaya forma) və ya çoxdəyişənli xətti funksiya deyilir, dəyişənlərin p sayına xətti formanın dərəcəsi deyilir. Asanlıqla görmək olar ki, $a_1 + a_2$ cəmi də p dərəcəli çoxdəyişənli xətti formadır (bu xətti formanın tərifindən çıxır). Bu formaların p -valentli uyğun $a_{ij\dots n}$ və $b_{ij\dots n}$ tenzorlarının cəminə $c_{ij, \dots}$ tenzoru desək yaza bilərik

$$c_{ij\dots n} = a_{ij\dots n} + b_{ij\dots n}. \quad (3.4.1)$$

Doğurdan da

$$a_1 = a_{ij\dots n}x_1x_2\dots x_{pj} \text{ və } b_1 = b_{ij\dots n}x_1x_2\dots x_{pj} \quad (3.4.2)$$

ayrılışlarını toplasaq alarıq:

$$a_1 + b_1 = (a_{ij\dots n} + b_{ij\dots n})x_1x_2\dots x_{pj} \quad (3.4.3)$$

olduğundan $c_{ij\dots n}$ a_1 və a_2 xətti formalarının cəminin tenzoru olur. Bircə qalır göstərək ki, $c_{ij\dots p}$ doğurdan da tenzorluq şərtini ödəyir. Onda ona $a_{ij\dots p}$ və $b_{ij\dots p}$ tenzorlarının cəmi, prosesin özünə isə tenzorların toplanması deyəcəyik. Doğurdan da yuxarıda göstərdiyimiz kimi $a_{ij\dots p}$ və $b_{ij\dots p}$ tenzorları yeni koordinat sisteminə keçdikdə uyğun olaraq belə çevrilirlər:

$$a'_{ij\dots p} = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_p} A_{i_1i_1} \dots A_{p,i_p} a_{i_1,i_2,\dots,i_p} \quad (3.4.4)$$

$$b'_{ij\dots p} = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_p} A_{i_1i_1} \dots A_{p,i_p} b_{i_1,i_2,\dots,i_p} \quad (3.4.5)$$

Bu bərabərlikləri toplasaq alarıq:

$$a'_{ij\dots p} + b'_{ij\dots p} = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_p} A_{i_1i_1} \dots A_{p,i_p} (a_{i_1,i_2,\dots,i_p} + b_{i_1,i_2,\dots,i_p}) \quad (3.4.6)$$

Buradan da

$$c'_{ij\dots p} = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_p} A_{i_1i_1} \dots A_{p,i_p} c_{i_1,i_2,\dots,i_p} \quad (3.4.7)$$

Görürük ki, (3.4.7) çevirməsi elə (3.4.4) və (3.4.5) çevirmələri kimidir, yəni $c_{ij\dots p}$ tenzorluq şərtini ödəyir və o p -valentli tenzordur. Məsələn, $a_{s\ell}^r$ və $b_{s\ell}^r$ tenzorlarının cəmini tapmaq.

Bunun üçün

$$c_{s\ell}^r = a_{s\ell}^r + b_{s\ell}^r \text{ deyək.} \quad (3.4.8)$$

Yuxarıda göstərdiyimiz kimi yeni koordinat sisteminə keçəndə bu tenzorlar aşağıdakı kimi çevrilirlər:

$$a_{s\ell}^{r'} = c_m^r \gamma_s^n \gamma_t^\ell a_{n\ell}^r \quad b_{s\ell}^r = c_m^r \gamma_s^n \gamma_t^\ell b_{n\ell}^r \quad (3.4.9)$$

Bunları toplasaq alarıq:

$$c_{s\ell}^{r'} = c_m^r \gamma_s^n \gamma_t^\ell (a_{n\ell}^r + b_{n\ell}^r) = c_m^r \gamma_s^n \gamma_t^\ell c_{n\ell}^r \quad (3.4.10)$$

Yəni cəm tenzorun komponentləri üçvalentli qarışıq (yuxarı indeksə görə kontravariant və aşağı indekslərə görə kovariant) tenzorun komponentlərinin çevrilməsi elə toplanan tenzorların komponentlərinin çevrilməsi kimidir. Deməli $c_{s\ell}^r$ üçvalentli qarışıq tenzordur.

Dediklərimizdən aşağıdakı nəticələr çıxır:

- 1) Eyni rənqli tenzorların cəmi toplanan tenzorlarla eyni rənqa malik olan tenzordur;
- 2) Yalnız eyni rənqa və eyni növə malik olan tenzorları toplamaq olar, yəni toplanan tenzorların kontravariantlıq və kovariantlığı eyni olmalıdır;
- 3) Tenzorların toplanması komutativdir.

2⁰. Tenzorların vurulması. Tenzorların vurulması əməli müəyyən sıra qaydası verilmiş istənilən iki və daha çox tenzorlara tətbiq edilə bilər. Burada vurulan tenzorlar müxtəlif valentliyə, o cümlədən müxtəlif kontravariantlığa və kovariantlığa malik ola bilərlər.

Məsələn, a_{ijk} və b_{tm} tenzorlarının hasilinə baxaq.

Bunun üçün hər bir koordinat sistemində bu tenzorlardan hər birinin bütün mümkün hasillərini tərtib edirik. Aşkardır ki, bu hasillərin hər biri beş indeksə malik olacaqlar. Onları belə ifadə edə bilərik

$$c_{ijk\ell m} = a_{ijk} b_{\ell m} \quad (3.4.11)$$

Burada şərtləşilir ki, c -nin aşağısında əvvəlcə vurulan tenzorlardan birincisinin indeksləri yerləri dəyişdirilmədən yazılsın, sonra isə ikinci vuruğun indeksləri yerləri dəyişdirilmədən yazılsın və s. İndi isə göstərməliyik ki, $c_{ijk\ell m}$ ədədləri baxılan koordinta sistemlərinin hər birində eyni bir beşvalentli tenzorun komponentləridir. Bunun üçün (3.4.5)-ə əsasən yazırıq:

$$\begin{aligned} a'_{pqr} &= \sum_i \sum_j \sum_k A_{pi} A_{qi} A_{rk} a_{ijk} \\ b'_{st} &= \sum_\ell \sum_m A_{s\ell} A_{tm} b_{\ell m} \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

Bu bərabərlikləri vurub alırıq:

$$\begin{aligned} c'_{pqrst} &= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_\ell \sum_m A_{pi} A_{qi} A_{rk} A_{s\ell} A_{tm} a_{ijk} b_{\ell m} = \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_\ell \sum_m A_{pi} A_{qi} A_{rk} A_{s\ell} A_{tm} c_{ijk\ell m} \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

Yəni $c_{ijk\ell m}$ ədədləri üçün (3.4.5)-ə analoji çevirmə düsturu aldıq. Deməli, bu ədədlər istənilən koordinat sistemində eyni beşvalentli tenzorun komponentləridir.

a^r , b_s , c_i^k tenzorlarının hasilinə baxaq. Bunun üçün onların uyğun çevrilmə düsturlarını yazaq:

$$a'^r = \sum_\ell c_\ell^r a^\ell; \quad b'_s = \sum_m \gamma_s^m b_m; \quad c_i'^k = \eta_\ell^k \eta_i^n c_n^\ell \quad (3.4.14)$$

və alınan ifadələri vuraq. Onda alırıq:

$$\begin{aligned} a'^r b'_s c_i'^k &= q_{s\ell}^{rk} = \sum_s \sum_m \sum_t \sum_n c_q^r \gamma_s^m \eta_\ell^k \eta_i^n a^\ell b_n c_n^q = \\ &= \sum_s \sum_m \sum_t \sum_n c_q^r \gamma_s^m \eta_\ell^k \eta_i^n q_{mn}^{\ell q} \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

Beləliklə, yenə də (3.4.5) şəkilli çevirmə düsturu aldıq, yəni $q_{s\ell}^{rk}$ və $q_{mn}^{\ell q}$ eyni dördvalentli qarışıq tenzorun komponentləridir.

3⁰. Tenzorun ədədə vurulması. Dərəcəsi p-yə bərabər olan çoxdəyişənli φ xətti formasına öaxaq və onu həqiqi λ ədədinə vuraq. Onda yaza bilərik

$$\lambda\varphi = (\lambda a_{ij\dots p})x_{1i}x_{2i}\dots x_{pi} \quad (3.4.16)$$

Aydındır ki, $\lambda\varphi$ də p dərəcəli xətti formadır və onun tenzoru $\lambda a_{ij\dots p}$ -dir, yəni

$$b_{ij\dots p} = \lambda a_{ij\dots p} \quad (3.4.17)$$

Deməli, hər hansı tenzoru ədədə vurmaq onun hər bir komponentini həmin ədədə vurmaq deməkdir.

Tenzorların hasili haqqında belə deməliyik: bir tenzora başqa tenzoru vurmaq birinci tenzorun hər bir komponentini ikinci tenzorun hər bir komponentinə vurmaq deməkdir

$$c_{ik\ell m} = A_{ik}B_{im} \neq c_{\ell m ik} = A_{im}B_{ik}$$

Ona görə də tenzorların vurulması komutativ deyil.

Bir neçə tenzorun hasili elə tenzora deyilir ki, onun rəngi vurulan tenzorların rəngləri cəminə, hər komponenti isə vurulan tenzorların komponentləri hasillərinə bərabər olsun.

4⁰. Tenzorların bükülməsi. Tutaq ki, valentliyi ikidən az olmayan, məsələn $a_{ijk\ell}$ tenzoru verilib. Onun hər hansı iki indeksini seçib, ancaq qeyd olunmuş indeksləri eyni olan komponentlərini seçək. Bu məsələn, $a_{ij\ell\ell}$ komponentləri olsun. Bundan sonra belə komponentlərin cəmini tərtib edək. Bu zaman tenzorun yerdə qalan indeksləri dəyişməz qalır. Haqqında danışdığımız cəm

$$\sum_{\ell} a_{ij\ell\ell} = a_{ij11} + a_{ij22} + a_{ij33} \quad (3.4.18)$$

şəklində olmaqla ancaq qeyd olunmamış indekslərdən asılıdır. Aydındır ki, bu cəm hər bir koordinat sistemində ikivalentli tenzor təşkil edir. Bu halda deyirlər ki, (ona a_{ij} tenzoru deyək) a_{ij} tenzoru $a_{ij\ell\ell}$ tenzorunun üçüncü və dördüncü indekslərə görə bükülməsindən alınıb. İsbat üçün $a_{ijk\ell}$ tenzoruna çevirmə düsturu tətbiq edək:

$$a'_{pqrt} = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_{\ell} A_{pi}A_{qi}A_{rk}A_{t\ell}a_{ijk\ell} \quad (3.4.19)$$

(3.4.9)-da $k=\ell$ götürüdü onu belə yazaq:

$$a'_{pq\ell} = \sum_i \sum_j \left(\sum_{\ell} \sum_{\ell} A_{r\ell} A_{k\ell} \right) A_{pi} A_{qi} a_{ij\ell\ell} \quad (3.4.20)$$

və

$$\sum_{\ell} \sum_{\ell} A_{r\ell} A_{k\ell} = \begin{cases} 0 & r \neq k \\ 1 & r = k \end{cases} = \delta_{rk}$$

olduğunu nəzərə alaq. Onda alırıq:

$$a'_{pq\ell} = \sum_i \sum_j \delta_{rk} A_{pi} A_{qi} a_{ij\ell\ell} = \sum_i \sum_j A_{pi} A_{qi} a_{ij\ell\ell} \quad (3.4.21)$$

və yaxud

$$a'_{pq\ell\ell} = \sum_i \sum_j A_{pi} A_{qi} a_{ij\ell\ell} \quad (3.4.22)$$

Deməli, baxdığımız dördvalentli tenzorun iki indeksə görə büküləsi də tenzordur.

Tenzorların bükülməsinə aid aşağıdakılar doğrudur:

- 1) rənqi n olan tenzoru iki indeksinə görə büküdükdə $n-2$ rənqli tenzor alınır;
- 2) rənqi cüt olan tenzoru skalyar ədədə qədər bükmək olar, halbuki, rənqi tək ədəd olan tenzor ancaq vektora qədər bükülə bilər;
- 3) ancaq rənqi ikidən az olmayan tenzorları bükmək olar;
- 4) komponentləri ümumiləşmiş koordinatlarla ifadə olunan tenzorları ancaq müxtəlif adlı indekslərə görə bükmək olar, yəni seçilən indekslərdən biri kontravariant olduqda ikincisi kovariant olmalıdır və tərsinə. Doğrudan da, tutaq ki, $a_i^{k\ell}$ tenzorlarını i və k indekslərinə görə bükürük. Onda $a_i^{i\ell}$ ədədləri aşağıdakı kimi çevrilirlər:

$$\begin{aligned} a'_{ik} &= \alpha_i^{\ell} \alpha_k^m a_{\ell m} & a'^{ik} &= \alpha_i^{i'} \alpha_m^{i'} a^{\ell m} \\ a_i^{ik} &= \alpha_i^j \alpha_m^{k'} a_m^j & a_i^{i'} &= \alpha_i^{i'} \alpha_k^{m'} a_m^{\ell} \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

(3.4.23) və

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i^i \alpha_i^{i'} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (3.4.24)$$

$$\sum_{\ell=1}^3 \alpha_i^{\ell'} \alpha_i^{\ell} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

münasibətlərinə əsasən

$$a_i^{r\ell} = \alpha_r^n \alpha_n^{i'} \alpha_r^{\ell'} a_n^{nr} = \alpha_r^{i'} a_n'^{nr} \quad (3.4.25)$$

ədədləri bir vektorun komponentləri olurlar. Lakin $a_i^{k\ell}$ -in k və ℓ indekslərinə görə bükülməsinin nəticəsi olan

$$a_i'^{kk} = \alpha_r^n \alpha_n^{i'} \alpha_r^{k'} a_n^{nr} \quad (3.4.26)$$

ədədləri vektorun komponentləri ola bilmirlər. Çünki alınan çevirmə qanunu vektorun çevrilmə qanunu ilə eyni deyil.

5⁰. Tenzorların daxili vurulması. Tenzorlar üzərində cəbri əməllərdən biri də onların daxili hasili adlanan əməldir. Bu əməlin mahiyyəti tenzorların hasilinin bükülməsindən ibarətdir. Bu əməli yerinə yetirmək üçün əvvəlcə tenzorlar vurulur, sonra isə hasil tenzor hər hansı iki (və ya cüt sayda) indekslərinə görə bükülür. Bunu bir misalda nümayiş etdirək.

$$c_{spm}^n = a_{sp}^r b_m^n \quad (3.4.27)$$

Dediyimiz əməliyyatı yerinə yetirmək üçün aldığımız hasili bir yuxarı və bir aşağı indeksə görə $n=p$ deməklə bükək. Onda alırıq

$$c_{spm}^{rp} = c_{sm}^r = a_{s1}^r b_m^1 + a_{s2}^r b_m^2 + a_{s3}^r b_m^3 = \sum_{p=1}^3 a_{sp}^r b_m^p.$$

6⁰. Tenzorun indekslərinin yerdəyişməsi. Fərz edək ki, $a_{ij\dots m} \varphi = \varphi(x, y, z, \dots, w)$ xətti formasının təyin olunmuş tenzordur, yəni

$$\varphi = a_{ij\dots m} x_i y_j z_k \dots w_m \quad (3.4.28)$$

Bu xətti formada argumentlərdən bir neçəsinin, məsələn ikisinin yerini dəyişsək yeni

$$\varphi = \psi(yxz\dots w)$$

xətti formasını alırıq. Onun təyin etdiyi tenzor $b_{jik\dots m}$ olar, digər tərəfdən $b_{ijk\dots m}x_i y_j z_k \dots w_m = a_{jik\dots m} y_j x_i \dots w_n$ bərabərliyi doğrudur buradan alırıq

$$b_{ij\dots m} = a_{ji\dots m}$$

Bu tenzorlar ancaq 1-ci və ikinci indekslərinin yerdəyişməsi ilə fərqlənirlər.

$a_{ij\dots m}$ tenzorunun indekslərinin nömrələnmə sırasının dəyişmə prosesinə onun indekslərinin yerdəyişməsi deyilir. Amma qeyd etməliyik ki, $a_{ij\dots m}$ və $b_{ij\dots m}$ tenzorları bir-birindən əhəmiyyətli dərəcədə fərqli tenzorlardır, çünki onların uyğun komponentləri öz arasında bərabər deyillər.

§3.5. Tərs tenzorluq əlaməti

İndi isbat edəcəyimiz teoremə tərs tenzorluq əlaməti deyilir.

Teorem. Fərz edək ki, iki ortonormal bazislərdən hər birinin 3^{p+q} sayda $a_{i_1, i_2, \dots, i_p j_1, j_2, \dots, j_q}$ ədədlər toplusu verilib və onlar elədirlər ki, toplunu ixtiyari t_{j_1, j_2, \dots, j_q} tenzoru ilə bükükdə (yəni əvvəl vurub sonra bükükdə) yenidən p valentli tenzor alınır, onda ilkin ədədlər sisteminə $p + q$ valentli tenzor deyilir.

Bu teoremi sadəlik xatirinə xüsusi hal üçün isbat edək. Yəni $p=3$, $q=2$ olduğu hal üçün isbat edək. Bunun üçün verilmiş ədədlər sisteminə $a_{ijk\ell m}$ deyək. Teoremin şərtinə görə $t_{\ell m}$ tenzordursa, onda

$$a_{ijk\ell m}^t t_{\ell m} = s_{ijk} \quad (3.5.1)$$

ədədlər toplusu üçvalentli tenzor olmalıdır. $t_{\ell m}$ tenzoruna \bar{u}_i və \bar{v}_m vektorlarının hasili kimi baxaq. Onda (3.5.1)-i belə yazıb bilərik

$$s_{ijk} = a_{ijk} \bar{u}_i \bar{v}_m \quad (3.5.2)$$

Bu ifadəni ixtiyari $\bar{x}_i \bar{y}_j \bar{z}_k$ vektoru ilə bükək.

$$s_{ijk} \bar{x}_i \bar{y}_j \bar{z}_k = a_{ijk} \bar{u}_i \bar{v}_m \bar{x}_i \bar{y}_j \bar{z}_k \quad (3.5.3)$$

Burada s_{ijk} tenzor olduğundan (3.5.3)-un sol tərəfi skalyar funksiyadır, sağ tərəf isə x, y, z, u, v vektorlarının xətti funksiyasıdır. Deməli, soldakı skalyar funksiya beş dəyişənli (beşdərəcəli) xətti formadır və $a_{ijk\ell m}$ bu formanın əmsallarıdır, yəni beşvalentli tenzor təşkil edirlər. Teoremin ümumi şəkildə isbatı analoji olaraq yerinə yetirilir.

§3.6. Simmetrik və antisimmetrik tenzorlar

Bu anlayışlar ranqı ikidən az olmayan tenzorlara aiddirlər. $a_{ijk\ell mn}$ tenzoru verildikdə ona o zaman hər hansı iki indeksinə görə simmetrik tenzor deyilir ki, həmin indekslərin yerini dəyişdikdə onun komponentləri öz işarələrini dəyişməsinlər. Məsələn, baxdığımız tenzor

$$a_{ijk\ell mn} = a_{ikj\ell mn} \quad (3.6.1)$$

şərtini ödəyirsə, ona j və k indekslərinə görə simmetrik tenzor deyilir. Əksinə, əgər baxılan tenzurun hər hansı indekslər cütünün yerlərini dəyişdirdikdə onun komponentləri öz işarələrini əksinə dəyişərlərsə, onda belə tenzora baxılan indekslər cütünə görə antisimmetrik tenzor deyilir.

Yəni $a_{ijk\ell mn}$ tenzorunun komponentləri

$$a_{ijk\ell mn} = -a_{ikj\ell mn} \quad (3.6.2)$$

şərtini ödəyirlərsə, onda ℓ və k indekslərinə görə antisimmetrik tenzor deyilir. Antisimmetrik tenzorların bərabər indeksli komponentləri sıfıra bərabər olurlar. Bu nəticə aşağıdakı bərabərlikdən çıxır:

$$a_{11\ell} = -a_{11\ell}, \quad a_{i11} = -a_{i11}$$

Buradan

$$a_{11\ell} = a_{i11} = 0$$

olması nəticəsinə gəlirik.

Qeyd etmək lazımdır ki, tenzorların simmetrik və antisimmetriklik xassələri koordinat sisteminin seçimindən asılı

olmurlar. Doğurdan da, əgər a_{ij} tenzoru K koordinat sistemində simmetrikdirsə (antisimetrikdirsə), onda

$$a'_{ij} = \alpha_{i'\ell} \alpha_{k'm} a_{\ell m} = \alpha_{i'\ell} \alpha_{k'm} a_{m\ell} = a'_{j'i} \quad (3.6.3)$$

bərabərliyinə əsasən, o K' sistemində də simmetrikdir (antisimetrikdir).

Əgər istənilən sayda aşağı indeksləri olan tenzorun istənilən iki indeksinin yerini dəyişdirdikdə onun komponentləri dəyişmirlərsə, onda belə tenzora aşağı indekslərə nəzərən mütləq simmetrik tenzor deyilir. Bu tərifə ayrıca yuxarı indeksli tenzorlara da aid etmək olar. məsələn, üçvalentli mütləq simmetrik tenzorunda komponentləri

$$a_{mnp} = a_{mpn} = a_{nmp} = a_{npm} = a_{pnm} = a_{pnm} \quad (3.6.4)$$

şərtlərini ödəyirlər.

Tenzor ya hər hansı iki indekslər cütünə görə, ya da bütün indekslər cütünə görə antisimetrikdir ola bilər. İkinci halda tenzora mütləq antisimetrikdir deyilir. Məsələn, üçvalentli a_{mnp} antisimetrikdir tenzorunun komponentləri üçün aşağıdakılar doğrudur:

$$a_{mnp} = -a_{mpn} = -a_{nmp} = -a_{npm} = -a_{pnm} = -a_{pnm}$$

Simmetriya və antisimetriya haqqında dediklərimiz eyni dərəcədə yuxarı indekslər üçün də doğrudur.

Teorem. İstənilən a_{ij} tenzoru iki simmetrik və antisimetrikdir tenzorların cəmi şəklində göstərilə bilər.

Bu teoremin isbatı

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) + \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) \quad (3.6.5)$$

Bərabərliyindən çıxır, belə ki

$b_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ simmetrik, $c_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$ isə antisimmetrik tenzorlardır, çünki, $b_{ij} = b_{ji}$ və $c_{ij} = -c_{ji}$.

§3.7. Üç valentli antisimmetrik tenzor və Kroneker simvolları

Ancaq 0, +1, -1 qiymətləri alan e_{rst} tenzoruna baxaq. belə ki,

$$e_{rst} = \begin{cases} 0 & \text{indekslərdən ikisi eyni olduqda} \\ +1 & \text{rst indeksləri 123 ədədlərinin cüt yerdəyişməsi olduqda} \\ -1 & \text{rst 123 ədədlərinin tək yerdəyişməsi olduqda} \end{cases}$$

Eyni müvəffəqiyyətlə həmin şərtlər daxilində həmin qiymətləri alan e^{rst} tenzoruna da baxmaq olar. Bunlarla yanaşı aşağıdakı qiymətləri alan mütləq antisimmetrik a_{rst} tenzoruna da baxaq.

$$a_{rst} = \begin{cases} 0 & \text{indekslərdən istənilən ikisi eyni olduqda} \\ +a_{123} & \text{rst 123 ədədlərinin cüt yerdəyişməsi olduqda} \\ -a_{123} & \text{rst 123 ədədlərinin tək yerdəyişməsi olduqda} \end{cases}$$

Onda, fərz edək ki, $e_{123}=+1$ istənilən üçvalentli mütləq antisimmetrik a_{rst} tenzorunu belə ifadə edə bilərik

$$a_{rst} = a_{123}e_{rst} \quad (3.7.1)$$

bu bərabərliyi yuxarı indekslərlə də yazmaq olar

$$a^{rst} = a^{123}e^{rst} \quad (3.7.2)$$

Burada e^{rst} ancaq e_{rst} -nin aldığı qiymətləri alan üçvalentli vahid kontravariant tenzordur. Deməli, bu tenzorlar vasitəsi ilə vurma və bükmə əməlləri tətbiq etməklə başqa tenzorlar almaq olar.

Məsələn

$$\delta_{mnp}^{rst} = e^{rst}e_{mnp} \quad (3.7.3)$$

Alınan bu altivalentli qarışıq tenzor aşağıdakı qiymətləri ala bilər:

- a) +1 əgər rst və mnp bir-birindən cüt sayda yerdəyişmələrlə fərqlənirlərsə;
- b) - 1 əgər rst və mnp biri-birindən tək sayda yerdəyişmələrlə fərqlənirlərsə;
- c) 0 əgər iki və ya çox sayda yuxarı və aşağı indekslər eynidirlərsə.

İndi δ_{mnp}^{rst} tenzorunu elə bükək ki, nəticədə dördvalentli tenzor alınsın. Bunun üçün məsələn $t = p$ götürək. Onda

$$\delta_{mn}^{rs} = \delta_{mnp}^{rsp} = \delta_{mn1}^{rs1} + \delta_{mn2}^{rs2} + \delta_{mn3}^{rs3} \quad (3.7.4)$$

Antisimmetrik tenzorun tərifinə əsasən burada $r = s$ və ya $m=n$ olduqda bu cəm sifra bərabərdir. Digər tərəfdən r və s -ə müəyyən qiymətlər versək, məsələn $m = 1, s = 2$ desək

$$\delta_{mn}^{12} = \delta_{nn3}^{123} \quad (3.7.5)$$

Bərabərliyi doğru olan və sağ tərəf sifra bərabər olduğundan δ_{mn}^{12} tenzorunun komponentləri m və n 1 və 2-nin yerdəyişmələri olmadıqda yoxa çıxır. Lakin o cüt yerdəyişmədə +1-ə tək yerdəyişmədə isə -1-ə bərabər olur. r və s -ə başqa müəyyən qiymətlər verdikdə də eyni nəticəyə gəlirik. Beləliklə, δ_{mn}^{rs} -in komponentləri aşağıdakı qiymətləri ala bilərlər:

$$\delta_{mn}^{rs} = \begin{cases} 0 & \text{iki yuxarı və ya iki aşağı indekslər bərabər və} \\ & \text{yaxud da yuxarı indekslərdən biri aşağı} \\ & \text{indekslərdən birinə bərabər olmadıqda} \\ +1 & \text{rs və mn eyni ədədlərin eyni yerdəyişmələri} \\ & \text{olduqda} \\ -1 & \text{rs və mn bir-birinə nəzərən eyni iki ədədin əks} \\ & \text{yerdəyişmələri olduqda} \end{cases} \quad (3.7.6)$$

İndi δ_{mn}^{rs} -i $s=n$ deyib bükək və nəticəni 2-yə bölək. Onda alarıq:

$$\delta_m^r = \frac{1}{2} \delta_{mn}^m = \frac{1}{2} (\delta_{m1}^{r1} + \delta_{m2}^{r2} + \delta_{m3}^{r3}) \quad (3.7.7.)$$

Buradan da $r=1$ desək alarıq

$$\delta_m^1 = \frac{1}{2}(\delta_{m2}^{13} + \delta_{m3}^{r3}) \quad (3.7.8)$$

$m \neq 1$ olduqda $\delta_m^1 = +1$ olur. $r=2$ və yaxud $r=3$ dedikdə də oxşar nəticə alınır. Beləliklə

$$\delta_m^r = \begin{cases} 0 & r \neq m \\ +1 & r = m \end{cases} \text{ olduqda.}$$

Haqqında danışdığımız bütün bu δ obyektlərinə Kroneker simvolları deyilir.

IV FƏSİL.

SAHƏ NƏZƏRİYYƏSİ VƏ TERMODİNAMİKA HAQQINDA QISA MƏLUMAT

Termodinamik sistem dedikdə çoxlu sayda atom, molekul, ion və müxtəlif strukturlardan ibarət fiziki sistem – pyezotermoelastik sistem başa düşülür. Belə sistemdə mexaniki gərginlik, elektrik, temperatur sahəsi və elektrik induksiya bir-biri ilə qarşılıqlı təsirdə olur.

Termodinamika qanunlarına və sahə nəzəriyyəsinə bələd olmadan belə mürəkkəb sistemlərin hal dəyişməsinə ifadə edən hal funksiyalarının seçilməsi prinsiplərini öyrənmək həqiqətən çətindir. Odur ki, dönmə proseslər üçün Karno tsikli (adiabatik və izotermik proseslər), entropiya anlayışı; sahə nəzəriyyəsində isə qradient, divergensiya və rotor kimi riyazi operatorların fiziki mahiyyətini, «sürüşmə» cərəyanı anlayışının mahiyyətini bir qədər ətraflı nəzərdən keçirmək məqsəddə uyğun sayılmalıdır. Onu da qeyd edək ki, kristaldaxili sahə (xarici təsir olmadıqda belə) elektromaqnit sahədir və kristal qəfəs daima rəqsi hərəkətdə olduğu üçün kristaldaxili sahənin gərginliyi də müəyyən bir orta qiymət ətrafında dəyişir. Heç də az olmayan bu orta qiymət, yəni sahənin gərginliyi 10^8 V/sm tərtibində və bəzən daha çox olur. İstənilən xarici təsirdən (deformasiya, elektrik) kristaldaxili sahənin dəyişməsi hadisəsi Maksvell tənlikləri ilə ifadə olunur. Odur ki, Maksvell tənliklərinin quruluşunu, yəni $\text{grad}\varphi$, $\text{div}\vec{E}$ və $\text{rot}\vec{H}$ kimi operatorları ilk növbədə nəzərdən keçirək. Məlumdur ki, skalyar fiziki kəmiyyətin paylandığı sahə skalyar sahə, vektorial kəmiyyətin paylandığı sahə isə vektor sahə adlanır.

Məsələn, maye və ya qazın axını zamanı temperatur və ya sıxlığın paylandığı sahə skalyar sahədir, həmin fəzada sürətin paylanması isə vektor sahədir.

§4.1. Skalyar sahə və onun qradienti

Əgər skalyar sahənin hər bir nöqtəsində fiziki kəmiyyətin ədədi qiyməti məlumdursa və ya paylanma qanunu müəyyən skalyar funksiya vasitəsi ilə ifadə olunubsa, onda skalyar sahə verilmiş olur.

Tutaq ki, dekart koordinat sistemində skalyar sahə verilmişdir:

$$u = u(x, y, z) \quad (4.1.1)$$

skalyar sahənin həndəsi təsviri səviyyə səthi vasitəsi ilə verilir. Səviyyə səthi – skalyar funksiyanın eyni qiymətlər aldığı nöqtələrin həndəsi yerinə deyilir. Tərifə görə

$$u(x, y, z) = c, \quad c = \text{const.}$$

səviyyə səthinin tənliyidir. Əgər skalyar kəmiyyət müstəvi üzərində təyin olunursa, müstəvi sahənin tənliyi

$$u = u(x, y)$$

kimi yazılır.

Buna uyğun olaraq funksiyanın eyni qiymətlər aldığı nöqtələrin həndəsi yeri isə

$$u(x, y) = c, \quad c = \text{const.}$$

səviyyə xətləri adlanır. Skalyar sahəni təhlil edərkən səviyyə səthini və səthin normalı istiqamətində sahənin hər vahid məsafədə dəyişmə sürətini tapmaq lazım gəlir. Bu səpgidə suallara cavab verərkən ən çox qradient operatorundan istifadə olunur. Skalyar sahənin qradienti operatoru gradu – kimi işarə olunur və belə təyin olunur

$$\text{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k} \quad (4.1.2)$$

gradu operatorunu mənalandırmaq üçün, verilmiş sahənin cari $M(x, y, z)$ nöqtəsində ixtiyari $\bar{\ell}$ istiqamətində sahənin dəyişmə (hər vahid uzunluqda) sürətini təyin edək. Bu məqsədlə verilmiş skalyar funksiya $\bar{\ell}$ istiqamətində törəmə alaq:

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \ell} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \ell} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \ell}$$

gradu – operatorunu əldə etmək üçün bərabərliyin sağ tərəfini iki vektorun skalyar hasilinə şəklində göstərək:

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \ell} \bar{i} + \frac{\partial y}{\partial \ell} \bar{j} + \frac{\partial z}{\partial \ell} \bar{k} \right)$$

Birinci vuruq gradu operatoru, ikinci vuruq isə $\bar{\ell}$ istiqamətində $\bar{\ell}^0$ vahid vektordur. Doğurdan da $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ olduğunu nəzərdə tutsaq alarıq ki,

$$\frac{dx}{d\ell} \bar{i} + \frac{dy}{d\ell} \bar{j} + \frac{dz}{d\ell} \bar{k} = \frac{d\bar{r}}{d\ell} = \bar{\ell}^0.$$

Beləliklə, skalyar sahənin $\bar{\ell}^0$ istiqamətində dəyişmə sürətini təyin etdik:

$$\frac{du}{d\ell} = (\text{gradu}, \bar{\ell}^0) \quad (4.1.3)$$

Bu skalyar hasilin birinci vuruğu skalyar sahənin səviyyə səthinin normalı istiqamətində dəyişmə sürətini, ikinci vuruq $\bar{\ell}^0$ isə verilmiş istiqaməti göstərən vahid vektordur.

(4.1.3) ifadəsində gradu vektoru səviyyə səthinin (M nöqtəsində) normalı istiqamətində yönəlir. Odur ki, $\bar{\ell}^0$ istiqaməti səviyyə səthinin \bar{n} normalı istiqaməti ilə üst-üstə düşdükdə

$\frac{du}{d\ell}$ ən böyük qiymət alır:

$$\max \frac{du}{d\ell} = |\text{gradu}| \quad (4.1.4)$$

gradu vektoru funksiyanın artması istiqamətində yönəlir və həmin nöqtədə səviyyə səthinin normalı ilə kolleniardır. Fikrimizi bir sadə məsələ ilə tamamlayaq. Tutaq ki, fiziki kəmiyyətin paylanma qanunu, yəni skalyar sahə verilmişdir:

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$

səviyyə səthi sferadır $x^2 + y^2 + z^2 = c$, sferanın normalı istiqamətinin onun radiusu istiqamətində olduğunu bilirik, bu faktı gradu operatoru vasitəsi ilə də göstərək:

$$\text{gradu} = 2x\bar{i} + 2y\bar{j} + 2z\bar{k} = 2\bar{r}$$

$$|\text{gradu}| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = 2r$$

olduğundan, gradu – vektorunun

$$\frac{\text{gradu}}{|\text{gradu}|} = \frac{2\bar{r}}{2r} = \bar{n}^0$$

sferanın normalı ilə kolleniar olduğu alınır.

İndi də verilmiş $M_0(1, 1, 1)$ nöqtəsində sahənin ən böyük dəyişmə istiqamətini və qiymətini təyin edək:

$$(\text{gradu})_{M_0} = 2(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}), \quad |\text{gradu}| = 2\sqrt{3}$$

gradu vektor operatoru vasitəsi ilə daha bir suala cavab verək; M_0 və $M_1(-1; 2; 3)$ nöqtələrindən keçən $\bar{\ell}^0$ vektoru istiqamətində sahənin dəyişmə sürətini göstərin.

$$\bar{\ell} = \overline{M_0M_1} = -2\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k} \quad \ell = \sqrt{4+1+4} = 3$$

$$\bar{\ell}^0 = \frac{\bar{\ell}}{\ell} \quad \bar{\ell}^0 = \frac{-2\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}}{3}$$

İndi də $M_0(1, 1, 1)$ nöqtəsinə $\bar{\ell}^0$ istiqamətində sahənin dəyişmə sürətini göstərək.

$$\frac{du}{d\ell} = (\text{gradu}, \bar{\ell}^0) = (2\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}) \left(-\frac{2}{3}\bar{i} + \frac{1}{3}\bar{j} + \frac{2}{3}\bar{k} \right) = \frac{2}{3}$$

Nəticə. gradu – vektoru səviyyə səthinin normalı istiqamətində yönəlir və skalyar funksiyanın maksimum artması istiqamətini göstərir:

$$\max \frac{du}{d\ell} = |\text{gradu}|.$$

Vektor sahə. Əgər fəzanın cari M nöqtəsində vektorial kəmiyyət təyin oluna bilərsə və ya paylanma qanunu $\vec{a}(M)$ vektoru verilərsə, onda vektor sahə verilmiş olur. Seçilmiş dekart koordinat sistemində cari $M(x, y, z)$ nöqtəsində vektor funksiya $\vec{a} = \vec{a}(M)$ üç skalyar funksiya vasitəsi ilə ifadə olunur.

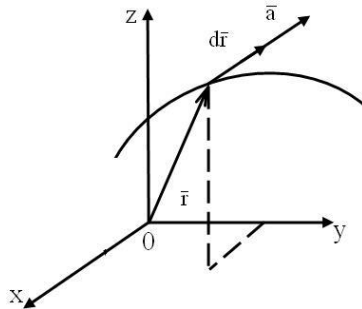
$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Bu skalyar funksiyalar \vec{a} vektorunun koordinat oxları üzərindəki proyeksiyalarıdır:

$$a_x = P(x, y, z), a_y = Q(x, y, z), a_z = R(x, y, z).$$

Vektor sahənin həndəsi təsviri, vektor xətləri vasitəsi ilə verilir. Verilmiş \vec{a} vektoru sahənin hər bir nöqtəsində toxunan olduğu əyriyə ailəsinə vektor xətləri deyilir. Vektor xətlərinin necə tapıldığını göstərək.

Şəkil 4.1.1-dən görüldüyü kimi \vec{a} vektoru əyriyə toxunan olduğu üçün \vec{a} və $d\vec{r}$ koleniar vektorlardır:



Şəkil 4.1.1.

$$d\vec{r} = \lambda \vec{a} \quad \text{və ya} \quad d\vec{r} = \lambda(P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) \quad (4.1.5)$$

λ - sabit vuruqdur. Bu vektor bərabərliyi analitik formada

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

sistem kimi yazaq:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y, z)}{P(x, y, z)} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{R(x, y, z)}{P(x, y, z)} \end{cases} \quad (4.1.6)$$

vektor xətlərin diferensial tənlikləridir.

Bu diferensial tənliklər sisteminin həlli

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = C_1 \\ \varphi_2(x, y, z) = C_2 \end{cases}$$

iki parametrlı əyrilər ailəsini təsvir edir və cari M_0 nöqtəsindən yeganə vektor xətti keçir:

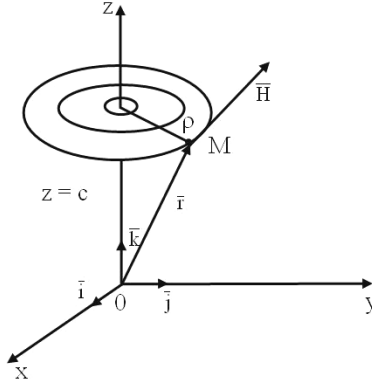
$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = \varphi_1(x_0, y_0, z_0) \\ \varphi_2(x, y, z) = \varphi_2(x_0, y_0, z_0) \end{cases} \quad (4.1.7)$$

Fikrimizi bir məsələ ilə tamamlayaq. Məlumdur ki, kifayət qədər uzun naqıldən öz oxu istiqamətində axan cərəyanın yaratdığı maqnit sahəsi və bu maqnit sahəsi gərginliyinin paylanması qanunu Bio-Savar tərəfindən verilmişdir və belə yazılır:

$$\vec{H} = \frac{2}{C\rho} [\vec{I}, \vec{r}] \quad (4.1.8)$$

Burada \vec{H} - maqnit sahəsinin gərginlik vektorudur, $\vec{I} = I\vec{k}$ cərəyan vektoru; \vec{r} - cari M nöqtəsini təyin edən radius-vektor; ρ - naqıldən M nöqtəsinə qədər məsafədir; C - işıq sürətidir

Şəkil 4.1.2-dən görüldüyü kimi $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ və $\rho^2 = x^2 + y^2$ olduğundan Bio-Savar formulu aşağıdakı şəkllə düşür:



Şəkil 4.1.2.

$$[\bar{I}, \bar{r}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & I \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = -Iy\bar{i} + Ix\bar{j}$$

$$\bar{H} = \frac{2I}{C} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \bar{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \bar{j} \right) \quad (4.1.9)$$

Vektor xətlərinin diferensial tənliyi ($x^2 + y^2 \neq 0$) belə yazılar

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}$$

Sistem şəklində isə

$$\begin{cases} xdx = -ydy \\ dz = 0 \end{cases}$$

həlli $x^2 + y^2 = R$, $z = c$.

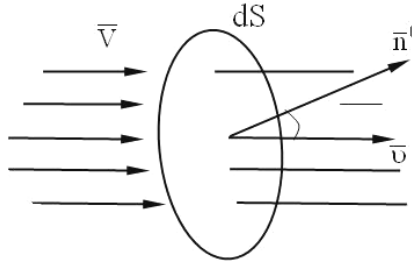
Doğurdan da, maqnit gərginlik xətləri mərkəzi oz oxu üzərində olan çəvrədir. Maqnit sahəsinin vektor xətləri qapalı əyri-dir və önəmli olan isə budur ki, bu qapalı əyriyərin nə başladığı nöqtə, nə də sona çatdıqları nöqtə yoxdur

§4.2. Vektor sahənin seli və onun divergensiyası

Sel dedikdə, adətən vahid zamanda müəyyən səthdən keçən maye və ya qazın həcmi başa düşülür. Halbuki, elektrik və maqnit sahəsində zərrəcik və hərəkət anlayışı olmasa da, belə sel anlayışından istifadə olunur. Odur ki, sel anlayışının daha geniş şərhə ehtiyacı vardır. İkiüzlü səthin bir üzü xarici, digər üzü isə daxili səth adlanır, xarici səthin normalı müsbət, daxili səthin normalının istiqaməti isə mənfi işarə ilə yazılır. Sadəlik xatirinə S səthini daxildən xaricə kəsib keçən maye və ya qazın həcmi hesablayaq. Seçilmiş ixtiyari dS səthindən dt zamanı ərzində keçən maye və ya qazın həcmi $V_n dS \cdot dt$ olar. Səmtə uyğun vahid vektoru \vec{n}^0 ilə işarə edək və selin dəyişməsinə skalyar hasil şəklində göstərək:

$$d\Phi = (\vec{V}, \vec{n}^0) dS$$

Təbii ki, tam səthdən keçən sel



Şəkil 4.2.1.

$$\Phi = \iint_S (\vec{V}, \vec{n}^0) dS \quad (4.2.1)$$

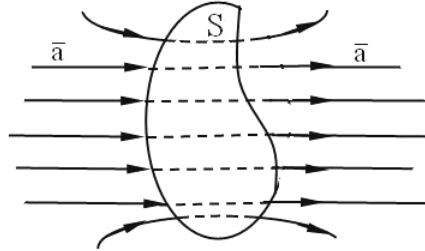
Bu sürət vektorunun selidir və həcmə vahidi ilə ölçülür.

Sel skalyar kəmiyyətdir. Sel anlayışını istənilən vektor sahəyə şamil etmək üçün selə həndəsi təsnifat verilmişdir. Şərti olaraq qəbul edilmişdir ki, ixtiyari \vec{a} vektorunun S səthindən keçən seli onu daxildən xarici normal istiqamətində kəsib keçən vektor xətlərinin miqdarına bərabərdir. Tərifə əsasən \vec{a} vektorunun S səthindən keçən seli belə təyin olunur.

$$\Phi = \iint_S (\bar{a}, \bar{n}^0) dS \quad (4.2.2)$$

Burada «miqdar» sözü cəbri mənada başa düşülür; bu inteqral müsbət, mənfi və ya sıfıra bərabər ola bilər.

İndi, \bar{a} vektoru sahəsində qapalı S səthini nəzərdən keçirək (şəkil 4.2.2).



Şəkil 4.2.2

Qapalı səthin bir hissəsindən vektor xətləri daxil olur $\Phi_1 < 0$; $\bar{n}^0 < 0$, qalan hissəsindən isə çıxır $\Phi_2 > 0$; $\bar{n}^0 > 0$. Tam səth üzrə inteqral çıxan Φ_2 və daxil olan Φ_1 selin fərqini göstərir. Baxılan halda səthə daxil olan vektor xətlərinin miqdarı, çıxan vektor xətlərinin miqdarına bərabər və əks işarəlidirlər. Başqa sözlə, qapalı səthdən çıxan vektor xətlərinin seli müsbət, daxil olan vektor xətlərinin seli isə mənfi olduğu üçün bir-birini kompensasiya edirlər. Bu halda qapalı səth üzrə ikiqat inteqral sıfıra bərabər olur.

$$\iint_S (\bar{a}, \bar{n}^0) dS = 0 \quad (4.2.3)$$

Əgər qapalı səth daxilində, yeni vektor xətlərinin başlanğıcı (mənbə) varsa, onda inteqral müsbət işarəli olur:

$$\iint_S (\bar{a}, \bar{n}^0) dS > 0$$

Bir daha vurğulayaq ki, müsbət inteqral və ya $\Phi > 0$ ancaq və ancaq S səthi daxilində əmələ gələn, yəni başlanğıc mənbəli olan vektor xətlərinin miqdarını təyin edir.

Əgər qapalı S səthi daxilində vektor xətləri udulursa, onda inteqral mənfi işarəli olur:

$$\iint_S (\bar{a}, \bar{n}^0) dS < 0$$

Bu məntiqlə elektrik yükünü özündə saxlayan qapalı səthdən çıxan sel $\Phi > 0$ olmalıdır. Belə ki, elektrik sahəsini yaradan mənbə elektrik yüküdür və \bar{E} gərginlik vektorunun xətləri mənbədən başlanır. Radiusu R olan sferanın daxilində müsbət q elektrik yükü olduğunu qəbul edək. \bar{E} gərginlik vektorunun sferadan çıxan selini hesablayaq. Nöqtəvi yükün gərginlik vektoru mərkəzi mənbə üzərində olan sferanın radiusu boyunca, yəni xarici normalı istiqamətində yönəldiyindən, belə yazmaq olar:

$$\bar{a} = \bar{E}, \quad \bar{E} = \frac{q}{r^2} \bar{r}^0, \quad k = 1, \quad \bar{n}^0 = \bar{r}^0 \quad \bar{r}^0 = \frac{\bar{r}}{r}$$

$$(\bar{a}, \bar{n}^0) = \left(\frac{q\bar{r}}{r^3}, \frac{\bar{r}}{r} \right) = \frac{q}{r^2}$$

sferanın səthində $r=R$ və sel

$$\iint_S (\bar{a}, \bar{n}^0) dS = \frac{q}{R^2} \iint_S dS$$

Nəticədə aldıq ki,

$$\iint_S (\bar{E}, \bar{n}^0) dS = 4\pi q \quad (4.2.4)$$

Bu bərabərlik Qaus teoremi adlanır. Nəticə isə belə (4.2.4) kimi ifadə olunur. Vektor xətlərinin miqdarı (seli) yükün miqdarı ilə düz mütənəşib olub, səthin formasından asılı deyil. Nöqtəvi müsbət yükün yaratdığı vektor xətləri ancaq və ancaq bu nöqtəvi yükdən başlanır və sonsuzluqda qurtarır. Nöqtəvi mənfi yüklərdə isə, əksinə sonsuzluqdan gələn vektor xətləri mənfi yükə qurtarırlar.

\bar{a} vektor sahəsinin selini hesablayarkən ikiqat səth inteqralının həcmi ifadə etdiyini demişdik. Onu əsas götürərək, seli,

S qapalı səthinin ayırdığı V həcmindən çıxan vektor xətlərinin miqdarı kimi təqdim edək. Deyə bilərik ki, $\Delta\Phi$ selinin mənbəyi qapalı səthin ayırdığı ΔV həcmidir.

Mənbəyin məhsuldarlığı dedikdə, hər vahid həcm verdiyi vektor xətlərinin miqdarı başa düşülür. Onda orta məhsuldarlıq $\frac{\Delta\Phi}{\Delta V}$, sahənin cari M nöqtəsindəki məhsuldarlığı isə belə yazılar:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow M} \frac{\Delta\Phi}{\Delta V} = \frac{d\Phi}{dV}$$

Bu limit varsa divergensiya adlanır və belə işarə olunur:

$$\frac{d\Phi}{dV} = \text{div} \bar{a}$$

Elementar həcmərdən başlanan vektor xətləri miqdarının cəmi, tam həcm üzrə inteqralı anlamına gəlir:

$$\Phi = \iiint_V \text{div} \bar{a} dV \quad (4.2.6)$$

\bar{a} vektorunun V həcmində əmələ gələn vektor xətlərinin miqdarı üzrə, həmşinin qapalı S səthindən keçən seldir. Vektor sahənin selini hesablayarkən verilmiş məsələ üçün əlverişli olan (4.2.2) və ya (4.2.6) formulundan istifadə etmək olar. çünki hər iki formul eyni bir seli təyin edir.

(4.2.2) və (4.2.6) ifadələrin bərabərliyi

$$\iint_S (\bar{a}, \bar{n}^0) dS = \iiint_V \text{div} \bar{a} dV \quad (4.2.7)$$

Qaus-Ostraqradski teoremi adlanır.

$\bar{a} = \bar{E}$ elektrik sahəsi üçün $\text{div} \bar{E}$ operatorunu təyin edək. Tutaq ki, baxılan fəzada paylanan elektrik yükünün sıxlığı ρ_e , sahənin gərginliyi isə \bar{E} olmuşdur. Onda $dq = \rho_e dV$ olduğunu nəzərə alsaq və Qaus teoremində (4.2.4) ikiqat inteqraldan üçqat inteqrala (4.2.7) keçmək alırıq ki,

$$\iiint_V \operatorname{div} \bar{E} dV = 4\pi \iiint_V \rho_e dV. \quad (4.2.8)$$

Bu bərabərlik istənilən həcm və forma üçün doğru olduğundan integralaltı ifadələr bərabər olurlar:

$$\operatorname{div} \bar{E} = 4\pi \rho_e. \quad (4.2.9)$$

Bu elektrik sahəsi üçün Qaus teoreminin diferensial formasıdır.

$\bar{a} = \bar{H}$ maqnit sahəsi üçün Qaus teoreminin diferensial ifadəsini göstərək. Elektrik sahəsindən fərqli olaraq maqnit yükünü daşıyan zərrəcik (mənbə) yoxdur. Maqnit sahəsi yüklü zərrəciyin (elektronun) hərəkəti sayəsində əmələ gəlir. O cümlədən cərəyanlı naqıl (elektronların nizamlı hərəkəti) maqnit sahəsinin mənbəyidir – demək olar. Lakin vektor xətləri (şəkil 4.2.2) qapalı əyriyədir və onların nə başlanğıcı, nə də sonu yoxdur. Başqa sözlə, maqnit sahəsində qapalı səthin ayırdığı həcmdə başlanğıcı (və ya sonu) olan vektor xətləri yarana bilməz. Bu səbəbdən

$$\operatorname{div} \bar{H} = 0 \quad (4.2.10)$$

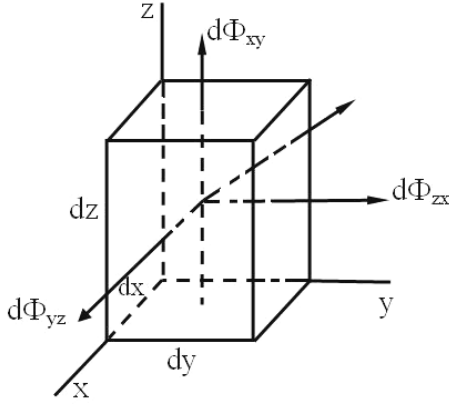
Divergensiyası sıfıra bərabər olan vektor sahə, çox vaxt, salenoidal sahə adlandırılır.

$\operatorname{div} \bar{a}$ operatorunu invariant formada, yəni koordinat sistemi seçmədən təyin etmişik; divergensiya skalyar kəmiyyətdir və sahənin cari M nöqtəsində məhsuldarlığını göstərir.

İndi isə, önəmli bir sualı,

$$\bar{a} = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$$

vektor sahə dekart koordinat sistemində verildikdə $\operatorname{div} \bar{a}$ operatorunun necə hesablandığını cavablandırmalıyıq. Aydındır ki, məhsuldarlıq həcmnin formasından asılı deyil. Bunu əsas götürərək $d\Phi$ selinin mənbəyi olan dV həcmi düzbucaqlı paralelepiped formada seçək və onun tillərini koordinat oxlarına paralel yönəldək (şəkil 4.2.3).



Şəkil 4.2.3.

Paralelepipedin arxa və qarşı üzlərini uyğun olaraq 1 və 2 indeksləri ilə fərqləndirək. Qarşı üzdən çıxan sel müsbət, arxa üzdən çıxan sel isə mənfi işarəlidir. dV həcmindən çıxan $d\Phi$ selini arxa və qarşı üzlərdən keçən üç selin cəmi kimi göstərək.

$$d\Phi = d\Phi_{yz} + d\Phi_{xz} + d\Phi_{xy} \quad (4.2.11)$$

burada

$$d\Phi_{yz} = (P_2 - P_1)dS_{yz} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx \right) dy dz$$

$$d\Phi_{xz} = (Q_2 - Q_1)dS_{xz} = \left(\frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) dx dz$$

$$d\Phi_{xy} = (R_2 - R_1)dS_{xy} = \left(\frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dx dy$$

olduğunu nəzərdə tutaraq, alırıq ki,

$$d\Phi = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV. \quad (4.2.12)$$

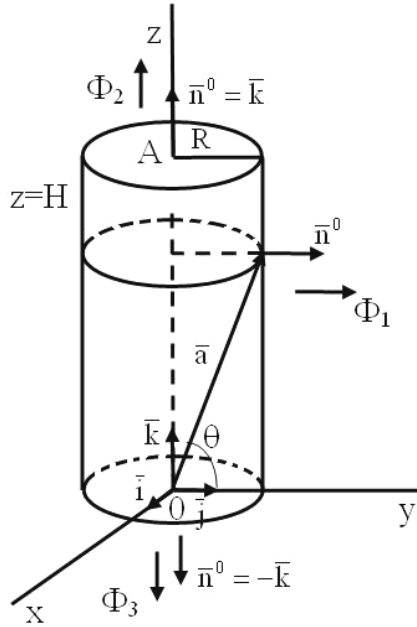
Deməli, ixtiyari V həcmindən çıxan seli təyin edə bilirik:

$$\Phi = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV \quad (4.2.13)$$

(4.2.6) və (4.2.13) ifadələrinin müqayisəsindən görünür ki,

$$\operatorname{div} \bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (4.2.14)$$

Selin hesablanmasında $\operatorname{div} \bar{a}$ operatorunu göstərmək xatirinə bir sadə məsələnin iki üsulla həllini nəzərdən keçirək. Seçilmiş koordinat sistemində (şəkil 4.2.4) vektor sahə verilmişdir: $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$.



Şəkil 4.2.4.

Radiusu R , hündürlüyü H olan silindrdən çıxan seli hesablayaq. S silindrin tam səthi S_1 – yan və S_2 , S_3 oturacaqların sahələrindən ibarətdir $S = S_1 + S_2 + S_3$.

$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = \bar{r}$ olduğundan $\bar{a} = \bar{r}$ və yan səthdən keçən sel

$$\Phi_1 = \iint_{S_1} (\bar{a}, \bar{n}^0) dS = \iint_{S_1} (\bar{r}, \bar{n}^0) dS$$

$$(\bar{r}, \bar{n}^0) = |\bar{n}^0| r \cos \theta = R, \quad \theta = \bar{r} \wedge \bar{n}^0$$

$$\Phi_1 = R \iint_{S_1} dS = R \cdot 2\pi R H;$$

$$\Phi_1 = 2\pi R^2 H$$

üst oturacaqda $\bar{n}^0 = \bar{k}$; $(\bar{a}, \bar{n}^0) = (\bar{r}, \bar{k}) = H$

$$\Phi_2 = \iint_{S_2} (\bar{a}, \bar{n}^0) dS = H \iint_{S_2} dS = \pi R^2 \cdot H$$

alt oturacaqdan keçən sel: $\bar{a} = \bar{k}$, $\bar{n}^0 = -\bar{k}$, $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j}$

$$\Phi_3 = \iint_{S_3} (\bar{r}, \bar{n}^0) dS = 0$$

$$\Phi = 2\pi R^2 H + \pi R^2 H = 3\pi R^2 H \quad (4.2.15)$$

Qaus-Ostraqradski teoreminə görə isə sel

$$\Phi = \iiint_V \operatorname{div}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) dV$$

$$\operatorname{div} \bar{r} = \frac{\partial x}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial y}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial z}{\partial z} \bar{k} = 1 + 1 + 1 = 3 \text{ olduğundan}$$

$$\Phi = 3 \iiint_V dV = 3\pi R^2 H \quad (4.2.16)$$

§4.3. Burulğanlı sahə və onun rotoru

Fiziki mahiyyətindən asılı olmayaraq istənilən \bar{a} vektor sahəsi üçün qapalı L əyrisi boyunca əyrixətli inteqral

$$\Gamma = \oint \bar{a} \cdot d\bar{r} \quad (4.3.1)$$

vektor sahəsinin sirkulyasiyası adlanır. Burada $\bar{r} = \bar{r}(M)$ verilmiş L əyrisi üzərində cari M nöqtəsini təyin edən radius vektordur.

$d\bar{r}$ sonsuz kiçiləni $\bar{\tau}$ - toxunan istiqamətdə əyrinin qövsü $d\ell$ - diferensialı $d\bar{r} = \bar{\tau} d\ell$ ilə əvəz edək və sirkulyasiyanı belə yazaq

$$\Gamma = \oint_L (\bar{a}, \bar{\tau}) d\ell \quad (4.3.2)$$

Bu əyrixətli inteqralı hesablamaq üçün L əyrisinin müsbət səmti $\bar{\tau}$ qapalı əyri üzrə elə istiqamətlənir ki, inteqrallama zamanı sahə həmişə solda qalsın, inteqrallama əks istiqamətdə aparıldıqda inteqralın işarəsi dəyişir.

Vektor sahənin sirkulyasiyası sahənin burulğanlı olub-olmadığını xarakterizə edir. (4.3.2) inteqralın sıfıra bərabər olması sahənin burulğanlı olmadığını göstərir və belə sahələr potensiallı sahə adlanır.

Burulğanlı sahəni nəzərdən keçirək. Tutaq ki, \bar{a} vektoru xoy müstəvisində fırlanma radiusuna perpendikulyar olmaqla paylanmışdır.

$$\bar{a} = \omega \bar{r} \quad (4.3.3)$$

ω - sabit, mütənasiblik əmsəlidir.

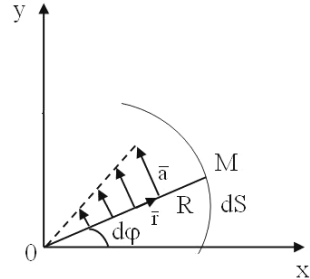
$r = R$ radiuslu qapalı kontur üzrə sirkulyasiyanı hesablayaq.

Şərtə görə \bar{a} və $\bar{\tau}$ kolleniar vektorlardır və $d\ell = R d\varphi$ olduğundan

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} \bar{a} \cdot R d\varphi = \int_0^{2\pi} \omega R^2 d\varphi$$

$$\Gamma = \pi R^2 \cdot 2\omega \quad (4.3.4)$$

Bu sadə məsələnin (4.3.4) həllindən görüldüyü kimi sirkulyasiya qapalı konturun ayırdığı sahə ilə mütənasibdir. Bu mütənasiblik çox önəmlidir və ən ümumi halda da doğrudur. Odur ki, bu sadə məsələnin həllini bir qədər də genişləndirək. Vahid səthə düşən sirkulyasiya sıxlığını təyin edək:



Şəkl 4.3.1.

$$\frac{\Gamma}{\pi R^2} = 2\omega \quad (4.3.5)$$

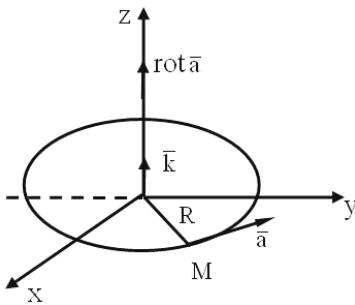
Sirkulyasiya sıxlığı sabit kəmiyyətdir və bərk cismin fırlanma bucaq sürəti kimi bütün nöqtələrdə eynidir. Bu kəmiyyət fırlanmanın (inteqrallamanın) istiqamətindən asılı olduğu üçün onu bir aksial vektorla $\text{rot } \bar{a}$ - ilə ifadə edirik. $\text{rot } \bar{a}$ - burulğan vektoru adlanır və səthin normalı boyunca elə istiqamətlənir ki, onun ucundan baxdıqda inteqrallama səmti pozulmasın (kontur boyu fırlanmada sahə solda qalsın). Baxılan məsələdə (şəkil 4.3.2)

$$\text{rot } \bar{a} = 2\omega \bar{k} \quad (4.3.6)$$

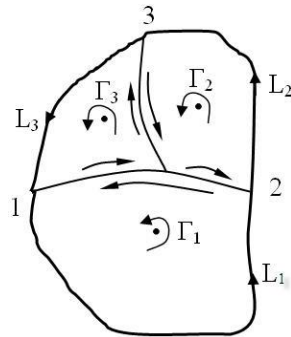
Sirkulyasiya skalyar kəmiyyət olduğu üçün səthin \bar{n}^0 - normalı ilə $\text{rot } \bar{a}$ vektorlarının skalyar hasilindən istifadə edək:

$$\Gamma = (\text{rot } \bar{a}, \bar{n}^0) \cdot \pi R^2 \quad (4.3.7)$$

Bir qədər də ümumiləşmə aparaq. Sirkulyasiyanın önəmli xassələrindən biri onun toplama qanununa tabe olmasıdır. Bunu göstərmək üçün L qapalı əyrinin ayırdığı S səthi üç hissəyə ayıraraq $S_1 + S_2 + S_3 = S$ və bu sahələrdə yaranan sirkulyasiyaları uyğun olaraq Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 ilə işarə edək. Bütün konturlarda (şəkil 4.3.3) inteqrallama səmti eynidir və daxili konturlarda əks istiqamətli inteqrallar müxtəlif işarəli olduqları üçün ixtisar olacaqlar.



Şəkil 4.3.2.



Şəkil 4.3.3.

Nəticədə, ancaq xarici kontur boyunca integral qalacaqdır:

$$\int_{L_1} \bar{a} d\bar{r} + \int_{L_2} \bar{a} d\bar{r} + \int_{L_3} \bar{a} d\bar{r} = \oint_L \bar{a} d\bar{r}$$

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 = \Gamma$$

Deməli, istənilən formada və ölçüdə qapalı kontur üzrə sirkulyasiya daxilədəki burulğanların (sirkulyasiyaların) cəmidir. Odur ki, istənilən kiçik ΔS səthində yaranan sirkulyasiya $\Delta \Gamma$ onun daxilindəki burulğanın məcmudur.

Vahid səthdə yaranan burulğanın orta sıxlığı $\frac{\Delta \Gamma}{\Delta S}$, cari M nöqtəsindəki sıxlığı isə limitlə təyin olunur və bu limit varsa, onda

$$\lim_{\Delta S \rightarrow M} \frac{\Delta \Gamma}{\Delta S} = \frac{d\Gamma}{dS}$$

olur. Bu, verilmiş \bar{a} vektor sahənin cari M nöqtəsində burulğanın yaranma məhsuldarlığıdır və skalyar kəmiyyətdir. Bu məhsuldarlıq fırlanma (inteqrallama) istiqamətinə malik olduğu üçün hökmən bir vektorla ifadə olunmalıdır. Bu burulğan vektoru $\text{rot } \bar{a}$ (rotor) səthin normalı istiqamətində $\frac{d\Gamma}{dS}$ məhsuldarlığın (burulğanın) maksimum qiymətinə bərabər olan vektordur.

$$\max \frac{d\Gamma}{dS} = |\text{rot } \bar{a}|, \quad \frac{d\Gamma}{dS} = \text{rot } \bar{a} \Big|_{\bar{n}} \quad (4.3.8)$$

(4.3.8) ifadəsi hər bir nöqtədə səthin \bar{n}^0 - normalı istiqamətində belə yazıla bilər

$$\frac{d\Gamma}{dS} = (\text{rot } \bar{a}, \bar{n}^0) \quad (4.3.9)$$

Nəhayət, qapalı L konturu ilə eyni səmtdə məhdudlanmış S səthindən keçən burulğan vektorunun selini, sirkulyasiyasını təyin edirik.

$$\Gamma = \iint_S (\text{rot } \bar{a}, \bar{n}^0) dS \quad (4.3.10)$$

Bu Stoks düsturu adlanır.

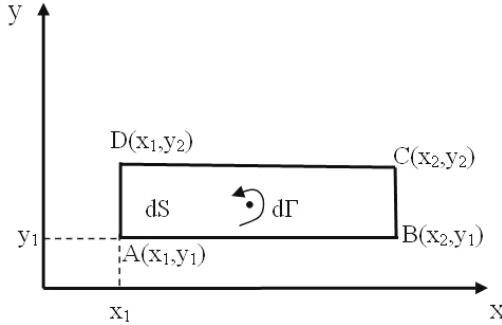
Eyni bir məsələnin həlli üçün (4.3.2) və ya (4.3.10) düsturlarından əlverişli olanını seçmək olar. (4.3.1) və (4.3.10) ifadələrinin bərabərliyindən Stoks teoremi alınır.

$$\oint \bar{a} \cdot d\bar{r} = \iint_S (\text{rot} \bar{a}, \bar{n}^0) dS \quad (4.3.11)$$

\bar{a} vektorunun qapalı L konturu üzrə sirkulyasiyası, həmin konturla məhdudlanan ixtiyari səthdən keçən burulğan vektorunun (rotorun) selinə bərabərdir.

Burulğan vektorunu invarinat tərifinə ilə tanış olduq, rot \bar{a} operatoru haqqında məlumatın tamlığı üçün, onun analitik ifadəsini də göstərək. Vektor funksiyayı üç skalyar funksiya kimi təqdim edək:

$d\Gamma_{xy} = Pdx + Qdy$
ABCD konturu boyunca sirkulyasiyanın dəyişməsi



Şəkil 4.3.4.

$$d\Gamma_{xy} = P(x, y_1)dx + Q(x_2, y)dy - P(x, y_2)dx - Q(x_1, y)dy$$

$$d\Gamma_{xy} = (Q_2 - Q_1)dy - (P_2 - P_1)dx = \Delta Q dy - \Delta P dx$$

ΔQ və ΔP sıraya ayırıb yüksək tərtibli hədləri atsaq alarıq:

$$\Delta Q = \frac{\partial Q}{\partial x} dx, \quad \Delta P = \frac{\partial P}{\partial y} dy$$

Nəticədə,

$$d\Gamma_{xy} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

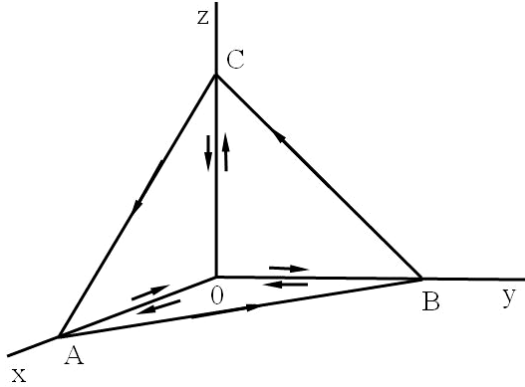
olur.

Analoji olaraq, dairəvi qanunla

$$d\Gamma_{xz} = \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz$$

$$d\Gamma_{zy} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz$$

OA, OB və OC parçaları boyunca əks işarəli inteqrallar ixtisar olur (şəkil 4.3.5):



Şəkil 4.3.5.

$$d\Gamma = d\Gamma_{xy} + d\Gamma_{zy} + d\Gamma_{zx}$$

$$d\Gamma = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Bu ifadəni iki vektorun skalyar hasili şəklində göstərək:

$$d\Gamma = \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k} \right) \times \\ \times (\bar{i} dy dz + \bar{j} dx dz + \bar{k} dx dy)$$

Burada ikinci vuruq səthin normalı istiqamətində modulu ədəi qiymətcə dS sahəsinə bərabər \overline{dS} vektorunun ifadəsidir, belə ki,

$$\bar{i} dy dz + \bar{j} dx dz + \bar{k} dx dy = \bar{i} dS_{yz} + \bar{j} dS_{xz} + \bar{k} dS_{xy} = \overline{dS}.$$

Beləliklə, alırıq ki,

$$d\Gamma = \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k} \right) \cdot \overline{dS} \quad (4.3.12)$$

Müqayisə üçün (4.3.10) düsturunda $\bar{n}^0 dS = \overline{dS}$ olduğunu nəzərə alsaq, yazı bilərik:

$$d\Gamma = (\text{rot } \bar{a}) \cdot \overline{dS} \quad (4.3.13)$$

(4.3.12) və (4.3.13) bərabərliklərin müqayisəsindən, burulğan vektorunun (rotorun) analitik ifadəsini alırıq:

$$\text{rot } \bar{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k} \quad (4.3.14)$$

Daha sadə formal yazılışı belədir:

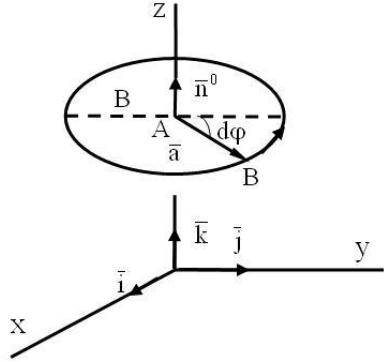
$$\text{rot } \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Burulğanlı vektor sahədə $\text{rot } \bar{a}$ operatorunun iştirakı ilə bir sadə məsələnin həllini nəzərdən keçirək. Tutaq ki, verilmiş a vektor sahəsində qapalı L konturu boyunca sirkulyasiyanı hesablamaq tələb olunur (OA=3, AB=2).

$$\bar{a} = z\bar{i} + x\bar{j} + y\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 3 \end{cases}$$

Kontur $R=2$ radiuslu çevrədir və $z=3$ müstəvisində yerləşir. Birinci növbədə sirkulyasiyanı xətti inteqralla hesablayaq.



Şəkil 4.3.6.

$$\Gamma = \int_L \bar{a} d\bar{r} = \int_L z dx + x dy + y dz \quad (4.3.15)$$

Konturun tənliyini parametrik formada yazaq:

$$x = 2\cos\varphi, y = 2\sin\varphi, z = 3$$

$$dx = -2\sin\varphi d\varphi, dy = 2\cos\varphi d\varphi, dz = 0$$

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} 3(-2\sin\varphi d\varphi) + 2\cos\varphi \cdot 2\cos\varphi d\varphi$$

$$\Gamma = 2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \quad \Gamma = 4\pi$$

İkinci dəfə Stoks formulu ilə hesablayaq:

$$\Gamma = \iint_S (\text{rot}\bar{a}, \bar{n}^0) dS \quad (4.3.16)$$

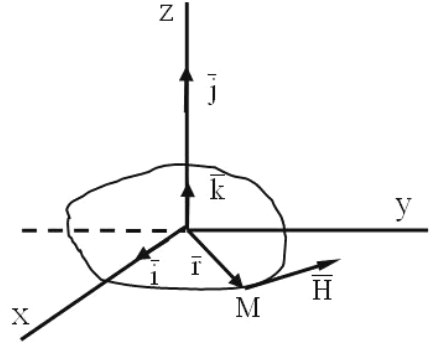
L qapalı konturu (çevrəni) ixtiyari bir səth ilə örtə bilərik; çevrəyə çəkilən səth dairə olsa, bu halda $\bar{n}^0 = \bar{k}$ olar. Bu səthdən keçən seli hesablayaq.

$$\text{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \bar{i} + \bar{k}$$

$$\Gamma = \iint_S (\vec{i} + \vec{k}) \cdot \vec{n}^0 dS = \iint_S dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr = 2\pi \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^2 = 4\pi$$

$$\Gamma = 4\pi.$$

Əvvəlki paragrafda (§4.1) cərəyanlı naqıl ətrafında maqnit gərginlik xətlərinin mərkəzi oz oxu (naqıl) üzərində olan çevrələr olduğunu göstərmişdik; \vec{H} gərginlik vektoru hər bir nöqtədə çevrənin toxunanıdır.



Şəkil 4.3.7.

$$\vec{H} = \frac{2I}{c} (P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}) \quad (4.3.17)$$

Burada $P = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$

törəmələri ilə belə ifadələner

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 - \frac{2x^2}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -1 + \frac{2y^2}{x^2 + y^2}$$

rot \vec{H} - burulğan vektorunu hesablayaq:

$$\text{rot}\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j}$$

Sağ tərəfi aşkar şəkildə yazsaq, $x^2 + y^2 \neq 0$

$$\text{rot}\vec{H} = 1 - \frac{2x^2}{x^2 + y^2} \vec{i} + 1 - \frac{2y^2}{x^2 + y^2} \vec{j} = 0$$

$$\text{rot}\vec{H} = 0 \quad (4.3.18)$$

oZ oxundan kənarda maqnit sahəsi mövcud olduğu halda burulğan yoxdur. oZ oxunu daxilinə alan qapalı kontur üzrə sirkulyasiyasını və burulğan vektorunu (rotoru) hesablayaq. Mərkəzi oZ oxu üzərində olan istənilən qədər kiçik radiuslu çevrə boyunca sirkulyasiya

$$\Gamma = \oint_L (\vec{H}, \vec{\tau}) d\ell = \oint_L \frac{2I}{cr} \cdot r d\varphi$$

Burada $r \neq 0$ və ya $x^2 + y^2 \neq 0$ şərti ilə ixtisar apardıq

$$\Gamma = \frac{2I}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi I}{c} \quad (4.3.19)$$

Digər tərəfdən, kiçik radiuslu dairənin səthini dS , qəbul etsək və ona uyğun sirkulyasiyanı $d\Gamma$ qəbul etsək, onda

$$\frac{d\Gamma}{dS} = \frac{4\pi I}{c} \delta(\vec{r})$$

olar. Burada $\delta(\vec{r})$ - delta-funksiyadır:

$$e'(x) = \delta(x) \quad e(x) = \int_{-\infty}^x \delta(x) dx$$

Baxılan məsələdə $\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)$ olduğu üçün və burulğan vektoru sahə müstəvisinə perpendikulyar olduğu üçün

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi I}{c} \delta(x)\delta(y) \vec{k}.$$

Burada $I\delta(x)\delta(y) \vec{k}$ cərəyan sıxlığı vektorudur, onu \vec{j} ilə işarə edirik.

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi \vec{j}}{c} \quad (4.3.20)$$

Cərəyanlı naqıl burulğan mənbəidir və burulğan vektoru (rotoru) cərəyan şiddəti ilə düz mütənasibdir. Bu düsturdan daha bir nəticə çıxarmaq olur; \vec{H} vektorunun ixtiyari L konturu üzrə sirkulyasiyasını, onun ayırdığı S səthi ilə ifadə edək. Stoks düsturuna görə

$$\oint_L \bar{H} d\bar{r} = \iint_S (\text{rot} \bar{H}, \bar{n}^0)$$

Burada (4.3.20) düsturunu nəzərdə tutsaq

$$\oint_L \bar{H} d\bar{r} = \frac{4\pi}{c} \iint_S (\bar{j}, \bar{n}^0) dS$$

Yəni \bar{H} vektorunun sirkulyasiyası, konturun ayırdığı səthdən keçən cərəyanın miqdarına bərabərdir.

(4.3.20) düsturundan divergensiya ala

$$\text{div} \bar{j} = \frac{c}{4\pi} \text{div} \text{rot} \bar{H} = 0 \quad (4.3.21)$$

Bu stasionar hal üçün «elektrik yükünün saxlanması qanunudur:

$$\text{div} \bar{j} = 0 \quad (4.3.22)$$

vahid zamanda qapalı səthə daxil olan elektrik yükü, o səthdən çıxan yükün miqdarına bərabərdir.

§4.4. Potensiallı sahə

Əvvəlki paraqrafda (§4.3) deyilir ki, vektor sahənin sirkulyasiyası bu sahənin burulğanlı olub olmadığını göstərir; sirkulyasiyası sıfıra bərabər olan sahə burulğansız sahədir və potensiallı sahə adlanır. Bütün qüvvə sahələrində, o cümlədən $\bar{a} = \bar{F}$ cazibə sahəsində də xətti inteqral görülən işi göstərir.

$$A = \int_L \bar{F} \cdot d\bar{r} \quad (4.4.1)$$

Bu xətti inteqral verilmiş əyri boyunca, seçilmiş istiqamətdə (səmtdə) belə yazılır

$$A = \int_L \bar{F} \cdot \bar{\tau} d\ell \quad (4.4.2)$$

Əgər L – qapalı əyridirsə, onda sahə cazibə qüvvəsinin gördüyü işlərin cəmi sıfıra bərabər olur. Bu o deməkdir ki, yolun

bir hissəsində sahə qüvvələri iş görüb cismə enerji sərf edibsə, yolun qalan hissəsində verdiyi enerjini geri alır. Sahənin bu xassəsi, yəni enerji vermək və geri almaq xassəsi onun potensiala malik olduğunu göstərir.

Stoks teoreminə görə, sirkulyasiyanın sıfıra bərabər olması şərtindən:

$$\oint_S \bar{a} d\mathbf{r} = \iiint_S (\text{rota} \bar{a}, \bar{n}^0) = 0$$

burulğan vektorun (rotorun) sıfıra bərabər olması şərti alınır.

$$\text{rota} = 0 \quad (4.4.3)$$

Bu isə sahənin potensialı olması üçün həm zəruri, həm də kafi şərtidir. Sahənin hər bir nöqtədə potensialı və ya potensial enerjisi U sahə qüvvəsinin (cazibə qüvvəsi) gördüyü işə bərabərdir. Görülən iş yolun formasından asılı deyil. Potensial enerjinin sıfıra bərabər olduğu nöqtə seçilməkdə bir qədər ixtiyaridir. Görülən iş potensial enerjinin dəyişməsinə bərabərdir. Potensial enerji skalyar kəmiyyətdir və \bar{a} vektor sahə verildikdə belə təyin olunur:

$$U(M) = \int_{MM_0} \bar{a} d\mathbf{r} \quad (4.4.4)$$

bunun əksi də mümkündür; yəni sahəni ifadə edən funksiya vasitəsi ilə vektor sahəni qurmaq olar.

Tutaq ki, sonsuz kiçik yerdəyişmədə $d\mathbf{r} = \bar{i} dx + \bar{j} dy + \bar{k} dz$, sahə qüvvəsinin $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$ gördüyü iş

$$dA = \bar{H} \cdot d\mathbf{r} = a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

Digər tərəfdən sahənin potensialı olması, görülən işin yolun formasından asılı olmaması, riyazi dildə onun tam diferensiala malik olması şərti isə belə yazılır

$$dA = -dU$$

Sol və sağ tərəflərin müqayisəsindən

$$a_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad a_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad a_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Şərtinin ödənməsi ilə, alınır ki,

$$\bar{a} = -\text{grad}U \quad (4.4.5)$$

Bu nəticəni ümumiləşdirərək potensiallı sahəyə belə tərif verilir: $\bar{a}(M)$ vektor sahəyə qarşı elə bir $\varphi(M)$ funksiyası varsa ki, aşağıdakı şərt ödənsin

$$\bar{a} = \text{grad}\varphi \quad (4.4.6)$$

onda \bar{a} vektor sahə potensiallı sahə adlanır.

Vektor bərabərlik üç skalyar ifadə ilə eynigüclüdür.

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = a_x(x, y, z) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = a_y(x, y, z) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = a_z(x, y, z) \end{cases} \quad (4.4.7)$$

Nöqtəvi q yükünün yaratdığı \bar{E} - elektrik gərginlik sahəsinin potensiallı sahə olduğunu, yəni (4.4.6) şərtinin ödəndiyini göstərək. Koordinat başlanğıcında yerləşən yük üçün,

$$\bar{E} = \frac{kq}{r^3} \bar{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.4.8)$$

$\varphi(x, y, z)$ funksiyasını tapaq.

Bu məsələdə

$$a_x = \frac{kqx}{r^3}, \quad a_y = \frac{kqy}{r^3}, \quad a_z = \frac{kqz}{r^3}.$$

$$\text{Əgər} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{z}{r^3}$$

olduğunu nəzərdə tutsaq, axtarılan funksiyanın

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{kq}{r}$$

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{kq}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

olduğu təsdiq olunur

$$\text{grad} \left(-\frac{kq}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \vec{E} \quad (4.4.9)$$

Koordinat başlanğıcı məxsusi nöqtədir.

Deməli, $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ ödəndiyi üçün elektrik gərginliyi sahəsi E – potensiallı sahədir. Təbii ki, potensiallı sahə burulğansızdır. Odur ki, \vec{E} gərginlik vektorunun rotoru sıfıra bərabər olmalıdır. Doğurdan da,

$$\text{rot}\vec{E} = -\text{rot}(\text{grad}\varphi) = 0$$

$$\text{rot}\vec{E} = 0$$

sahənin burulğansız, potensiallı olması şərtidir.

§4.5. Kristaldaxili sahə və Maksvell tənlikləri

Kristaldaxili sahə, elektromaqnit sahəsidir.

Elektrik və maqnit sahəsi üçün əsas operatorları artıq təyin etmişik. Operatorları bir daha nəzərdən keçirək.

1. Stasionar elektrik sahəsində (4.2.9), (4.4.10)

$$\begin{cases} \text{div}\vec{E} = 4\pi v \\ \text{rot}\vec{E} = 0 \end{cases} \quad (4.5.1)$$

Birinci operator onu göstərir ki, elektrik qüvvə xətlərinin əmələgəlmə sıxlığı, onu əmələ gətirən elektrik yükünün paylanma sıxlığı ilə düz mütənasibdir.

İkinci operator stasionar elektrik sahəsinin burulğansız və potensiala malik olduğunu təsdiq edir.

2. Stasionar maqnit sahəsində (4.3.20), (4.2.10)

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\bar{H} = \frac{4\pi}{c} \bar{j} \\ \operatorname{div}\bar{H} = 0 \end{cases} \quad (4.5.2)$$

Birinci operator, maqnit qüvvə xətlərinin əmələgəlmə sıxlığının, onu yaradan cərəyanın sıxlığı ilə mütənasib və burulğanlı olduğunu göstərir.

İkinci operator maqnit qüvvə xətlərinin başlanğıc və son nöqtəsi olmadığını təsdiq edir.

Göründüyü kimi, baxılan halda (stasionar) elektrik və maqnit sahələri biri-birindən asılı omlyan individiumlardır.

Dəyişən elektromaqnit sahəsində isə çox ciddi fiziki hadisə baş verir; elektrik sahəsinin dəyişməsi maqnit sahəsinə təsir etdiyi kimi, maqnit sahəsində dəyişməsi elektrik sahəsinə təsir edir. Aydın ki, bu qarşılıqlı təsir, həmin sahələri xarakterizə edən \bar{E} və \bar{H} vektorlarının dəyişməsi ilə baş verir. Bu \bar{E} və \bar{H} vektorlarını bir-biri ilə bağlayan diferensial tənliklər, Maksvell tənlikləri adlanır.

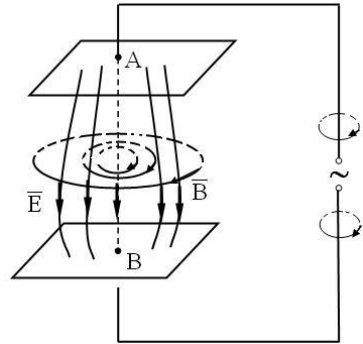
Elektrik sahəsi intensivliyinin dəyişməsi ilə maqnit sahəsinin yarandığını göstərmək üçün «sürüşmə» cərəyanı anlayışı üzərində dayanaq. Fərz edək ki, sabit cərəyan dövrəsinə lampa ilə ardıcıl bağlanmış kondensator daxil edilmişdir. Bu müstəvi kondensatorun lövhələrindəki elektrik yükünün sıxlığı $+v$ və $-v$, lövhələr arasındakı sahənin gərginliyi isə \bar{E} olsun.

Qaus teoreminə görə $E = 4\pi v$ və müsbət yüklü lövhədən mənfi yüklü lövhəyə doğru yönəlmişdir. Bu halda lampa közərmir, çünki dövrədə kondensator (vakuum) olduğu üçün dövrə qapanmır. Dövrəyə dəyişən e.h.q. olan mənbə qoşduqda isə lampa közərir, deməli dövrə qapanır. Belə alınır ki, guya kondensatordan da lampanı közərdə bilən qədər cərəyan keçir. Mümkünsüz və ya izahsız görünən bu məsələni ingilis alimi Maksvell həll etmişdir. Onun fərziyyəsinə görə d.e.h.q. olan dövrədə dəyişən \bar{E} gərginlik sahəsi, induksiyası \bar{H} olan dəyi-

şən maqnit sahəsi yaradır. Dəyişən maqnit sahəsi isə öz növbəsində «sürüşmə» cərəyanı yaradır ki, bu cərəyan dövrəni qapayır. Bu fərziyyəyə görə «sürüşmə» cərəyanı, \bar{E} sahə gərginliyinin dəyişmə sürəti ilə mütənasibdir və xarici dövrədəki keçirici cərəyana bərabərdir. Fərz edək ki, kondensatorun (şəkil 4.5.1) A lövhəsində elektrik yükünün v sıxlığı artır, deməli xaricdən (mənbədən) gələn müsbət yüklər $j = \frac{d(Sv)}{dt}$ sürəti ilə A lövhəsinə qonur.

Təbii ki, B lövhəsinə də mənfi yüklər eyni sürətlə qonacaqlar. Xəyalən A və B nöqtələrinin naqillə birləşdiyini qəbul etsək, onda artmaqda olan müsbət elektrik yükü AB naqili ilə «axıb» keçəcək və cərəyanın saxlanma qanunu da ödənəcəkdir.

Kondensatordan keçən bu



Şəkil 4.5.1.

«sürüşmə» cərəyanı Coul istiliyi ayırmır, çünki onun elektrik yüklərinin hərəkəti ilə heç bir əlaqəsi yoxdur. Maksvellin fərziyyəsi əsasında söhbətimizi davam etdirək; sürüşmə cərəyanınının sıxlığını təyin edək:

$$\bar{j}_s = \frac{dv}{dt} \bar{i}; \quad \bar{E} = 4\pi v \bar{i} \quad (4.5.3)$$

\bar{i} – vahid vektordur və \bar{AB} istiqamətini göstərir.

Bu iki ifadədən (4.5.3), alırıq ki,

$$\bar{j}_s = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad (4.5.4)$$

Sabit cərəyan üçün yazılmış (4.3.20) ifadəsi dəyişən cərəyan üçün belə yazılmalıdır:

$$\text{rot} \bar{H} = \frac{4\pi}{c} (\bar{j} + \bar{j}_s) \quad (4.5.5)$$

Burada (4.3.2) ifadəsini nəzərdə tutsaq alırıq:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.5.6)$$

Bu ifadə onu göstərir ki, doğrudan da elektrik sahəsinin dəyişməsi maqnit sahəsi yaradır.

İndi də, maqnit sahəsinin dəyişməsi halını nəzərdən keçirək. Maqnit sahəsində L qapalı konturun ayırdığı sahəni S ilə işarə edək. Faradeyin təcrübələri əsasında müəyyən edilmişdir ki, maqnit selinin dəyişməsi L qapalı konturda e.h.q. yaradır:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left(\iint_S \vec{H} \cdot d\vec{S} \right) \quad (4.5.7)$$

Mənfi işarəsi e.h.q.-nin maqnit selinin dəyişmə istiqamətinin əksinə olduğunu göstərir. Dəyişən maqnit sahəsinin burulğanlı elektrik sahəsi yaratdığını qəbul edək və Stoks teoremindən istifadə edək:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\operatorname{rot}\vec{E}, \vec{n}) dS \quad (4.5.8)$$

(4.5.7) və (4.5.8) ifadələrinin müqayisəsindən alırıq:

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.5.9)$$

Burada hər iki tərəfdə eyni səth üzrə inteqral durur. Odur ki, inteqralaltı ifadələr də bərabərdir:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (4.5.10)$$

Bütün operatorları elektromaqnit sahəsində təyin etdik: dəyişən elektrik sahəsində

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = 4\pi v; \\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \end{cases} \quad (4.5.11)$$

maqnit sahəsində

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0 \end{cases} \quad (4.5.12)$$

Bu iki diferensial tənliklər sistemi Maksvell tənlikləridir və vakuumda elektromaqnit hadisələrini təsvir edir.

Vakuumda elektromaqnit hadisələrini təsvir edən Maksvell tənliklərinin (4.5.11), (4.5.12) kristaldaxili sahəyə tətbiqi mövzusunun davam etdirək.

Vakuumda «sürüşmə» cərəyanı istilik ayırmır demişdik. Kondensatorun lövhələri arasında dielektriklə doldurduqda isə Coul istiliyi ayrılır. Bu o deməkdir ki, «sürüşmə» cərəyanına əlavə bir cərəyan (məsələn, polyarlaşma cərəyanı) da qoşulur. Bu cərəyanlar (cəmlənərək) dövrəni qapayırlar. Odur ki, vakuumdan fərqli mühitlərdə, bu mühitin fiziki xassələrini, termodinamik halını xarakterizə edən vektor funksiyalar

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}), \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{H}), \quad \vec{j} = \vec{j}(\vec{E}) \quad (4.5.13)$$

qurulur və Maksvell tənliklərinə daxil edirlər.

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi v$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.5.14)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

(4.5.13) və (4.5.14) tənlikləri sistemi kristaldaxili elektromaqnit hadisələrini təsvir edir.

Hal tənliklərinin (4.5.13) qurulması, yəni funksional asılılıqların təyin edilməsi vacib və çətin məsələdir. Bu barədə §1.18-də elektrik polyarlaşması haqqında danışmışıq. Buna baxmayaraq, təkrar məqamlar olsa da, belə hal tənliklərinin qurulması məntiqini öyrənmək maraqlıdır. $\vec{D}(\vec{E})$ - elektrik induk-

siya vektoru, elektrik sahəsinin \bar{E} gərginlik vektoru ilə mühitin \bar{P} - polarizasiya vektorlarının cəmi kimi təyin olunur.

Polyarlaşma – sahənin E gərginlik vektorunun təsiri ilə atom, ion, molekullarının \bar{P} dipol momenti qazanmaq qabiliyyətidir. Bu qabiliyyət atomda elektrik yüklərinin yerdəyişməsi ilə əmələ gəlir və sahəyə verilən gərginlik kəsilən kimi yox olur. Deməliyin ki, sabit dipola malik olan zərrəciklər və ya polyar molekullar polyarlaşma sinfinə daxil edilmir. \bar{E} gərginliyin təsiri ilə, elektron polyarlaşma dedikdə, elektron örtüyünün atomun nüvəsinə nəzərən yerdəyişməsi; ion polyarlaşma dedikdə, müxtəlif işarəli ionların (kristallarda) əks istiqamətli yerdəyişməsi nəticəsində yaranan \bar{P} dipol momenti başa düşülür. Nisbətən zəif elektrik sahəsində bu asılılıq xətti qanuna tabe olur:

$$\bar{P} = \alpha_e \bar{E} \quad \text{və} \quad \bar{D} = \bar{E} + 4\pi\bar{P},$$

Burada α_e – dielektrik qavrayıcılığı adlanır.

$$D = (1 + 4\pi\alpha_e)E, \quad 1 + 4\pi\alpha_e = \epsilon$$

$$D = \epsilon \bar{E}$$

Burada ϵ - dielektrik nüfuzluğudur.

BC isə bu münasibətlər belə yazılır:

$$\bar{P} = \epsilon_0 \alpha_e \bar{E}, \quad D = \epsilon_0 \epsilon \bar{E}, \quad \epsilon = 1 + \alpha_e.$$

\bar{E} gərginlik vektorunun selindən fərqli olaraq, \bar{D} vektorunun qapalı səthdən keçən seli ancaq və ancaq sərbəst yüklərin miqdarı ilə təyin olunur.

\bar{B} - maqnit induksiya vektoru; bu vektor maqnit sahəsinin \bar{H} gərginlik vektoru və mühitin \bar{j} - maqnitlənmə vektorlarının həndəsi cəmi kimi ifadə olunur:

$$\bar{B} = \bar{H} + 4\pi\bar{j}$$

Maqnitlənmə, vahid həcmdə yaranan maqnit momentidir və izotrop mühitlər üçün xətti qanuna tabedir:

$$\vec{j} = \epsilon_m \vec{H}$$

ϵ_m – maqnit qavrayıcılığdır.

Bu ifadələrdən $\vec{B} = (1 + 4\pi\epsilon_m)\vec{H}$, $\mu = 1 + 4\pi\epsilon_m$.

Burada μ - maqnit nüfuzluğudur.

Fiziki vakuum üçün $\epsilon_m=0$, $\mu=1$;

Dimaqnitlər üçün $\epsilon<0$, $\mu<1$.

Para- və ferromaqnitlər üçün $\epsilon_m>0$, $\mu>1$ olur. Bu o deməkdir ki, diomaqnitlərdə maqnitlənmə vektoru \vec{j} , sahənin \vec{H} vektorunun əksinə yönəlir.

Paramaqnitlərdə isə əsas sahə istiqamətinə yönəlir.

§4.6. Termodinamika

Termodinamika – müxtəlif strukturlardan; atom, molekul, ion və s. elementlərin məcmundan ibarət termodinamik sistemlərin tarazlıq hallarını və bir tarazlıq halından növbəti tarazlıq halına keçid prosesini müəyyən qanunlar əsasında öyrənir. Termodinamika təcrübələrə söykənən fundamental başlanğıclar (prinsiplər) əsasında qurulmuşdur və bu başlanğıclar (qanunlar) termodinamik sistemi təşkil edən elementlərin fiziki məhiyyə-tindən asılı deyil, yəni termodinamikanın qanunları universal-dır. Termodinamik sistemin halını müəyyən sayda sərbəst parametrlər təyin edir. Məsələn, ideal qazlardan ibarət sistemin halı üç kəmiyyətlə (P, V, T) təyin olunur: T – temperatur, P – təzyiq, V – həcmdir. Bu paragrafda işarələr termodinamikada olduğu kimi saxlanılır. Termodinamik sistem müəyyən relaksasiya zamanından sonra tarazlıq halına gəlir və uzun müddət bu hal davam edir. Tarazlıq halının uzun müddətli olması və temperaturun sabit qalması kafi olmasa da zəruri şərtidir.

İdeal qaz sisteminin halını təyin edən T , P , V parametrləri arasındakı asılılıq $\frac{PV}{T} = \text{const}$ ideal qazlar üçün hal tənliyi adlanır. Bu sabit ideal qazlar üçün normal hal P_0 , V_0 və T_0 ilə ifadə olunur

$$\frac{PV}{T} = \frac{P_0 V_0}{T_0} \quad (4.6.1)$$

1. $T = T_0$ şərti ilə gedən proses izotermik proses adlanır. Bu prosesdə izotermik sıxılma əmsalı $\beta_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$.

2. $P = P_0$ olduqda izobar proses, bu halda izobar genişlənmə əmsalı

$$\alpha = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

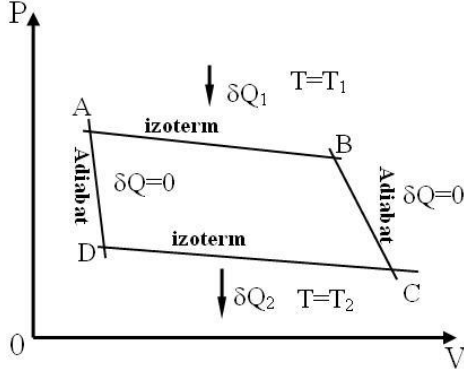
3. $V = V_0$ olduqda izoxor proses, izoxor təzyiq əmsalı

$$\gamma = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

4. Əgər sistem xarici mühitlə istilik əlaqəsində olmur, bu şərt ilə gedən proses adiabat proses adlanır. Adiabatik sıxılma əmsalı $\beta_\sigma = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S$.

Fransız alimi S.Karno (1824) ilk dəfə istiliyi işə çevirən döənən dairəvi istilik maşınını nəzərdən keçirmişdir. Bu dairəvi proses Karno sikli adlanır və növbə ilə bir-birini əvəz edən iki izotermik, iki adiabat prosesdən ibarətdir. İşçi cism (buxar) izoterm proses zamanı bir dəfə qızdırıcı istilik mənbəyi ilə (T_1 – temperaturu) ikinci dəfə soyuducu (T_2 – temperatur) ilə təmasda olur. δQ_1 – istilik miqdarı qızdırıcıdan alınır onun δQ_2 istilik miqdarını soyuducuya verir. Bu proses işçi cism tərəfindən, yəni qapalı silindrdə porşen altında olan buxarın qızdırılması və soyudulması vasitəsi ilə həyata keçirilir. (P , V) təzyiq – həcm diaqramında (şəkil 4.6.1) Karno tsikli təsvir olunur: AB

– izoterm prosesində δQ_1 istilik miqdarı alır və genişlənərək iş görür. Sonra qızdırıcı ilə əlaqə kəsilir $\delta Q = 0$ və adiabat genişlənərək BC prosesi soyuducu ilə kontakta gəlir, soyuducunun T_2 temperaturunu almaq üçün δQ_2 – istilik miqdarını soyuducuya ötürərək CD – izoterm prosesi başa çatır.



Şəkil 4.6.1.

Soyuducu ilə kontakt kəsilir $\delta Q=0$ – adiabat proseslə DA – əvvəlki başlanğıc halına qaydır; Karno tsikli başa çatır. $T_1 - T_2$ – temperaturlar fərqi sabit qaldığı halda, qızdırıcı ilə soyuducu arasında işləyən «istilik maşını» bir tsikl ərzində $\delta A = \delta Q_1 - \delta Q_2$ qədər iş görür. Bu iş ədədi qiymətçə izoterm və adiabat əyriləri ilə məhdudlanan ABCD sahəsinə bərabərdir. Karno tsikli dönmən prosesdir, onu ADCBA ardıcılığı ilə də həyata keçirmək olar. Bu halda δA qədər iş görməklə soyuducudan δQ_2 miqdar istilik alınıb qızdırıcıya ötürülür, istilik maşını soyuducu kimi işləyir.

1. Birinci başlanğıc .

Termodinamik birinci başlanğıcı təsdiq edir ki, əgər sistem termodinamik tsikl edərək başlanğıc halına qayıdırsa, onda sistemin aldığı istilik ΔQ sikl boyu sistemin gördüyü iş ΔA bərabərdir: $\Delta Q = \Delta A$. Başqa sözlə, istilik (enerji) almadan işləyən daimi mühərrik yaratmaq olmaz. Əslində, birinci başlanğıc enerjinin saxlanması qanunudur; istiliyin və işin eyni

enerji vahidləri ilə ölçüldüyünü təsdiq edir. Birinci başlanğıca görə əgər termodinamik sistem başlanğıc halını almayıbsa, onda ΔQ və ΔA arasında yaranan fərq sistemin daxili enerjisinin ΔU dəyişməsinə sərf olunmuşdur:

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta A \quad (4.6.2)$$

Birinci başlanğıc termodinamik sistemin hər bir halına uyğun U – daxili enerjiyə malik olduğunu qəbul edir; daxili enerji termodinamik funksiyadır və sistemin halını təyin edir. Məsələn, xüsusi halda görülən iş ancaq həcmnin dəyişməsi ilə mümkündürsə, onda

$$dU = \delta Q - PdV \quad (4.6.3)$$

burada δQ – sonsuz kiçik istilik dəyişməsidir, lakin hər hansı bir funksiyanın diferensialı deyil. Əgər həcmnin dəyişmədiyini qəbul etsək, $dV=0$ olduğundan $\delta Q = dU$, yəni istilik dəyişməsi daxili enerjinin diferensialına bərabərdir. Bu halda istiliyin hamısı daxili enerjiyə çevrildiyi üçün xüsusi istilik tutumu belə təyin olunur: $C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v$. Başqa sözlə, xüsusi istilik tutumu

U – daxili enerji funksiyasının temperatúra görə alınmış xüsusi törəməsinə bərabərdir.

2. İkinci başlanğıc.

Aparılan təcrübələr təsdiq edir ki, aldığı istiliyi itkisiz faydalı işə çevirə bilən daimi işləyən istilik maşını qurmaq mümkün deyil. S.Karno göstərdi ki, bütün istilik maşınlarında qızdırıcı kimi, soyuducunun da olması vacibdir. Qızdırıcının temperaturu T_1 , verdiyi istilik ΔQ_1 ; soyuducunun temperaturu T_2 , aldığı istilik ΔQ_2 olsun. Təcrübü olaraq müəyyən edilmişdir ki, alınan və verilən istilik miqdarlarının nisbəti, qızdırıcı və soyuducunun temperaturları nisbətində bərabərdir:

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta Q_2} = \frac{T_1}{T_2}; \quad \frac{\Delta Q_1}{T_1} = \frac{\Delta Q_2}{T_2} \quad (4.6.4)$$

Bu nisbət S.Karno tənəsübü adlanır. Onu da qeyd edək ki, bu nisbətdən istifadə edilməklə Karno tsikli üçün f.i.ə. (faydalı iş əmsalı) təyin olunmuşdur: $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ f.i.ə. həmişə bir vahiddən kiçikdir, çünki alınan istiliyin bir hissəsi xarici mühitə səpilir.

S.Karno siklində (şəkil 4) adiabat genişlənmə və sıxılma zamanı $\delta Q=0$ olduğu üçün $\frac{\delta Q}{T} = 0$ olur, əvvəlki izotermik genişlənmədə və sonrakı izotermik sıxılmada sistemin aldığı $\frac{\Delta Q_1}{T_1}$ və verdiyi $\frac{\Delta Q_2}{T_2}$ bir-birini kompensasiya edirlər. Odur ki, qapalı kontur üzrə inteqral sıfıra bərabər olur.

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad (4.6.5)$$

Bu ifadə R.Klauzius bərabərliyi adlanır.

Müqayisə üçün xatırlayaq ki, elektrik sahəsində qapalı kontur üzrə sahə qüvvələrinin gördüyü iş sıfıra bərabərdir və potensiallı sahədir. Görülən iş yolun formasından asılı deyil, yəni inteqralaltı ifadə tam diferensiala malikdir. Burada Karno siklini «istilik sahəsində» qapalı kontura bənzətsək, onda inteqralaltı ifadə tam diferensiala malik olmalıdır:

$$d\sigma = \frac{\delta Q}{T} \quad (4.6.6)$$

Bu hal funksiyası σ - entropiya adlanır.

Entropiya anlayışını termodinamikaya alman alimi R.Klauzius (1865) daxil etmişdir. Entropiya – istiliyin işə çevrilməsi prosesini ifadə edir. Entropiyanın diferensialı, Karno sikli zamanı sistemin ardıcıl olaraq qızdırıcının T mütləq temperatur qiymətinə uyğun olduğu δQ istilik miqdarıdır. Entropiya – dönməyən proseslərdə enerjinin səpilməsini (yayılməsini) xarakterizə edir. R.Klauzius göstərmişdir ki, dönməyən

proseslər üçün qapalı kontur üzrə «gətirilmiş» istiliyin inteqrallı həmişə sıfırdan kiçik olur:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} < 0.$$

Bu Klauzius bərabərsizliyi adlanır. Bu bərabərsizliyin mahiyyəti ona ekvivalentdir ki, dönməyən siklik proseslərdə faydalı iş əmsalı həmişə dönmən siklik proseslərdəki faydalı iş əmsalından az olur.

Kvazistatik adiabatik proseslərdə $\delta Q=0$ olduğu üçün $d\sigma=0$ olur, yəni entropiya sabit qalır. Entropiyanın sabit qaldığı belə proseslər izoantropik proses adlanır. Beləliklə, sistem A tarazlıq halından B tarazlıq halına keçərkən kvazistatik sistemin hansı yolla dəyişməsindən asılı olmayaraq entropiyanın dəyişməsi

$$\sigma_B - \sigma_A = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \quad (4.6.7)$$

inteqrallama yolundan asılı deyil.

Tutaq ki, maye öz buxarı ilə doymuş və müvazinətdədir. Bu sahə üçün $d\sigma = \frac{\delta Q}{T}$ ifadəsində $T = T_0$ buxarlanma temperaturudur. $\delta Q = dU + PdV$ olduğunu nəzərdə tutsaq entropiyanın dəyişməsi belə yazılır:

$$d\sigma = \frac{1}{T}(dU + PdV) \quad (4.6.8)$$

Göründüyü kimi, entropiya $\sigma = \sigma(U, V)$ daxili enerji və həcmnin funksiyasıdır və tam diferensiala malik olması şərtindən alınan aşağıdakı münasibətlər

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial U} \right)_V = \frac{1}{T}; \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial V} \right)_U = \frac{P}{V} \quad (4.6.9)$$

baxılan sistemin hal tənlikləridir.

Entalpiya termodinamik potensial, sistemin termodinamik tarazlığını, σ - entropiya və P - təzyiq dəyişənləri vasitəsi ilə

təyin etmək üçündür. Entalpiyaya bəzən Gibbsin istilik funksiyası da deyilir; entalpiya $H = U + PV$ termodinamik sistemin entalpiyası ilə daxili enerjisi arasında diferensial asılılığı göstərək

$$\begin{aligned}dH &= dU + PdV + VdP \\dU &= Td\sigma - PdV\end{aligned}$$

ifadələrindən:

$$dH = Td\sigma + VdP \quad (4.6.10)$$

Deməli, entalpiya $H = H(\sigma, P)$ entropiya və təzyiqin funksiyasıdır və tam diferensiala malik olması şərtindən alırıq ki,

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \sigma}\right)_P = T; \quad \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_\sigma = V$$

$P = \text{const}$ olduğu halda $dH = Td\sigma = \delta Q$ olur, yəni entalpiyanın dəyişməsi, sistemə verilən istiliyə bərabərdir. Əgər sərbəst parametr kimi (T, V) temperatur və həcmdən istifadə etmək zərurəti varsa, onda sərbəst enerji potensialından istifadə etmək əlverişlidir:

$$A = U - \sigma T \quad (4.6.11)$$

diferensial forması $dA = -\sigma dT - PdV$.

Əgər (T, P) sərbəst parametr olsa, onda Gibbs enerji funksiyası əlverişlidir: $G = H - T\sigma$ diferensial formada $dG = -\sigma dT + VdP$. Haqqında danışdığımız termodinamik potensiallar U, σ, A və G sistemin halını təyin edən funksiyalardır. Bu funksiyaların ikinci tərtib qarışıq törəmələrində diferensiallaşmanın növbədən asılı olmadığına əsaslanaraq sistemin fiziki xassələrini göstərən kəmiyyətlər arasında vacib olan asılılıqlar təyin olunur. Məsələn, sabit təzyiqdə C_p – istilik tutumu ilə sabit həcmdə C_v – istilik tutumu arasındakı əlaqə belə təyin olunmuşdur:

$$C_p - C_v = -T \frac{(\partial V / \partial T)_P^2}{(\partial V / \partial P)_T}$$

Burada $(\partial V/\partial T)_P$ - istilikdən genişlənmə əmsalı; $(\partial V/\partial P)_T$ - izotermik sıxılma əmsaldır. Həmçinin adiabat və izoterm sıxılma əmsalları aşağıdakı münasibəti ödəyirlər:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{C_V}{C_P}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

Bir daha qeyd edək ki, təcrid olunmuş termodinamik sistem tarazlıq halına entropiyanın artması ilə gəlir və maksimum qiymət alır. Entropiyanın maksimum olması şərtindən, termodinamik potensialın minimum olması şərti alınır. Bu iki şərtin ödənməsi zəruridir ki, sistem diyanaqlı olsun.

3. Üçüncü başlanğıc da entropiya ilə əlaqədardır. Belə ki, entropiyanı diferensial şəkildə təyin etdik və dedik ki, real (dönməyən) adiabat proseslərdə $d\sigma > 0$, yəni entropiya artır, tarazlıq halına çatdıqda maksimum qiymət alır. Entropiyanın sıfıra bərabər olduğu halı göstərməmişik. Odur ki, entropiyanı taparkən alınan inteqral sabitini tapmaq qeyri-müəyyən qalıb. Alman alimi V.Hernst (1906) təcrübələrə əsaslanaraq təyin etmişdir ki, mütləq temperaturun sıfıra yaxınlaşması ilə baş tutan proseslərdə tarazlıq halında entropiya sıfıra yaxınlaşır. Təcrübə ilə təsdiq olunan bu nəticə termodinamikanın üçüncü başlanğıcı qəbul olunub. Onu da qeyd edək ki, üçüncü başlanğıca görə tarazlıq halının $T=0$; $\sigma=0$ şərti C_p və C_v sabitlərinin də sıfıra çevrildiyini təsdiq edir. Bu deyilənlər maddənin aqreqat hal dəyişməsindən də asılı deyil. Sonrakı fəsillərdə daha mürəkkəb termodinamik sistemlərə dönməyən proseslərə baxılır. Dönməyən proseslər üçün termodinamikanın qanunları əsasında sistemin deformasiya gərginliyi, elektrik sahəsi gərginliyi və elektrik induksiyası, temperatur və entropiyası daxil olan funksiyalar əsasında diferensial tənliklər qurulur və bu diferensial tənliklərin həlli araşdırılır.

V F Ə S İ L.

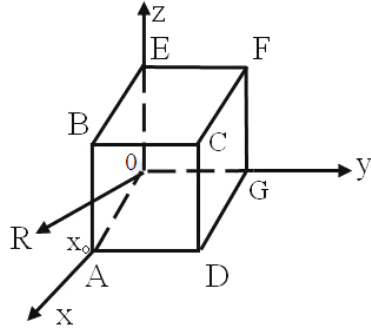
PYEZOKERAMİK KRİSTALLARIN PYEZOELEKTRİK, DİELEKTRİK VƏ ELASTİKLİK XASSƏLƏRİ

Pyezoelektrik kristallar eyni zamanda həm kondensator və həm də elektromexaniki çevirici rolunu oynadıqlarından onları dərindən səciyyələndirmək üçün onlara xas olan dielektrik, pyezoelektrik və elastiklik sabitlərinə birgə baxmaq lazımdır. Bu sabitlərin hamısının daxil olduqları isə termodinamik funksiyalardır. Belə ki, sözügedən sabitlər bu funksiyaların (daxili enerji, entalpiya, Qibbs funksiyası) yəni uyğun termodinamik potensialların mexaniki gərginliklərlə elektrik sahəsinin gərginliyinin komponentlərinə görə xüsusi törəmələri və yaxud bunların hər ikisinə görə qarışıq törəmələri ilə təyin olunurlar. Bu sabitlərin sayı çox olduğundan onları müxtəlif hərflərlə işarə etmək əlverişli deyil. Ona görə də hələ sovetlər dönəmində Radiomühəndislər Cəmiyyətinin pyezoelektriklər üzrə komitəsi nomenklaturalarını təklif etmişlər ki, biz də burada həmin nomenklaturaya riayət edəcəyik. Bu nomenklatura tələb edir ki, işarələri elə qəbul edək ki, tenzor və matrislər metodlarından sərbəst istifadə etmək mümkün olsun. Burada digər bir çətinlik də elastiklik, pyezoelastiklik və dielektrik və s. sabitləri baxılan andakı fiziki şəraitdən asılı olmalıdır. Ona görə də bu sabitlərin ölçüləcəkləri elektrik, mexaniki və hətta termik şərait əvvəlcədən təyin olunmalıdır. Belə olduqda materialın fiziki sabitlərini yeganə olaraq təyin etmək olar. Ona görə də bu sabitlər sisteminin elə formasına nail omlaq lazımdır ki, onlarda sərhəd şərtləri öz əksini tapa bilmiş olsun. Biz burada əsasən (CGSE) sistemində işləməyə (adət etdiyimizə görə) üstünlük veririk.

§5.1. Kristallarda mexaniki gərginliklər və deformasiyalar

Klassik ədəbiyyatdan başlayaraq [49, 51] bu günə deformasiya oluna bilən bərk cisimlərdə verilmiş nöqtədə gərginlik vəziyyətini öyrənmək üçün bu nöqtəni öz daxilinə alan və tərəfləri x , y və z koordinat oxlarına paralel olan elementar kuba baxılır (şəkil 5.1.1).

Bu zaman elementar kubun üzələrinə təsir edən gərginliklərə baxmağa üstünlük verilir. Deformasiyaya uğramış cisimdə gərginliklər nöqtədən nöqtəyə dəyişir və hər bir üzə təsir edən bütün gərginliklərin yekun təsiri bu gərginliklərin üzün mərkəzinə təsir edən əvəzləyici ilə əvəz edilə bilər.



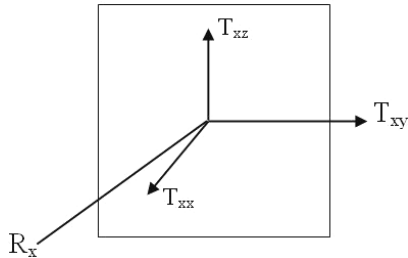
Şəkil 5.1.1.

Bu əvəzləyiciyə R_x desək onu

$$\bar{R}_x = T_{x_2x} \bar{i} + T_{x_2y} \bar{j} + T_{x_2z} \bar{k} \quad (5.1.1)$$

kimi ifadə etmək olar. Bu zaman üzə təsir edən qüvvələrin momenti kiçik olduğundan nəzərə alınmır. Biz burada OX oxuna perpendikulyar olan ABCD üzünə baxdıq.

Beləliklə, haqqında danışdığımız üzə təsir edən qüvvəni T_{xx} , T_{xy} , T_{xz} kimi üç komponentlə ifadə edə bilərik. Bu simvolların birincisi üzün hansı koordinat oxuna hansı nöqtədə perpendikulyar olma-



sı, ikinci indeks isə komponentin hansı ox istiqamətində yönəlməsini göstərir. Məsələn, T_{x_2z} belə oxunun: «OX oxuna perpendikulyar kəsikdə x_2 nöqtəsində OZ istiqamətində təsir edən komponent». Əgər baxılan üzə təsir edən R qüvvəsi kubun xaricinə yönəlsə, bu kubun dartılma əks halda sıxılması

deməkdir. Eyni qayda ilə kubun OX oxuna perpendikulyar (OEFG) üzünə ($x_1=0$) təsir edən gərginliklərin əvəzləyicisini T_{x_1x} , T_{x_1y} , T_{x_1z} komponentləri ilə ifadə edə bilərik. Qeyd etmək lazımdır ki, bu komponentlər x_2 (ABCD) üzündəki uyğun komponentlərin əksinə yönəlmiş olurlar.

Beləliklə, qalan dörd üzdəki gərginliklərin əvəzləyicilərini uyğun olaraq aşağıdakı komponentlərlə ifadə etmək olar:

$$\begin{aligned} \text{OABE üzündə} \quad & T_{y_1x} \quad T_{y_1y} \quad T_{y_1z} \\ \text{GFCD üzündə} \quad & T_{y_2x} \quad T_{y_2y} \quad T_{y_2z} \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

$$\begin{aligned} \text{OADG üzündə} \quad & T_{z_1x} \quad T_{z_1y} \quad T_{z_1z} \\ \text{BCEF üzündə} \quad & T_{z_2x} \quad T_{z_2y} \quad T_{z_2z} \end{aligned}$$

OX oxu istiqamətində yönəlmiş bütün qüvvələrin əvəzləyicisi aşağıdakı cəmlə ifadə oluna bilər

$$\begin{aligned} P_x = & (T_{x_2x} - T_{x_1x}) dydz + \\ & + (T_{y_2x} - T_{y_1x}) dx dz + (T_{z_2x} - T_{z_1x}) dx dy \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Lakin nəzərə alsaq ki

$$\begin{aligned} T_{x_2x} &= T_{x_1x} + \Delta T_{x_1x} = T_{x_1x} + \frac{\partial T_{x_1x}}{\partial x} dx \\ T_{y_2x} &= T_{y_1x} + \Delta T_{y_1x} = T_{y_1x} + \frac{\partial T_{y_1x}}{\partial y} dy \\ T_{z_2x} &= T_{z_1x} + \Delta T_{z_1x} = T_{z_1x} + \frac{\partial T_{z_1x}}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

bərabərlikləri doğrudur (kiçik deformasiyalar üçün), onda (5.1.3)-dən alırıq:

$$P_x = \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (5.1.5)$$

Eyni qada ilə OY və OX oxları istiqamətlərində təsir edən qüvvələrin əvəzləyiciləri üçün aşağıdakı uyğun ifadələri alırıq:

$$P_y = \left(\frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (5.1.6)$$

$$P_z = \left(\frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

İndi $x=1$, $y=2$, $z=3$ ilə işarə etsək, komponentlərin matrisini aşağıdakı kimi yazı bilərik:

$$\begin{vmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} \quad (5.1.7)$$

Beləliklə, verilmiş nöqtədəki mexaniki gərginlik vəziyyəti doqquz T_{ij} ($i,j=1,2,3$) komponentlə xarakterizə olunur. Belə ki, üzlərə verilmiş OX istiqamətində təsir edən bütün gərginliklərin (vahid səthə düşən qüvvələrin əvəzləyiciləri bu gərginliklərin birinci tərtib xüsusi törəmələri) vasitəsi ilə təyin edilirlər. (5.1.7)-dəki yazılış forması mexaniki gərginliklərin tenzorial xarakterli olmasını göstərir. Göstərək ki, bu simmetrik tenzordur. Yəni

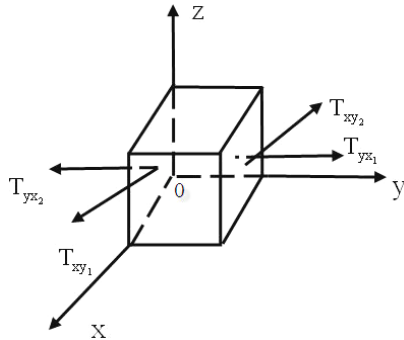
$$T_{xy}=T_{yx}; T_{xz}=T_{zx}; T_{yz}=T_{zy} \quad (5.1.8)$$

Bunun üçün yenidən yuxarıda ayırdığımız elementar kuba müraciət edək (şəkil 5.1.2).

Bu şəkildə kubu öz oxu ətrafında fırlatmağa can atan gərginliklər təsvir olunub. T_{xy_1} və T_{xy_2} gərginlikləri qolu dy -ə bərabər olan cüt təşkil edirlər və onun momenti

$$M_1 = T_{xy} \frac{dx dy dz}{2} \quad (5.1.9)$$

düsturu ilə tapılır. T_{yx_1} və



Şəkil 5.1.2.

T_{yx_2} gərginlikləri isə kubu OZ oxu ətrafında əks istiqamətdə fırlatmağa can atan qüvvələr cütü yaradırlar. Onun momenti

$$M_1 = -T_{yx} \frac{dx dy dz}{2} \quad (5.1.10)$$

düsturu ilə hesablanır. Onda kubun hərəkət tənliyini belə yazıla bilər:

$$\frac{1}{2}(T_{xy} - T_{yx}) dx dy dz = \ddot{\omega}_z (dx)^2 dy \cdot dz \quad (5.1.11)$$

və yaxud

$$\frac{1}{2}(T_{xy} - T_{yx}) = \ddot{\omega}_z dx \quad (5.1.12)$$

Burada bucaq təcili $\ddot{\omega}_z = \text{const}$, dx isə sonsuz kiçik olduğundan $\ddot{\omega}_z dx \approx 0$ götürə bilərik. Onda (5.1.12)-dən alırıq:

$$T_{xy} = T_{yx} \text{ və yaxud } T_{12} = T_{21} \quad (5.1.13)$$

Eyni qayda ilə göstərmək olar ki,

$$T_{yz} = T_{zy}; T_{xz} = T_{zx} \text{ və yaxud } T_{23} = T_{32}; T_{13} = T_{31} \quad (5.1.13)$$

Onda (5.1.1) tenzoru aşağıdakı şəkllə düşür

$$\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} \quad (5.1.15)$$

Buradakı indeksləri $11 \rightarrow 1, 12 \rightarrow 6, 13 \rightarrow 5, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4$ kimi əvəz etsək alırıq:

$$\begin{vmatrix} T_1 & T_6 & T_5 \\ T_6 & T_2 & T_4 \\ T_5 & T_4 & T_3 \end{vmatrix} \quad (5.1.16)$$

§5.2. Deformasiya anlayışı

Kəsilməz cismin deformasiyası dedikdə onun nöqtələrinin vəziyyətlərinin elə dəyişməsi nəzərdə tutulur ki, bu zaman həmin nöqtələr arasındakı məsafə dəyişmiş olsun.

Tutaq ki, haqqında danışdığımız cisimdə düzxətli və düzbucaqlı Oxyz Dekart koordinat sistemi seçilmişdir. Hər hansı nöqtənin deformasiyadan əvvəlki koordinatlarına x, y, z , deformasiyadan sonrakı koordinatlarına isə x_1, y_1, z_1 deyək.

Cismin fəzadan ayırdığı hissə D oblastı olsun. Bu cismin hər bir nöqtəsi D oblastında bir (x, y, z) koordinatlı vəziyyətə malik olur. Həmin nöqtə deformasiyadan sonra tamamilə müəyyən bir (x_1, y_1, z_1) vəziyyətində mövqe tutur.

Beləliklə, fərz etmiş oluruq ki, nöqtənin sonrakı vəziyyəti onun ilkin vəziyyətinin müəyyən funksiyasıdır. Yəni

$$x_1=f_1(x, y, z) \quad y_1=f_2(x, y, z) \quad z_1=f_3(x, y, z) \quad (5.2.1)$$

Fərz edirik ki, bu funksiyalar D oblastında kəsilməz funksiyalardır. Yəni ki, deformasiyalar qırılmadan (cırılmadan) baş verir. (5.2.1) çevirməsindən sonra (x_1, y_1, z_1) koordinatlı nöqtələr çoxluğu D_1 oblastını təşkil edirlər. D_1 oblastı D oblastının deformasiyaya uğramış formasıdır. Biz də fərz edirik ki, (5.2.1) çevirməsinin müəyyən tərs çevirməsi də mövcuddur. Onda demək olar ki, x, y, z koordinatları da x_1, y_1, z_1 koordinatlarının müəyyən funksiyalarıdır. Bu o deməkdir ki, (5.2.1) tənlikləri x, y, z dəyişənlərinə görə birqiyətli həll oluna biləndirlər.

Qeyd etmək lazımdır ki, (5.2.1) çevirməsi həndəsi baxımdan D oblastını D_1 oblastına inkas etdirir. Lakin belə çevirmə həmişə cismin deformasiya olunmasını əks etdirmir. Doğurdan da, cism ancaq sərt yerdəyişməyə, yəni deformasiyasız hərəkətə məruz qalırsa, onda belə çevirmə də D oblastını D_1 oblastına inkas etdirir, lakin biz burada deformasiya görmürük. Çünki bu zaman cismin nöqtələri arasında məsafə dəyişikliyi baş vermir.

§5.3. Affin çevirmə

Əgər (5.2.1) çevirməsi elədirsə ki, bu çevirmədə x_1, y_1, z_1 dəyişmələri x, y, z dəyişmələri ilə xətti ifadə olunur, onda belə çevirməyə **affin çevirmə** deyilir. Belə olduqda (5.2.1) çevirməsini belə yazmaq olar

$$\begin{aligned}x_1 &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\y_1 &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\z_1 &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z\end{aligned}\quad (5.3.1)$$

Ümumiliyi pozmadan bu çevirməni belə də yazmaq olar:

$$\begin{aligned}x_1 &= (1 + a_{11})x + a_{12}y + a_{13}z \\y_1 &= a_{21}x + (1 + a_{22})y + a_{23}z \\z_1 &= a_{31}x + a_{32}y + (1 + a_{33})z\end{aligned}\quad (5.3.2)$$

Gələcəkdə görəcəyik ki, bunu ancaq münasiblik xatirinə etmişik. §5.2-də qəbul olunmuş fərziyyələrə əsasən hesab etməliyik ki, (5.3.2) sistemi x, y, z dəyişənlərinə görə birqiyəmətlə həll oluna bilər. Yəni

$$D = \begin{vmatrix} 1 + a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 + a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 + a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

determinantı sıfırdan fərqlidir.

Affin çevirmənin bəzi xassələrini qeyd edək.

1) Affin çevirmənin tərs çevirməsi də affin çevirməsidir.

Doğurdan da (5.3.2)-ni x, y, z dəyişənlərinə görə həll etsək alarıq:

$$\begin{aligned}x &= (1 + b_{11})x_1 + b_{12}y_1 + b_{13}z_1 + a' \\y &= b_{21}x_1 + (1 + b_{22})y_1 + b_{23}z_1 + b' \\z &= b_{31}x_1 + b_{32}y_1 + (1 + b_{33})z_1 + c'\end{aligned}\quad (5.3.3)$$

Burada $b_{i,j} = \text{const}$ ($i, j = 2, 3$), $a' = \text{const}$, $b' = \text{const}$, $c' = \text{const}$.

2) Affin çevirmə xətti çevirmə olduğundan müstəvini müstəviyə və düz xətti düz xəttə çevirir.

Doğurdan da, əgər M müstəvisi deformasiyadan əvvəl

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (5.3.4)$$

tənliyi ilə ifadə olunurdusa, onda ona (5.3.3) çevirməsini tətbiq etdikdən sonra o

$$M_1 \rightarrow A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D' = 0 \quad (5.3.5)$$

tənliyi ilə təsvir olunacaq, belə ki, burada

$$\begin{aligned} A_1 &= A(1+b_{11}) + Bb_{21} + Cb_{31}, \\ B_1 &= Ab_{21} + B(1+b_{22}) + Cb_{32}, \\ C_1 &= Ab_{13} + Bb_{23} + (1+b_{33})C. \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Deformasiyadan əvvəl M müstəvisi üzərində olan nöqtələr deformasiyadan sonra M_1 müstəvisi üzərində olcaqlar. Affin çevirmədə düz xəttin düz xəttə inkas olunmasını isbat etmək üçün düz xəttə iki müstəvinin kəsişmə xətti kimi baxmaq kifayətdir.

Deyilənlərdən aşağıdakı nəticələri çıxarmaq olar:

Affin çevirmə vektoru vektora, düz xətt parçasını düz xətt parçasına inkas etdirir. Doğurdan da tutaq ki, $\vec{P}(\xi, \eta, \zeta)$ vektoru çevirmədən sonra $\vec{P}_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ vektoruna inkas olunur. Onda \vec{P} -nin koordinatları

$$\xi = x - x_0, \quad \eta = y - y_0, \quad \zeta = z - z_0$$

\vec{P}_1 -in koordinatları isə

$$\xi_1 = x_1 - x_{01}, \quad \eta_1 = y_1 - y_{01}, \quad \zeta_1 = z_1 - z_{01}$$

olar. Onda (5.3.1) bərabərliklərinə əsasən

$$x_1 = (1+a_{11})x + a_{12}y + a_{13}z + a$$

$$x_{01} = (1+a_{11})x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a$$

olar. Bu bərabərlikləri tərəf-tərəfə çıxıb alırıq:

$$\xi_1 = (1+a_{11})\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta \quad (5.3.5)$$

Analoji olaraq alırıq:

$$\eta_1 = a_{21}\xi + (1+a_{22})\eta + a_{22}\zeta \quad (5.3.5')$$

$$\zeta_1 = a_{31}\xi + a_{32}\eta + (1+a_{33})\zeta$$

(5.3.5) bərabərliklərindən bilavasitə çıxır ki, affın çevirmə iki bərabər vektoru iki bərabər vektora inkas etdirir, həm də bu paralel vektorların uzunluqları nisbəti dəyişmir. Eyni oriyentasiyalı və düzxətli kontura malik həndəsi fiqur da eyni oriyentasiyalı və düzxətli kontura malik həndəsi fiqura inkas olunur. Lakin hər bir həndəsi fiqura konturu kiçik düz xətt parçalarından düzəlmiş həndəsi fiqurun limit vəziyyəti kimi baxmaq olar. Bu isə o deməkdir ki, cismin bütün hissələri onların vəziyyətdən asılı olmayaraq eyni cür deformasiya olunurlar. Ona görə affın çevirmə ilə ifadə olunan deformasiyaya adətən bir-cinsli deformasiya deyilir.

§5.4. Sonsuz kiçik affın çevirmə

(5.3.1) çevirmələrinə daxil olan a_{ij} ($i, j = \overline{1,3}$) və a, b, c sabitləri sonsuz kiçik olduqda, yəni onların kvadratları və cüt-cüt hasilərini bu kəmiyyətlərin özləri ilə müqayisədə nəzərə almamaq mümkün olduqda belə çevirməyə sonsuz kiçik affın çevirmə deyilir. Onda (5.3.1)-dən çıxır ki, eyni nöqtənin deformasiyadan əvvəlki və sonrakı koordinatları arasındakı fərqlər də, yəni

$$x_1 - x = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a$$

$$y_1 - y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b$$

$$z_1 - z = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + c$$

Kəmiyyətləri də sonsuz kiçik kəmiyyətlərdir.

Asanlıqla göstərmək olar ki, iki sonsuz kiçik affın çevirmənin nəticəsi də sonsuz kiçik affın çevirmədir.

Doğurdan da tutaq ki, birinci sonsuz kiçik affın çevirmə x, y, z koordinatlarını x_1, y_1, z_1 koordinatlarına çevirir.

$$x_1 = (1 + a_{11})x + a_{12}y + a_{13}z + a$$

$$y_1 = a_{21}x + (1 + a_{22})y + a_{23}z + b \quad (5.4.1)$$

$$z_1 = a_{31}x + a_{32}y + (1 + a_{33})z + c$$

x_1, y_1, z_1 koordinatlarını x_2, y_2, z_2 koordinatlarına çevirən sonsuz kiçik affin çevirmə isə aşağıdakıdır

$$\begin{aligned}x_2 &= (1 + b_{11})x_1 + b_{12}y_1 + b_{13}z_1 + \bar{a} \\y_2 &= b_{21}x_1 + (1 + b_{22})y_1 + b_{23}z_1 + \bar{b} \\z_2 &= b_{31}x_1 + b_{32}y_1 + (1 + b_{33})z_1 + \bar{c}\end{aligned}\quad (5.4.2)$$

Bu iki ardıcıl çevirmə (x, y, z) nöqtəsini (x_2, y_2, z_2) nöqtəsinə inkas etdirir. Əgər (5.4.1)-i (5.4.2)-də yazsaq alarıq:

$$\begin{aligned}x_2 &= (1 + c_{11})x_1 + c_{12}y_1 + c_{13}z_1 + \bar{\bar{a}} \\y_2 &= c_{21}x_1 + (1 + c_{22})y_1 + c_{23}z_1 + \bar{\bar{b}} \\z_2 &= c_{31}x_1 + c_{32}y_1 + (1 + c_{33})z_1 + \bar{\bar{c}}\end{aligned}\quad (5.4.3)$$

Belə ki, burada

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \bar{\bar{a}} = a + \bar{a}, \quad \bar{\bar{b}} = b + \bar{b}, \quad \bar{\bar{c}} = c + \bar{c}.$$

Hər şeydən əvvəl buradan aydın olur ki, iki və daha çox (sonlu sayda) affin çevirmələrin ardıcıl tətbiqinin nəticəsi də affin çevirmədir.

§5.5. Sonsuz kiçik çevirmənin saf deformasiya və sərt yerdəyişməyə ayrılması

Bizi ancaq cismin deformasiyası maraqlandırdığından ancaq vektorun koordinatlarının (5.3.1) çevirmə düsturlarına baxmaqla kifayətlənə bilərik. Əgər bu düsturlar verilibsə, yəni a_{ij} kəmiyyətləri verilibsə, onda nöqtənin koordinatlarını çevirən (5.3.1) düsturları verilmiş olur. Lakin bu zaman a, b və c sabitləri naməlum olur. Ancaq bu sabitlər cismin deformasiyasına təsir etmirlər və cismin sərt (deformasiya olunmadan) irəliləmə hərəkətini müəyyən edirlər. (5.3.3) çevirməsini belə yazaq:

$$\begin{aligned}\delta\xi &= a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta \\ \delta\eta &= a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta \\ \delta\zeta &= a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta\end{aligned}\quad (5.5.1)$$

Burada $\delta\xi = \xi_1 - \xi$, $\delta\eta = \eta_1 - \eta$, $\delta\zeta = \zeta_1 - \zeta$ (5.5.2) fərqləri $\bar{P}_1 - \bar{P} = \delta\bar{P}$ vektor artımının komponentləridir. İndi belə suala cavab verməyə çalışaq:

Çevirmənin a_{ij} əmsalları hansı şərtləri ödəməlidirlər ki, (5.5.1) çevirməsi heç bir sərt yerdəyişmə ilə müşayiət olunmasın?

Bunun zəruri və kafi şərti çevirmə zamanı \bar{P} vektorunun uzunluğunun dəyişməməsi, yəni $\delta\bar{P} = 0$ olmasıdır. \bar{P} vektorunun uzunluğunun kvadratına baxaq:

$$|\bar{P}|^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \quad (5.5.3)$$

və sonsuz kiçik affın çevirmə ilə kifayətlənək. Onda $\delta\bar{P}$ vektor artımını tapaq. Bunun üçün (5.5.3)-ü diferensiyallayaq. Onda alarıq:

$$\begin{aligned} \bar{P}\delta\bar{P} &= \xi\delta\xi + \eta\delta\eta + \zeta\delta\zeta = a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + \\ &+ (a_{23} + a_{32})\eta\zeta + (a_{31} + a_{13})\xi\zeta + (a_{12} + a_{21})\xi\eta \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

Buradan görünür ki, $\delta\bar{P} = 0$ olması üçün

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0; \quad a_{12} + a_{21} = a_{13} + a_{31} = a_{23} + a_{32} = 0$$

olması zəruri və kafidir. Beləliklə (5.5.1) aşağıdakı şəklə düşür:

$$\delta\xi = q\xi - r\eta; \quad \delta\eta = r\xi - p\zeta; \quad \delta\zeta = p\eta - q\xi \quad (5.5.5)$$

Belə ki, burada $a_{32} = -a_{23} = p$, $a_{13} = -a_{31} = q$, $a_{21} = -a_{12} = r$ (5.5.6) işarə olunub.

(5.5.5) və (5.5.6) kinematikanın cismin sərt yerdəyişməsini ifadə edən məlum düsturlarıdır. Daha doğrusu p , q və r uyğun koordinat oxları ətrafında kiçik dönmə bucaqlarıdır. Bunlara fırlanma komponentləri də deyilir. Bu düsturlardan sərt yerdəyişməni ifadə edən hədlər yoxa çıxdı, lakin bu məsələnin mahiyyətinə xələl gətirmir.

Deformasiyaya qədər $M(x, y, z)$ mövqeyini tutan nöqtənin koordinatları üçün çevirmə düsturlarını almaq üçün (5.5.5) düsturlarını $\bar{M}_0 \bar{M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ vektoruna tətbiq etmək

kifayətdir. $M(x_0, y_0, z_0)$ ixtiyari, lakin həmişəlik seçilmiş nöqtə olsun. (5.5.5) düsturlarında ξ, η, ζ -ların yerinə uyğun olaraq $x - x_0, y - y_0$ və $z - z_0$ yazsaq kinematikadan yaxşı məlum olan aşağıdakı düsturları alırıq:

$$\begin{aligned}\delta x &= a + q(x - x_0) - r(y - y_0) \\ \delta y &= b + r(x - x_0) - p(z - z_0) \\ \delta z &= c + p(y - y_0) - q(x - x_0)\end{aligned}\quad (5.5.7)$$

Belə ki, burada $a = \delta x_0, b = \delta y_0, c = \delta z_0$ işarə edilmişdir. başqa sözlə desək (a, b, c) (x_0, y_0, z_0) nöqtəsinin yerdəyişməsini göstərir. M_0 nöqtəsi kimi koordinat başlanğıcını seçsək (5.5.7) düsturları bir qədər də sadələşib,

$$\delta x = a + qz - ry, \quad \delta y = b + rx - pz, \quad \delta z = c + py - qx \quad (5.5.8)$$

şəklinə düşürlər.

(5.5.4) bərabərliyi göstərir ki, \bar{P} vektorunun uzunluğunun dəyişməsi (yəni deformasiyası) $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12} + a_{21}, a_{13} + a_{31}$ və $a_{32} + a_{23}$ kəmiyyətləri ilə xarakterizə olunur. Bu kəmiyyətləri indi belə işarə edək.

$$\begin{aligned}a_{11} &= e_{xx}, \quad a_{22} = e_{yy}, \quad a_{33} = e_{zz} \\ \frac{1}{2}(a_{32} + a_{23}) &= e_{yz} = e_{zy}; \quad \frac{1}{2}(a_{13} + a_{31}) = e_{zx} = e_{xz}; \\ \frac{1}{2}(a_{21} + a_{12}) &= e_{xy} = e_{yx}\end{aligned}\quad (5.5.9)$$

Deməli, saf deformasiya altı – $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}; e_{xy}, e_{xz}, e_{yz}$ kəmiyyətləri ilə xarakterizə olunur.

$$\text{Əgər } p = \frac{1}{2}(a_{32} + a_{23}), \quad q = \frac{1}{2}(a_{13} + a_{31}); r = \frac{1}{2}(a_{21} + a_{12}) \quad (5.5.10)$$

ilə işarə etsək, onda

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2}(a_{32} + a_{23}) &= e_{yz} \\ \frac{1}{2}(a_{32} - a_{23}) &= p \end{aligned} \right\}, \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2}(a_{13} + a_{31}) &= e_{xz} \\ \frac{1}{2}(a_{13} - a_{31}) &= q \end{aligned} \right\} \quad \text{və} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2}(a_{21} + a_{12}) &= e_{xy} \\ \frac{1}{2}(a_{21} - a_{12}) &= r \end{aligned} \right.$$

sistemlərindən tapırıq:

$$\begin{aligned} a_{32} &= e_{yz} + p & a_{13} &= e_{xz} + q & a_{21} &= e_{xy} + r \\ a_{23} &= e_{yz} - p & a_{31} &= e_{xz} - p & a_{12} &= e_{xy} - r \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

Onda (5.5.1) düsturları aşağıdakı şəkllə düşürlər.

$$\begin{aligned} \delta\xi &= e_{xx}\xi + e_{xy}\eta + e_{xz}\zeta + q\xi - r\eta \\ \delta\eta &= e_{yx}\xi + e_{yy}\eta + e_{yz}\zeta + r\xi - p\zeta \\ \delta\zeta &= e_{zx}\xi + e_{zy}\eta + e_{zz}\zeta + p\eta - q\xi \end{aligned} \quad (5.5.12)$$

Bu bərabərliklər isə göstərirlər ki, baxdığımız affın çevirmə

$$\begin{aligned} 1) \delta\xi &= e_{xx}\xi + e_{xy}\eta + e_{xz}\zeta \\ \delta\eta &= e_{yx}\xi + e_{yy}\eta + e_{yz}\zeta \\ \delta\zeta &= e_{zx}\xi + e_{zy}\eta + e_{zz}\zeta \end{aligned} \quad (5.5.13)$$

və (5.5.5) çevirmələrini cəmi şəkllində göstərilə bilər. (5.5.13) münasibətlərinin xarakterik cəhəti ondan ibarətdir ki, onların əmsallarından düzəldilmiş

$$\left\| \begin{array}{ccc} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{array} \right\| \quad (5.5.14)$$

cədvəli simmetrik matrisdir.

İndi (5.5.12) ifadələrinin alınmasına başqa cür yanaşaq.

§5.6. Ümumi şəkildə deformasiya

Fərz edək ki. Deformasiyadan əvvəl koordinatları x, y, z olan nöqtə deformasiyadan sonra (x_1, y_1, z_1) mövqəini tutur. Belə ki,

$$x_1 = x+u; y_1 = y+v; z_1 = z + w \quad (5.6.1)$$

burada u, v, w $M(x,y,z)$ və $M_1(x_1,y_1,z_1)$ nöqtələrini birləşdirən $\overrightarrow{MM_1}$ vektorunun koordinatlarıdır. Onlar M nöqtəsinin deformasiya nəticəsində baş vermiş yerdəyişməsinin komponentləridir. Deformasiya zamanı cismin müxtəlif nöqtələri müxtəlif yerdəyişmələrə malik olurlar. Deməli, yerdəyişmə komponentləri nöqtənin başlanğıc vəziyyətinin və deməli, x, y, z koordinatlarının funksiyaları olurlar:

$$u=u(x,y,z); v=v(x,y,z); w=w(x,y,z) \quad (5.6.2)$$

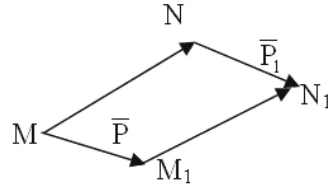
Bundan sonra hesab edəcəyik ki, bu funksiyalar birqiyəmətli kəsilməz funksiyalar olmaqla həm də üçüncü tərtibə qədər (üçüncü tərtib də daxil olmaqla) kəsilməz törəmələrə malikdirlər.

$M(x,y,z)$ nöqtəsi ətrafında elementar oblast ayıraq və deformatsiya zamanı onun necə dəyişməsinə öyrənək. Bunun üçün deformatsiyaya qədər başlanğıcı M nöqtəsində olan sonsuz kiçik

$$\overrightarrow{MN} = \overline{P}(\xi, \eta, \zeta) \quad (5.6.3)$$

vektorunun dəyişməsinə öyrənmək kifayətdir.

Deformatsiyadan sonra M nöqtəsi M_1 nöqtəsinə N nöqtəsi isə N_1 nöqtəsinə inkas olunurlar və \overline{P} vektoru \overline{P}_1 vektoruna çevrilir.



Şəkil 5.5.1.

$$\delta \overline{P} = \overline{P}_1 - \overline{P} \quad (5.6.4)$$

Vektor artımını hesablayaq. M_1 nöqtəsinə koordinatları

$$x_1 + u(x,y,z); \quad y + v(x,y,z); \quad z + w(x,y,z) \quad (5.6.5)$$

deformatsiyaya qədər koordinatları $x + \xi$, $y + \eta$ və $z + \zeta$ olan M_1 nöqtəsinin koordinatları isə

$$\begin{aligned} x + \xi + u(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) \\ y + \eta + v(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) \\ z + \zeta + w(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) \end{aligned} \quad (5.6.6)$$

kimi ifadə oluna bilərlər. Ona görə də \overline{P}_1 vektorunun koordinatları

$$\begin{aligned} \xi + u(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) - u(x, y, z) \\ \eta + v(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) - v(x, y, z) \\ \zeta + w(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) - w(x, y, z) \end{aligned} \quad (5.6.7)$$

olur. Beləliklə $\delta\bar{P}$ vektorunun komponentləri

$$\begin{aligned}\delta\xi &= u(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) - u(x, y, z) = \Delta u \\ \delta\eta &= v(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) - v(x, y, z) = \Delta v \\ \delta\zeta &= w(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) - w(x, y, z) = \Delta w\end{aligned}\quad (5.6.8)$$

kimi ifadə olunurlar. Bu bərabərliklərin sağ tərəflərini onların tam diferensialları ilə əvəz etsək (bunu ancaq birincisi üçün edir, yerdə qalanlarını analogiyaya əsasən yazırıq) alarıq:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \xi + \frac{\partial u}{\partial y} \eta + \frac{\partial u}{\partial z} \zeta + \varepsilon_1.$$

Burada ε_1 sonsuz kiçildir.

Qalan fərqlərlə də eyni qayda ilə hərəkət edərək və sonsuz kiçikləri ataraq aşağıdakı nəticəyə gəlirik:

$$\begin{aligned}\delta\xi &= \frac{\partial u}{\partial x} \xi + \frac{\partial u}{\partial y} \eta + \frac{\partial u}{\partial z} \zeta \\ \delta\eta &= \frac{\partial v}{\partial x} \xi + \frac{\partial v}{\partial y} \eta + \frac{\partial v}{\partial z} \zeta \\ \delta\zeta &= \frac{\partial w}{\partial x} \xi + \frac{\partial w}{\partial y} \eta + \frac{\partial w}{\partial z} \zeta\end{aligned}\quad (5.6.9)$$

Bu ifadələrdə ξ , η , ζ -nin əmsalları x , y , z dəyişənlərinin funksiyaları olub, ξ , η , ζ - dəyişənlərindən asılı deyillər. (5.6.4) düsturları göstərir ki, baxılan elementin xətti ölçülərinə nəzərən sonsuz kiçik dəqiqliyi ilə bu elementin dəyişməsi əmsalları

$$a_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad a_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad a_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad a_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} \text{ və s. olan affın}$$

çevirmə vasitəsi ilə ifadə olunur.

Bundan sonra və həmişəlik fərz edirik ki, u , v , w yerdəyişmələri və onların x , y , z dəyişənlərinə görə törəmələri sonsuz

kiçikdirlər və onların qüvvət və hasillərini özləri ilə müqayisədə nəzərə almamaq olar. Belə olduqda (5.6.4) sonsuz kiçik affın çevirmədir və deməli əvvəlki paraqraflarda deyilənləri ona tətbiq etmək olar. İndi (5.6.4)-ün əmsallarını belə

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = e_{xx} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e_{yy} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = e_{xy} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e_{yx} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = e_{yy} \quad \frac{\partial v}{\partial z} = e_{yz} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = e_{zx} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = e_{zy} \quad \frac{\partial w}{\partial z} = e_{zz} \end{aligned} \quad (5.6.10)$$

işarə edib alırıq:

$$\begin{aligned} \delta \xi &= e_{xx} \xi + e_{xy} \eta + e_{xz} \zeta \\ \delta \eta &= e_{yx} \xi + e_{yy} \eta + e_{yz} \zeta \\ \delta \zeta &= e_{zx} \xi + e_{zy} \eta + e_{zz} \zeta \end{aligned} \quad (5.6.11)$$

(5.6.9) üzərində aşağıdakı eyniyyət çevirmələri yerinə yetirək:

$$\begin{aligned} \delta \xi &= \frac{\partial u}{\partial x} \xi + \eta \left[\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \\ &+ \zeta \left[\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right] = \frac{\partial u}{\partial x} \xi + \\ &+ \zeta \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \\ &+ \zeta \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\ \delta \eta &= \left[\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \right] \xi + \\ &+ \frac{\partial v}{\partial y} \eta + \zeta \left[\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \xi + \frac{\partial v}{\partial y} \eta + \\
&\quad + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \zeta \\
\delta \zeta &= \frac{\partial w}{\partial z} \zeta + \left[\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} \right] \xi + \\
&\quad + \left[\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \right] \zeta = \\
&= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \xi + \\
&\quad + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \eta + \frac{\partial w}{\partial z} \zeta
\end{aligned} \tag{5.6.12}$$

və yaxud

$$\begin{aligned}
\delta \xi &= \frac{\partial u}{\partial x} \xi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \eta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \zeta + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \eta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \zeta \\
\delta \eta &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \xi + \frac{\partial v}{\partial y} \eta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \zeta + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \eta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \zeta \\
\delta \zeta &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \xi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \xi + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \eta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \eta + \frac{\partial w}{\partial z} \zeta
\end{aligned} \tag{5.6.13}$$

Bunları (5.6.12) ilə müqayisə etsək yazı bilərik:

$$\begin{aligned}
 e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}; & e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}; & e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} & e_{xy} &= e_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 e_{xz} &= e_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & e_{zy} &= e_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
 p &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\
 q &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
 r &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{5.6.14}$$

Beləliklə, saf deformasiya üçün sət yerdəyişməni nəzərdən atsaq aşağıdakı ifadələri alırıq:

$$\begin{aligned}
 \delta_x &= \delta\xi = xS_1 + yS_2 + zS_5 \\
 \delta_y &= \delta\eta = xS_2 + yS_3 + zS_4 \\
 \delta_z &= \delta\zeta = xS_5 + yS_4 + zS_3
 \end{aligned} \tag{5.6.15}$$

Belə ki, burada

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}; & S_2 &= \frac{\partial v}{\partial y}; & S_3 &= \frac{\partial w}{\partial z}; & S_4 &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \\
 S_5 &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; & S_6 &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{5.6.16}$$

işarə olunmuşdur. Beləliklə, saf deformasiya aşağıdakı simmetrik deformasiya tenzor ilə xarakterizə olunur:

$$\left\| \begin{array}{ccc} S_1 & \frac{1}{2}S_6 & \frac{1}{2}S_5 \\ \frac{1}{2}S_6 & S_2 & \frac{1}{2}S_4 \\ \frac{1}{2}S_5 & \frac{1}{2}S_4 & S_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{321} & S_{33} \end{array} \right\| \tag{5.6.17}$$

(5.6.16)-ya əsasən u , v , w yerdəyişmələri məlum olduqda deformasiyanın altı komponentini birqiymətli təyin etmək olar. Məsələnə tərsinə qoysaq, yəni verilmiş deformasiyaya görə üç yerdəyişmə komponentlərini axtarsaq üç məchulu tapmaq üçün altı tənlik həll etməli olarıq. Bu isə onu göstərir ki, deformasiya komponentləri başqa əlavə şərtləri də ödəməlidirlər. Bu deformasiya prosesinin kəsilməzlik şərti ola bilər. Biz həmin şərtləri formal olaraq (5.6.16) münasibətlərindən ala bilərik (dəqiq isbatı 51. səh.51-55) Sen-Venanın kəsilməzlik şərtləri adlanan həmin şərtləri almaq üçün (5.6.16) münasibətlərindən ikincisini iki dəfə z -ə görə, üçüncüsünü y -ə görə iki dəfə diferensiallayıb toplasaq, sonra isə dördüncünü y və z -ə görə diferensiallayıb nəticələri müqayisə etsək

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial z^2}$$

eyniliyinə gələrik. Deməli,

$$\frac{\partial^2 S_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 S_3}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 S_2}{\partial y \partial z} \quad (5.6.18)$$

Eyni qayda ilə aşağıdakıları da ala bilərik:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 S_5}{\partial x \partial z}; \quad \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 S_6}{\partial x \partial y} \\ 2 \frac{\partial^2 S_1}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial S_4}{\partial x} + \frac{\partial S_5}{\partial y} + \frac{\partial S_6}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial S_4}{\partial x} + \frac{\partial S_5}{\partial y} + \frac{\partial S_6}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 S_3}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial S_4}{\partial x} + \frac{\partial S_5}{\partial y} + \frac{\partial S_6}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (5.6.19)$$

Beləliklə, bu şərtlərin ödənilməsi ξ , η , ζ kəmiyyətlərinin varlığı üçün zəruri və kafidir.

§5.7. Ümumiləşmiş Huk qanunu

Bu qanun haqqında danışmadan əvvəl qeyd edək ki, cismin hər hansı qapalı oblastında ümumi şəkildə götürülmüş deformasiyaların tam enerjisi ayrılıqda götürülmüş deformasiya komponentlərinin hər birinin baş verməsi üçün tələb olunan enerjilərin cəmləri kimi hesablanı bilər. Məsələn şəkil 5.1.1-də

təsvir olunmuş kubun OX oxu istiqamətində $\frac{\partial \xi}{\partial x} dx = S_1 dx$

məsafəsi qədər uzanmasına (sıxılmasına) sərf olunan iş $T_1 dydz$ qüvvəsinin bu uzanmanın (sıxılmanın) qiymətinə hasilinə, yəni $T_1 S_1 dx dy dz$ -ə bərabər olar. T_6 toxunan gərginliyin gördüyü işi, yəni onun hesabına enerji artımı $\frac{1}{2} dx dS_1$ yerdəyişməsi ilə

$T_6 dydz$ qüvvəsinin və $\frac{1}{2} dy dS_6$ yerdəyişməsi ilə $T_6 dx dz$ qüvvəsinin hasiləri cəmi şəklində, yəni

$$\frac{1}{2} (dS_6 T_6 + T_6 dS_6) dx dy dz = T_6 dS_6 dx dy dz$$

kimi hesablamaq olar. Onda toplum şəklində götürülmüş bütün deformasiyalara sərf olunan enerjini belə tapa bilərik:

$$\Delta U = T_1 dS_1 + T_2 dS_2 + T_3 dS_3 + T_4 dS_4 + T_5 dS_5 + T_6 dS_6 = T_i dS_i \quad (5.7.1)$$

Ümumiləşmiş Huk qanununa görə gərginlik vektorunun hər bir proyeksiyası deformasiyanın bütün komponentlərinin xətti funksiyasıdır. Bu asılılığı belə yazı bilərik:

$$T_{ij} = c_{ij} S_j \quad ij = \overline{1,6} \quad (5.7.2)$$

Burada c_{ij} -lər sabitlərdir və onlara elastiklik modulları deyəcəyik. Məsələn, c_{11} S_1 -dən başqa bütün deformasiya komponentləri sıfıra bərabər olduqda (yəni biroxlulu dartılma və ya sıxılmada) T_1 gərginliyinin S_1 deformasiyasından xətti asılılığının mütənəsiblik əmsalı, yəni Yunq moduludur. (5.7.2) bəra-

bərliyinə sağ tərəfində iki dəfə təkrarlanan indeksə görə toplama əməli yerinə yetirilir.

Termodinamikadan məlum olduğu kimi deformasiyalara sərf olunan daxili enerjinin tam artımı elə tam diferensialdır. Bu bizə (5.7.2)-də c_{ij} əmsalları arasındakı

$$c_{ij} = c_{ji}$$

$$T_i = \frac{\partial U}{\partial S_i} \quad (5.7.3)$$

(5.7.2)-yə əsasən isə
$$c_{ij} = \frac{\partial T_i}{\partial S_j} \quad (5.7.4)$$

Deməli
$$c_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial S_i \partial S_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial S_j \partial S_i} = c_{ji} \Rightarrow c_{ij} = c_{ji} \quad (5.7.6)$$

Bu o deməkdir ki, (5.7.2) sisteminin matrisi simmetrik kvadrat matrisdir.

Qeyd edək ki, burada ancaq kiçik deformasiyalara, yəni elastik deformasiyalara baxdığımızdan qalıq deformasiyalar mövcud deyillər. Ona görə də deformasiyaların diferensiallarını sonsuz kiçik dəqiqliyi ilə onların artımları ilə deməli özləri ilə əvəz edə bilərik. Onda həm (5.7.3), (5.7.4) düsturları doğru olar, həm də (5.7.2)-ni (5.7.1)-də yazıb (5.7.5)-i nəzərə almaqla daxili enerjinin artımını aşağıdakı kimi ifadə edə bilərik.

$$\begin{aligned} 2\Delta U = & c_{11}S_1^2 + 2c_{12}S_1S_2 + 2c_{13}S_1S_3 + 2c_{14}S_1S_4 + 2c_{15}S_1S_5 + 2c_{16}S_1S_6 + \\ & + c_{22}S_2^2 + 2c_{23}S_2S_3 + 2c_{24}S_2S_4 + 2c_{25}S_2S_5 + 2c_{26}S_2S_6 + \\ & + c_{33}S_3^2 + 2c_{34}S_3S_4 + 2c_{35}S_3S_5 + 2c_{36}S_3S_6 + \\ & + c_{44}S_4^2 + 2c_{45}S_4S_5 + 2c_{46}S_4S_6 + \\ & + c_{55}S_5^2 + 2c_{56}S_5S_6 + \\ & + c_{66}S_6^2 \end{aligned} \quad (5.7.6)$$

(5.7.6)-nı belə də yazı bilərik:

$$2\Delta U = c_{ij}S_iS_j \quad (5.7.7)$$

$\Delta U = U - U_0$ olduğundan ($U_0 = \text{const}$ deformasiya olunmamış cismin daxili enerjisidir):

$$\frac{\partial \Delta U}{\partial S_i} = \frac{\partial U}{\partial S_j} + \frac{\partial U_0}{\partial S_j} = \frac{\partial U}{\partial S_j} \quad (5.7.8)$$

və Huk qanununun $T_i = \frac{\partial U}{\partial S_j}$ şəklində yazılışı özünü doğruldur.

(4.7.2) sistemini Kramer üsulu ilə deformasiya komponentlərinə görə həll etsək alarıq:

$$S_i = s_{ij}T_j \quad (5.7.9)$$

Belə ki, burada

$$S_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \Delta_{ij}^c}{\Delta^c} \quad (5.7.10)$$

Δ^c isə (5.7.2) sisteminin determinantıdır

$$\Delta^c = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{vmatrix} \quad (5.7.11)$$

Δ_{ij}^c - Δ^c determinantının c_{ij} elementinə uyğun minorudur.

§5.8. İzotermik və adiabatik elastiklik sabitləri

İndiyə qədər baxdığımız sabitlər, yəni c_{ij} elastiklik modulları və s_{ij} elastiklik sabitləri sabit temperatur şəraitində ölçüldüklərindən izotermik kəmiyyətlər adlanırlar. Lakin sürətlə rəqs edən cisimlərdə temperaturu sabit saxlamaq demək olar ki, qeyri-mümkündür. Ona görə də bundan sonra baxacağımız sabitlərə (onlar cismin istilik mübadiləsinin olmadığı şəraitdə ölçüldüklərindən) adiabatik sabitlər deyəcəyik. Qazlarda bu sabitlər, yəni izotermik və adiabatik sabitlər arasındakı fərq əhəmiyyətli dərəcədədir, lakin pyezoelektrlərdə bu fərq nəzərə alınma bilməyəcək dərəcədə kiçikdir və çox zaman onu nəzərə almırlar.

Termodinamikanın birinci və ikinci qanunlarına əsasən daxili enerjinin artımını belə ifadə edə bilərik:

$$dU = T_i dS_i + \theta d\sigma \quad (5.8.1)$$

Yəni vahid həcmdəki tam enerjinin artımı potensial enerji ilə istilik enerjisinin artımları cəminə bərabərdir. Burada $\theta d\sigma - dQ$ istilik enerjisinin artımı, θ - temperatur, σ - entropiyadır. Deformasiya komponentlərini gərginlik komponentləri və temperaturdan asılı ifadə etmək üçün elastik Qibbs funksiyası adlanan

$$G = U - T_i S_i - \theta \sigma \quad (5.8.2)$$

funksiyasından istifadə edək. (5.8.2)-ni diferensiallayaq

$$dG = dU - T_i dS_i - S_i dT_i - \theta d\sigma - \sigma d\theta \quad (5.8.3)$$

lakin (5.8.1)-ə görə

$$dU = T_i dS_i + \theta d\sigma \quad (5.8.3')$$

olduğundan (5.8.3)

$$dG = -S_i dT_i - \sigma d\theta \quad (5.8.4)$$

şəklinə düşür. Onda buradan alırıq:

$$S_i = -\frac{\partial G}{\partial T_i} \quad \sigma = -\frac{\partial G}{\partial \theta} \quad (5.8.5)$$

Beləliklə, deformasiya və entropiya T_i ($i = \overline{1,6}$) gərginliklərinin və temperaturun funksiyalarıdır. Onları cismin təbii halı ətrafında Teylor sırasına ayırıb ancaq xətti hissəni saxlasaq alarıq:

$$\begin{aligned} dS_i &= \frac{\partial S_i}{\partial T_j} dT_j + \frac{\partial S_i}{\partial \theta} d\theta \\ d\sigma &= \frac{\partial \sigma}{\partial T_j} dT_j + \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} d\theta \end{aligned} \quad (5.8.6)$$

Bunları (5.7.9)-la müqaiysə etsək görərik ki,

$$\frac{\partial S_i}{\partial T_j} = s_{ij}^0 \quad \text{və} \quad \frac{\partial S_i}{\partial \theta} = \alpha_i \quad (i, j = \overline{1,6}) \quad (5.8.7)$$

Burada s_{ij}^0 - izotermik elastiklik sabitləri, α_i -lər isə cismi uyğun temperaturda genişlənmə əmsallarıdır.

Entropiyanın gərginliklərə görə xüsusi törəmələrini qiymətləndirmək üçün Qibbs funksiyasının tam diferensial olması faktından istifadə edirik.

$$\frac{\partial S_i}{\partial \theta} = -\frac{\partial^2 G}{\partial \theta \partial T_i} = -\frac{\partial^2 G}{\partial T_i \partial \theta} = \frac{\partial \sigma}{\partial T_j} = \alpha_i \quad (5.8.8)$$

(5.8.6) münasibətinin ikincisini θ -yə vursaq və qalıq deformasiya və qalıq gərginliklərin olmamasını nəzərə alaraq onu belə yazaq:

$$dQ = \theta d\sigma = \theta \alpha_i T_i + \theta \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} d\theta \quad (5.8.9)$$

Burada $\theta \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}$ hasilini sabit təzyiqdə cismin vahid həcmnin tam istilik tutumunu ifadə edir və onu

$$\theta \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = \rho C_p$$

kimi ifadə edə bilərik, belə ki ρ - cismin kütlə sıxlığı, C_p - sabit təzyiqdə xüsusi istilik tutumudur. Adiabatik elastiklik sabitləri s_{ij}^0 -nin ifadəsini almaq üçün (adiabatik prosesdə istilik mübadiləsi yoxxdur) $dQ=0$ deyib (5.8.7) tənliklərindən $d\theta$ -nı təcrid edək. Onda (5.8.9)-dan alırıq:

$$\theta\alpha_i T_i + \rho C_p d\theta = 0, \text{ yəni } d\theta = -\frac{\alpha_i \theta}{\rho C_p} T_i \quad (5.8.10)$$

$d\theta$ -nın bu ifadəsini (5.8.6) sisteminin birinci altı tənliyində yazıb zəruri qruplaşdırmanı yerinə yetirsək alırıq

$$S_i = \left(s_{ij}^0 - \frac{\alpha_i \alpha_j \theta}{\rho C_p} \right) T_j \quad (5.8.11)$$

(5.8.11)-i (5.7.6) ilə müqayisədən alırıq

$$S_{ij} = s_{ij}^0 - \frac{\alpha_i \alpha_j \theta}{\rho C_p} \quad (5.8.12)$$

Kvars üçün

$$S_{11}^0 = 128,2 \cdot 10^{-14} \quad S_{33}^0 = -95,74 \cdot 10^{-14}$$

$$S_{13}^0 = 10,83 \cdot 10^{-14} \quad S_{12}^0 = -15,04 \cdot 10^{-14}$$

$$S_{11}^\sigma = 127,9 \cdot 10^{-14} \quad S_{12}^\sigma = -15,35 \cdot 10^{-14}$$

$$S_{11}^\sigma = 11 \cdot 10^{-14} \quad S_{33}^\sigma = 95,6 \cdot 10^{-14}$$

Göründüyü kimi adiabatik və izotermik elastiklik sabitləri arasındakı fərq onların ölçülməsindəki buraxılan xətalara əsaslanır.

(5.8.6) tənliklərinin birinci hissəsini indi belə də yazıb bilərik

$$S_i = s_{ij}^0 T_j + \alpha_i d\theta; \quad dQ = \theta\alpha_i T_i + \rho C_p d\theta \quad (5.8.13)$$

və bu sistemi gərginliklərə görə Kramer üsulu ilə həll etsək alırıq:

$$T_j = c_{ij}^0 S_j - \lambda_i d\theta \quad (5.8.14)$$

Belə ki, burada

$$\lambda_i = \alpha_j c_{ij} \quad i, j=1,6 \quad (5.8.15)$$

Buradakı λ_i əmsalları deformasiya komponentlərinin hamısı sıfıra bərabər olduğu halda uyğun mexaniki gərginliyin temperatur əmsallarıdır. Onların qarşısındakı mənfi işarəsi cismin deformasiya olunmamış vəziyyətdə saxlamaq üçün sıxıcı gərginliyin tətbiq olunmasının zəruriliyini göstərir. Əgər (5.8.4)-ü (5.8.13)-ün ikincisində yazsaq o aşağıdakı şəkllə düşər:

$$dQ = \theta \lambda_i S_i + [\rho C_p - \theta(\alpha_i \lambda_i)] d\theta \quad i=1, 6 \quad (5.8.16)$$

Deformasiya komponentlərini sıfıra bərabər etsək götürdüyümüz elementin həcmi dəyişməz ona görə də dQ -nin $d\theta$ -yə nisbəti sabit həcmdəki xüsusi istilik tutumu c_v -yə bərabər olar. Onda

$$\frac{dQ}{d\theta} = \rho C_p - \theta \lambda_i \alpha_i = \rho C_v$$

münasibətindən tapırıq

$$\rho(C_p - C_v) = \theta \lambda_i \alpha_i$$

(5.8.16)-da $\theta \lambda_i \alpha_i$ -nin yerində $\rho(C_p - C_v)$ yazsaq o

$$- \theta \lambda_i S_i = \rho C_v d\theta$$

şəklinə düşər. Buradan tapırıq:

$$d\theta = - \frac{\lambda_i \theta S_i}{\rho C_v} \quad (5.8.17)$$

(5.8.16)-nı (5.8.14)-də yazıb qruplaşdırsaq o

$$T_i = \left(C_{ij}^0 + \frac{\lambda_i \lambda_j}{\rho C_v} \right) S_i.$$

şəklinə düşər və bunu (4.7.2) ilə müqayisə etsək alarıq:

$$C_{ij}^\sigma = C_{ij}^0 + \frac{\lambda_i \lambda_j}{\rho C_v} \theta$$

Lakin yuxarıda olduğu kimi bunlar arasındakı fərq nəzərə alınmayacaq dərəcədə kiçik olduğundan bu fərqi nəzərə almamaq olar.

§5.9. Pyezoelektrik kristallar üçün hal tənlikləri

Pyezoelektrik kristallarda mövcud mexaniki gərginliklər və uyğun deformasiyalar, elektrik sahə gərginliyinin komponentləri və uyğun induksiya komponentləri və habelə temperatur və entropiya arasında əlaqə yaradan tənliklərə hal tənlikləri deyəcəyik.

Kristal pyezoelektrik olduqda onun daxili enerjisi mexaniki gərginlik və temperaturdan başqa kristala təsir edən elektrik sahəsinin gərginliyi hesabına da müəyyən artım alır. Ona görə də (5.8.4)-ün sağ tərəfinə $\tilde{\Delta} = (E_n dD_n)(4\pi)^{-1}$ enerji artımını da əlavə etmək lazımdır. Onda daxili enerjinin artımı

$$dU = T_i dS_i + E_n \delta_n + \theta d\sigma \quad (5.9.1)$$

və yaxud

$$dU = T_i dS_i + E_n \frac{dD_n}{4\pi} + \theta d\sigma \quad (5.9.1')$$

düsturu ilə hesablanı bilər. Burada E_n elektrik sahə vektorunun komponentləri, δ_n -lər ($n=1,3$) induksiya vektorunun komponentləridir. E_n və D_n arasında aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$D_n = \varepsilon_{nm} E_m \quad (n, m = \overline{1,3}) \quad (5.9.2)$$

Burada ε_{nm} sabitləri dielektrik nüfuzluğu tenzorudur. (5.9.1)

bərabərliyində $\frac{1}{4\pi}$ vuruğundaq xilas olmaq üçün

$$\delta_n = \frac{D_n}{4\pi}$$

işarə edilir. δ -nın normal komponenti baxılan oblastı hüdudlandırılan istənilən səthin yük sıxlığı σ_0 -a bərabərdir. Hal tənliklərini almaq üçün iki əsas üsuldən istifadə olunur. Birinci halda sərbəst dəyişənlər olaraq mexaniki gərginlik, elektrik sahəsinin

gərginliyinin komponentləri və temperatur götürülür və mexaniki deformasiyalar, elektrik induksiya vektorunun komponentləri bir də entropiya da dəyişənlərin funksiyaları kimi axtarılır. İkinci halda tərsinə, mexaniki deformasiya komponentləri, elektrik induksiya vektorunun komponentləri və habelə entropiya sərbəst dəyişənlər kimi qəbul olunur və mexaniki gərginliklər, elektrik sahəsinin gərginlik vektorunun komponentləri və temperatura bu dəyişənlərin funksiyaları kimi axtarılırlar.

İkinci forma seqnetoelektriklər üçün daha əlverişli hesab olunur.

Haqqında danışdığımız hal tənliklərini çıxarmaq üçün lazım olan əsas termodinamik funksiyalar və uyğun diferensial münasibətlər aşağıdakı cədvəldə göstərilir:

Termodinamik funksiya	Sərbəst dəyişən.	Diferensial münasibətlər
U – daxili enerji	S_i, D_m, σ	$dU = T_i dS_i + E_m \frac{dD_m}{4\pi} + \theta d\sigma$
Sərbəst enerji: $A = U - \sigma\theta$	S_i, D_m, θ	$dA = T_i dS_i + E_m \frac{dD_m}{4\pi} - \sigma d\theta$
Entalpiya: $H = U - S_i T_i - E_m \frac{D_m}{4\pi}$	T_i, E_m, σ	$dH = -S_i dT_i - \frac{dD_m}{4\pi} E_m + \theta d\sigma$
Elastik entalpiya $H_1 = U - S_i T_i$	T_i, D_m, σ	$dH_1 = -S_i dS_i - \frac{dD_m}{4\pi} E_m + \theta d\sigma$
Elektrik entalpiyası $H_2 = U - E_m \frac{D_m}{4\pi}$	S_i, E_m, σ	$dH_2 = T_i dS_i - \frac{D_m}{4\pi} dE_m + \theta d\sigma$
Gibbs funksiyası $G = U - S_i T_i - \frac{E_m D_m}{4\pi} - \sigma\theta$	T_i, E_m, θ	$dG = -S_i dT_i - \frac{D_m}{4\pi} dE_m - \sigma d\theta$
Elastik Gibbs funksiyası $G_1 = U - S_i T_i - \sigma\theta$	T_i, D_m, θ	$dG_1 = -S_i dT_i + E_m \frac{dD_m}{4\pi} - \sigma d\theta$
Gibbsin elektrik funksiyası $G_2 = U - \frac{E_m D_m}{4\pi} - \sigma\theta$	S_i, E_m, θ	$dG = T_2 dS_i - \frac{D_m}{4\pi} dE_m - \sigma d\theta$

Daxili enerjinin artımını ifadə edən (5.9.1) bərabərliyindən görünür ki:

$$T_i = \frac{\partial U}{\partial S_i}; \quad E_m = \frac{\partial U}{\partial \delta_m}; \quad d\theta = \frac{\partial U}{\partial \sigma} \quad (5.9.3)$$

Bunları Makloren sırasına ayırıb ancaq xətti hissəni saxlasaq alarıq:

$$\begin{cases} T_i = \left(\frac{\partial T_i}{\partial S_j} \right)_{D,\sigma} dS_j + \left(\frac{\partial T_i}{\partial \delta_m} \right)_{S,\sigma} d\delta_m + \left(\frac{\partial T_i}{\partial \sigma} \right)_{S,D} d\sigma \\ E_n = \left(\frac{\partial E_n}{\partial S_i} \right)_{D,\sigma} dS_i + \left(\frac{\partial E_n}{\partial \delta_m} \right)_{S,\sigma} d\delta_m + \left(\frac{\partial E_n}{\partial \sigma} \right)_{S,D} d\sigma \\ \theta = \left(\frac{\partial \theta}{\partial S_j} \right)_{D,\sigma} dS_j + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \delta_m} \right)_{S,\sigma} d\delta_m + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right)_{S,D} d\sigma \end{cases} \quad (5.9.4)$$

Xüsusi törəmələrin aşağısındakı indekslər diferensiallama zamanı sabit qalan kəmiyyətləri göstərir. Məsələn, D , σ simvolu elektrik induksiyasının, S – deformasiyanın, σ isə entropiyanın sabit saxlanmasını göstərir.

(5.9.4)-də birinci bərabərliyi ümumiləşmiş Huk qanunu ilə müqayisə etsək görürük ki, T_i gərginliyinin S_i deformasiyasına görə xüsusi törəməsi $c_{ij}^{D,\sigma}$ elastiklik modulundan başqa bir şey deyil. Diferensiallama zamanı elektrik induksiyasının və entropiyanın sabit saxlanmasına diferensiallama şərti deyilir. Mexaniki gərginliyin elektrik induksiyası $\delta = \frac{D}{4\pi}$ -yə görə xüsusi törə-

məsinə pyezoelektrik sabitləri deyilir və onları h_{ij} ilə işarə edirlər. Onlar kristalda elektrik induksiyası mövcud olduğu halda kristalı deformasiya olunmamış halda saxlamaq üçün zəruri olan uyğun mexaniki gərginliyin artmasını göstərir. Kristalın elektrik induksiyasının təsiri ilə genişlənməyə can atması mexaniki gərginliyin əks təsiri sıxılması ilə rastlaşmalıdır. Ona

görə də əmsallara mənfi işarəsi verilir. h_{ij} sabitləri həmişə mexaniki gərginliyin elektrik induksiyasına nisbəti kimi deformatsiyaların sabitliyi şəraitində ölçüldüklərindən onların üzərində ancaq entropiyanın sabitliyini göstərən σ simvolu saxlanır, S simvolunun varlığı isə nəzərdə tutulur.

Nəhayət mexaniki gərginliyin entropiyaya görə xüsusi törəməsini belə yazıb bilirik:

$$\left(\frac{\partial T_i}{\partial \sigma}\right)_{S,D} = \frac{1}{\theta} \left(\frac{\partial T_i}{\partial \sigma}\right)_{S,D} \theta d\sigma = \left(\frac{1}{\theta} \frac{\partial T_i}{\partial \sigma}\right)_{S,D} d\theta = -\gamma_i^{S,D} d\theta \quad (5.9.5)$$

Burada dQ kristala verilmiş temperatur artımıdır.

$$\left(\frac{1}{\theta} \frac{\partial T_i}{\partial \sigma}\right)_{S,D} = \gamma_i^{S,D}$$

kəmiyyəti kristala əlavə dQ temperaturu verildikdə onun genişlənməsi üçün zəruri olan mənfi işarəli mexaniki (sıxıcı) gərginliyin miqdarını göstərir.

γ_i üzərində S və D simvolları deformatsiyanın yoxluğunu və induksiyanın sabit saxlanmasını göstərir.

İndi (5.9.4) tənliklərindən birinci altısını belə yazıb bilirik:

$$T_j = c_{ij}^{D,\sigma} S_i - h_{jn}^{\sigma} \delta_n - \gamma_j^{S,D} dQ \quad (5.9.6)$$

Növbəti üç tənliyi münasib şəkllə salmaq üçün dU -nün tam diferensial olması faktından istifadə edirik. Bu halda

$$\frac{\partial T_j}{\partial \delta_n} = \frac{\partial E_n}{\partial S_j}; \quad \frac{\partial T_j}{\partial \sigma} = \frac{\partial \theta}{\partial S_j}; \quad \frac{\partial E_n}{\partial \sigma} = \frac{\partial \theta}{\partial \delta_n} \quad (5.9.7)$$

olur. Bunları (5.9.6) bərabərliyinin ikincisində nəzərə alsaq o, aşağıdakı şəkllə düşər:

$$E_m = \left(\frac{\partial T_j}{\partial \delta_m} \right)_{D,\sigma} dS_j + \left(\frac{\partial E_n}{\partial \delta_m} \right)_{S,\sigma} d\delta_m + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \delta_m} \right)_{S,D} d\sigma \quad (5.9.8)$$

Burada

$$\left(\frac{\partial T_j}{\partial \delta_m} \right)_{D,\sigma} = -h_{mj}^{D,\sigma}; \quad \left(\frac{\partial E_n}{\partial \delta_m} \right)_{S,\sigma} = 4\pi\beta_{nm}^{S,\sigma} \quad (5.9.9)$$

Belə ki, $\beta_{nm}^{S,\sigma}$ -lər dielektrik qeyri-nüfuzluluq tenzorunun komponentləridir və (5.9.2)-yə əsasən belə təyin olunurlar:

$$\beta_{nm} = \frac{(-1)^{m+n} \Delta^{m+n}}{\Delta} \quad (5.9.10)$$

Harada ki

$$\Delta = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{vmatrix} \quad (5.9.11)$$

Dielektrik nüfuzluğu tenzoru Δ^{m+n} isə Δ - determinantının m-ci sətirini və n-ci sütununu sildiklə alınan minordur.

Elektrik gərginliyinin entropiyaya görə xüsusi törəməsini belə yazı bilərik:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial E_m}{\partial \sigma} \right)_{S,D} d\sigma &= \left(\frac{1}{\theta} \frac{\partial E_m}{\partial \sigma} \right) \theta d\sigma = \\ &= \left(\frac{1}{\theta} \frac{\partial E_m}{\partial \sigma} \right)_{S,D} dQ = -q_m^{S,D} dQ \end{aligned} \quad (5.9.12)$$

Burada $q_m^{S,D}$ piroelektrik sabiti adlanır və kristala dQ qədər istilik miqdarı verdikdə onun səthində sıfır yükü saxlamaq üçün zəruri olan elektrik sahəsinin gərginlik ölçüsünü göstərir. Bu zaman lazım olan gərginliyin işarəsi səthdə olacaq yükün işarəsinin əksinə olmalı olduğundan $q_m^{S,D}$ -yə mənfi işarəsi verilir.

Nəhayət sonuncu xüsusi törəmə

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial\sigma}\right)_{S,D} d\sigma = \frac{1}{\theta} \left(\frac{\partial\theta}{\partial\sigma}\right) \theta d\sigma = \frac{1}{\theta} \left(\frac{\partial\theta}{\partial\sigma}\right)_{S,D} dQ = \frac{dQ}{\rho C_v^D} \quad (5.9.13)$$

kristalda mexaniki deformasiya və elektrik induksiya sabit saxlandıqda istilik miqdarının dQ qədər artımında temperaturun artma sürətini xarakterizə edir. Ona görə də o həcmdə elektrik induksiyanın sabitliyi şəraitində xüsusi istilik tutumu ilə maddə sıxlığı hasilinin tərs qiymətinə, yəni $(\rho C_v^D)^{-1}$ kəmiyyətinə bərabər olmalıdır. Beləliklə, indi (5.9.4)-ü belə yazmağa bilərik:

$$\begin{aligned} T_i &= c_{ij}^{D,\sigma} S_j - h_{im}^\sigma \delta_m - \gamma_i^{S,D} dQ \\ E_m &= h_{mj} S_j + 4\pi\beta_{mn}^{S,\sigma} \delta_n - q_m^{S,D} dQ \\ d\theta &= \theta [\gamma_j S_j] - \theta q_m^{S,D} \delta_m = \frac{dQ}{\rho C_v^D} \\ m, n &= \overline{1,3}; i, j = \overline{1,6} \end{aligned} \quad (5.9.14)$$

Adətən sürətlə rəqs edən kristallarda rəqs zamanı qonşu elementlərlə istilik mübadiləsi olmur. Onda $dQ=0$ götürmək olar. Yəni proses adiabatik olduqda (5.9.14) bərabərlikləri aşağıdakı şəkllə düşürlər:

$$\begin{aligned} T_i &= c_{ij}^{D,\sigma} S_j - h_{im}^\sigma \delta_m - \\ E_m &= h_{mj} S_j + 4\pi\beta_{mn}^{S,\sigma} \delta_n \end{aligned} \quad (5.9.15)$$

$dQ=\theta d\sigma = 0$ olduqda sonuncu tənlik $0\equiv 0$ şəklində eyniliyə çevrilir. Deməli, (5.9.15) tənliklərini almaq üçün əvvəlcədən (5.9.1)-də $\theta=0$ götürmək olardı.

Hal tənliklərinin ikinci yazılış formasını almaq üçün mexaniki gərginlikləri, elektrik sahəsinin gərginliyini və temperaturu sərbəst dəyişənlər kimi qəbul edirik. Onda

$$\begin{aligned} S_i &= f_i(T_{i,j}, E_m, \theta) & \delta_m &= f_m(T_{i,j}, E_m, \theta) \\ \sigma &= f(T_{i,j}, E_m, \theta) \end{aligned} \quad (5.9.16)$$

olar. Belə olduqda hal tənliklərini almaq üçün aşağıdakı kimi təyin olunan tam Qibbs funksiyasından istifadə olunur:

$$G = U - S_i T_i - E_m \delta_m \quad (5.9.17)$$

Buradan

$$dG = dU - S_i dT_i - T_i dS_i - \delta_m dE_m - \sigma d\theta \quad (5.9.18)$$

lakin $dU = T_i dS_i$ olduğundan yazı bilərik:

$$dG = -S_i dT_i - \delta_m dE_m - \sigma d\theta \quad (5.9.19)$$

Buradan isə aşkardır ki,

$$S_i = -\frac{\partial G}{\partial T_i} \quad \delta_m = -\frac{\partial G}{\partial E_m} \quad \sigma = -\frac{\partial G}{\partial \theta}$$

Əvvəllərdə olduğu kimi bunları sıraya ayırıb, onun xətti hissəsini saxlasaq alırıq:

$$\begin{aligned} S_i &= \left(\frac{\partial S_i}{\partial T_i} \right)_{E, \theta} dT_i + \left(\frac{\partial S_i}{\partial E_m} \right)_{\theta} dE_m + \left(\frac{\partial S_i}{\partial \theta} \right)_{E} d\theta \\ \delta_m &= \left(\frac{\partial \delta_m}{\partial T_j} \right)_{\theta} dT_j + \left(\frac{\partial \delta_m}{\partial E_n} \right)_{\theta} dE_n + \left(\frac{\partial \delta_m}{\partial \theta} \right)_{T} d\theta \\ \sigma &= \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T_j} \right)_{E} dT_j + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial E_n} \right)_{T} dE_n + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right)_{E} d\theta \end{aligned} \quad (5.9.20)$$

Buna belə də yazı bilərik:

$$\begin{aligned}
S_i &= \left(-\frac{\partial^2 G}{\partial T_i \partial T_j} \right)_{E,\theta} dT_i + \left(-\frac{\partial^2 G}{\partial T_i \partial E_m} \right)_{\theta} dE_m + \left(-\frac{\partial^2 G}{\partial \theta \partial T_i} \right)_{E} d\theta \\
\delta_m &= \left(-\frac{\partial^2 G}{\partial T_j \partial E_m} \right)_{\theta} dT_j + \left(-\frac{\partial^2 G}{\partial E_n \partial E_m} \right)_{\theta} dE_n + \left(-\frac{\partial^2 G}{\partial \theta \partial E_n} \right)_{T} d\theta \quad (5.9.21) \\
\sigma &= \left(-\frac{\partial^2 G}{\partial \theta \partial T_j} \right)_{E} dT_j + \left(-\frac{\partial^2 G}{\partial E_m \partial E_n} \right)_{T} dE_n + \left(-\frac{\partial^2 G}{\partial \theta \partial E_m} \right)_{E} d\theta
\end{aligned}$$

Burada aşağıdakı işarələri daxil etsək

$$\begin{aligned}
S_{ij}^{E,\theta} &= \left(-\frac{\partial^2 G}{\partial T_j \partial T_i} \right)_{E,\theta} & \delta_{mn}^{\theta} &= \left(-\frac{\partial^2 G}{\partial T_i \partial E_m} \right)_{\theta} \\
\alpha_i^E &= \left(-\frac{\partial^2 G}{\partial E_m \partial \theta} \right)_{E} & P_m^{\theta} &= \left(-\frac{\partial^2 G}{\partial \theta \partial E_m} \right)_{E,\theta}
\end{aligned} \quad (5.9.22)$$

(5.9.20)-ni belə yazıb bilərik:

$$\begin{aligned}
S_i &= s_{ij}^{E,\theta} T_j + d_{mi}^{\theta} E_n + \alpha_i^E d\theta \\
d\theta &= \theta [\alpha_i^E T_i + P_m^T E_m] + \rho C_p^E d\theta \quad (5.9.23) \\
\delta_m &= d_{mj}^{\theta} T_j + \frac{1}{4\pi} \varepsilon_{mn} E_n + P_m^T d\theta
\end{aligned}$$

Burada E, θ , T indeksləri ölçmələr zamanı uyğun olaraq elektrik sahə gərginliyinin, temperaturun və mexaniki gərginliklərin sabit saxlanmasını göstərir. s_{ij} – elastiklik sabitləri, d_{mn} – pyzoelektrik sabitləri izotermik şəraitdə ölçülür, α_i^E - sabitləri istidən genişlənmə əmsalları olmaqla elektrik sahə gərginliyinin sabitliyi şəraitində ölçülür. P^T - pyzoelektrik sabitidir və sabit mexaniki gərginlik şəraitində ölçülür. O $\delta = \frac{D}{4\pi}$ elektrik induksiyasının temperatur artımı dQ-ya nisbətini xarakterizə edir. Mexaniki gərginlik sabit saxlandıqda P^T

sabiti təkcə sabit həcmdə ölçülən həqiqi piroelektrik effektini deyil, həm də kristalın temperaturdan genişlənməsi hesabına yaranan polyarlaşmadan ibarət olan və «yalançı» adlanan birinci piroelektrik effektini də nəzərə alır. c_p^E sabit təzyiqlik və sabit elektrik sahəsi şəraitində xüsusi istilik tutumudur.

Adiabatik proses üçün ($dQ=0$) (5.9.20) münasibətləri aşağıdakı şəkllə düşürlər:

$$\begin{aligned} S_i &= s_{ij}^{E,\theta} T_j + d_m^{\theta} E_n \\ \delta_m &= d_{mj}^{\sigma} T_j + \frac{1}{4\pi} \varepsilon_{mn}^T E_m \end{aligned} \quad (5.9.24)$$

İzotermik və adiabatik sabitlər arasında aşağıdakı əlaqələr mövcuddur:

$$\begin{aligned} s_{ij}^{E,\sigma} &= s_{ij}^{E,\theta} - \frac{\alpha_i^E \alpha_j^E \theta}{\rho C_\rho^E} & d_{im}^{\theta} &= d_{im}^{\theta} - \frac{\alpha_i P_m^T \theta}{\rho C_\rho^E} \\ \frac{\varepsilon_{mn}^{T,\sigma}}{4\pi} &= \frac{\varepsilon_{mn}^{T,\theta}}{4\pi} - \frac{P_m^T P_n^T \theta}{\rho C_\rho^E} \end{aligned} \quad (5.9.25)$$

İzotermik prosesdə $d\theta=\theta d\sigma=0$, yəni $\theta=0$ olduğundan izotermik və adiabatik pyezoelektrik və dielektrik sabitləri eyniləşirlər. Lakin kristal piroelektrik xassəsinə malik olduqda bu sabitlərin qiymətləri fərqli olurlar, amma yuxarıda göstərdiyimiz kimi elastiklik sabitlərinin fərqi kiçik olur. Ona görə də belə hallarda (5.9.20) tənliklərindən istifadəyə üstünlük verilir.

Bəzən hal tənliklərinin iki başqa formalı yazılışlarından da istifadə olunur və onları almaq üçün cədvəldə göstərilən termodinamik potensial olan entalpiyadan, yəni

$$H = U - S_i T_i - E_m \delta_m \quad (5.9.26)$$

funksiyasından istifadə olunur. Xüsusi halda adiabatik proses üçün elastik entalpiya

$$H_1 = U - S_i T_i \quad (5.9.27)$$

((5.9.27)-də sahə gərginliyi və induksiya iştirak etmələri) funksiyasını istifadə etdikdə hal tənliklərinin aşağıdakı forması

$$\begin{aligned} T_i &= c_{ij}^E S_j - e_{mj} E_m \\ \delta_n &= e_{ni} S_i + \frac{1}{4\pi} \varepsilon_{nm}^2 E_m \end{aligned} \quad (5.9.28)$$

elektrik entalpiyasından

$$H_2 = U - E_m \delta_m \quad (5.9.29)$$

istifadə etdikdə isə

$$\begin{aligned} S_i &= s_{ij}^D T_j - g_{ni} \delta_n \\ E_m &= 4\pi \beta_{nm} T \delta_n - g_{mj} T_j \end{aligned} \quad (5.9.30)$$

formasını alır. (5.9.28) və (5.9.30) tənliklərinin alınma prosesi birinci iki yazılış formasının alınma prosesi ilə analogiya təşkil edir.

Bu tənliklər göstərir ki, onlara daxil olan d , e , g , h pyezo- elektrik sabitləri müəyyən qohumluq əlaqələrində olmalarına baxmayaraq onların hər biri pyezoelektrik effektinin başqa-başqa cəhətlərini xarakterizə edirlər, həm də müxtəlif şəraitlərdə istifadə olunurlar. Bu sabitlərin fiziki funksiyaları belədir: d – sərbəst kristalda (mexaniki təsirə məruz qalmamış kristalda) verilmiş elektrik sahəsinin təsiri ilə əmələ gələn deformasiyanı təyin edir, e – pyezoelektrik sabiti sıxılmış kristalda verilmiş elektrik sahəsində əmələ gələn mexaniki gərginliyi göstərir. g – açıq elektrik dövrəsində verilmiş mexaniki gərginlik şəraitində elektrik gərginliyini göstərir və nəhayət h – sabiti açıq elektrik dövrəsində verilmiş mexaniki deformasiyalar şəraitində elektrik gərginliyini ifadə edir. Onuncu paragrafda bu sabitlər arasında aşağıdakı əlaqələrin doğruluğunu göstərəcəyik:

$$\begin{aligned}
d_{nj} &= \frac{1}{4\pi} \varepsilon_{mn}^T g_{mj} = e_{ni} s_{ij}^E \\
e_{nj} &= \frac{1}{4\pi} \varepsilon_{mn}^S h_{mj} = d_{ni} c_{ij}^E \quad (5.9.31) \\
g_{nj} &= 4\pi \beta_{mn}^T d_{mj} = h_{ni} s_{ij}^D \\
h_{nj} &= 4\pi \beta_{mn}^S e_{mj} = g_{nj} c_{ij}^D
\end{aligned}$$

Qeyd: (5.9.24) və (5.9.28) münasibətlərində ikinci bərabərlikləri 4π -yə vurub uyğun olaraq aşağıdakı kimi də yazıla bilər.

$$\begin{aligned}
S_i &= s_{ij}^0 T_j + d_{ni} E_n \quad (5.9.32) \quad \text{və} \quad T_i = c_{ij}^E S_j - e_{mj} E_m \quad (5.9.33) \\
D_m &= d_{mi} T_i + \varepsilon_{mn}^T E_m \quad D_m = e_{mi} S_i + \varepsilon_{mn}^S E_n
\end{aligned}$$

§5.10. Tənliklərin tenzor metodu ilə yazılışı və elektrik, pyezoelektrik və dielektrik sabitləri arasında bəzi əlaqələrin tapılması

Tenzorlardan istifadə etmək hidro və aerodinamika, termodinamika və elastiklik nəzəriyyələrinin riyazi aparatlarının daha mükəmməl, ümumi və eyni zamanda yığcam ifadə olunmasına və habelə bir sıra pyezoelektrik sabitləri arasında bəzi əlaqələrin tapılmasına və onların daha yığcam ifadə olunmasına imkan yaradır.

Mexaniki gərginlik komponentlərinə baxaq.

$$\left\| \begin{matrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{matrix} \right\| \quad (5.10.1)$$

Göstərək ki, bura daxil olan 9 kəmiyyətin toplusu simmetrik tenzor təşkil edir. Doğurdan da, Lyav [49] tərəfindən

isbat olunmuşdur ki, x, y, z koordinat sistemində verilmiş gərginlik komponentləri birinci sistemlə eyni başlanğıca malik olan yeni x', y', z' dekart koordinat sistemində keçidə aşağıdakı qanunla çevrilirlər:

$$\begin{aligned} T'_{xx} &= \ell_1^2 T_{xx} + m_1^2 T_{yy} + n_1^2 T_{zz} + 2\ell_1 m_1 T_{xy} + 2\ell_1 n_1 T_{xz} + 2m_1 n_1 T_{yz} \\ T'_{xy} &= \ell_1 \ell_2 T_{xx} + m_1 m_2 T_{yy} + n_1 n_2 T_{zz} + \\ &+ (\ell_1 m_2 + m_1 \ell_2) T_{xy} + (\ell_1 n_2 + n_1 \ell_2) T_{xz} + (m_1 n_2 + n_1 m_2) T_{yz} \\ &\dots\dots\dots (5.10.2) \end{aligned}$$

(3.1.2)-ni (5.10.2)-də yazsaq alarıq:

$$\begin{aligned} T'_{11} &= \left(\frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \right)^2 T_{11} + \frac{\partial x'_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} T_{12} + \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} T_{13} + \\ &+ \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} T_{21} + \left(\frac{\partial x'_1}{\partial x_2} \right)^2 T_{22} + \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} T_{23} + \\ &+ \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x'_1}{\partial x} T_{31} + \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} T_{32} - \\ &- \left(\frac{\partial x'_1}{\partial x_3} \right)^2 T_{33} = \frac{\partial x'_1}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x'_1}{\partial x_\ell} T_{k\ell} \end{aligned} \quad (5.10.3)$$

Analoji olaraq:

$$\begin{aligned} T'_{12} &= \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} T_{11} + \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} T_{12} + \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x'_2}{\partial x_3} T_{13} + \\ &+ \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x'_2}{\partial x} T_{21} + \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} T_{22} + \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x'_2}{\partial x_3} T_{23} + \\ &\dots\dots\dots (5.10.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial x'_3}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x'_2}{\partial x_3} T_{31} + \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} T_{32} + \\
& + \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x'_2}{\partial x_3} T_{33} = \frac{\partial x'_1}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x'_2}{\partial x_\ell} T_{k\ell} \quad k, \ell = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

.....
 Bu 6 münasibəti ümumiləşdirib yığcam bir münasibət şəklində belə yaşa bilərik:

$$T_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x'_j}{\partial x_\ell} T_{k\ell} = c_{ijk\ell} T_{k\ell} \quad (5.10.5)$$

(5.10.5) münasibəti istənilən gərginlik komponenti üçün doğru olmaqla həm də ikinci tərtib tenzordur. Çünki k və ℓ inlekləri iki dəfə təkrarlandığından sağ tərəfdəki altıncı tərtib tenzorun tərtibi həmin indekslər hesabına dörd vahid azalaraq nəticədə ikinci tərtib tenzora çevrilir. Beləliklə, göstərmiş olduq ki, gərginlik tenzorunun komponentləri ikinci tərtib tenzoru təyin edən şərtləri ödəyirlər.

Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, deformasiya komponentlərini aşağıdakı kimi təyin etsək

$$\begin{aligned}
S_{xx} = S_{11} &= \frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad S_{yy} = S_{22} = \frac{\partial \eta}{\partial y}; \quad S_{zz} = S_{33} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} \\
S_{xy} = S_{21} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \quad S_{xz} = S_{13} = S_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \\
S_{yz} = S_{23} = S_{31} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)
\end{aligned} \quad (5.10.6)$$

Bu 9 elementin toplusu da ikinci tərtib tenzor təşkil edirlər.

$$\left\| \begin{array}{ccc} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{array} \right\| \quad (5.10.7)$$

Bunun doğruluğuna Lyav düsturunda, yəni

$$\begin{aligned} S'_{xx} &= \ell_1^2 S_{xx} + m_1^2 S_{yy} + n_1^2 S_{zz} + 2\ell_1 m_1 S_{xy} + 2\ell_1 n_1 S_{xz} + 2m_1 n_1 S_{yz} \\ S'_{yy} &= \ell_1 \ell_2 S_{xx} + 2m_1 m_2 S_{yy} + 2n_1 n_2 S_{zz} + (\ell_1 m_2 + \ell_2 m_1) S_{xy} + \\ &+ (\ell_1 m_2 + \ell_2 m_1) S_{xz} + (n_1 m_2 + n_2 m_1) S_{yz} \end{aligned} \quad (5.10.8)$$

.....
düsturunda (5.10.6) ifadələrini yazmaqla inanmaq olar.

Doğurdan da (5.10.7)-ni aşağıdakı kimi yazıb (3.1.2)-yə əsasən, alırıq:

$$\begin{aligned} S'_{xx} &= S'_{11} = \left(\frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \right)^2 S_{11} + \left(\frac{\partial x'_1}{\partial x_2} \right)^2 S_{22} + \left(\frac{\partial x'_1}{\partial x_3} \right)^2 S_{33} + \\ &+ \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} S_{12} + \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} S_{13} + \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} S_{23} \\ 2S'_{xy} &= 2 \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} S_{11} + 2 \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} S_{12} + 2 \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x'_2}{\partial x_3} S_{13} + \\ &+ 2 \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} S_{21} + 2 \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} S_{22} + 2 \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x'_2}{\partial x_3} S_{23} + \\ &+ 2 \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} S_{31} + 2 \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x'_2}{\partial x_3} S_{32} + 2 \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} S_{33} \end{aligned}$$

Beləliklə, ümumiləşdirib yazıb bilərik:

$$S'_{ij} = 2 \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x'_j}{\partial x_\ell} S_{k\ell} = d_{ijk\ell} S_{k\ell} \quad (5.10.9)$$

Deməli, S_{ij} ($i, j = \overline{1,3}$) deformasiya komponentləri tenzor təşkil edirlər, həm də

$$S_{ij} = S_{ji}$$

olduğundan onlar simmetrik tenzor təşkil edirlər. İndekslərin necə işrə olunmasının fərqi olmadığından

$$d_{ijk\ell} S_{k\ell} = d_{ij\ell q} S_{\ell q} \quad (t, q = \overline{1,3})$$

yaza bilərik. Onda

$$T'_{ij} = c_{ijk\ell} T_{k\ell} \quad (5.10.5)$$

İfadəsində $T_{k\ell}$ -in yerində $T'_{ij} = C_{ij\ell q} S_{\ell q}$ yazsaq alarıq.

$$T'_{ij} = c_{ijk\ell} d_{ij\ell q} S_{\ell q} \quad (5.10.10)$$

Bu bərabərliyin sağ tərəfində on tərtibli tenzor dayanıb, lakin onu i və j indekslərinə görə büksək onun tərtibi dörd vahid azalar. Onda (5.10.10)-i belə yaza bilərik:

$$T'_{\ell q} = P_{k\ell q} S_{\ell q}.$$

Bu işə Huk qanununun tenzor vasitəsi ilə yazılışdır bundan sonra (4.7.2) bərabərliyi ilə ifadə olunmuş ümumiləşmiş Huk qanununu tenzorla belə ifadə edəcəyik:

$$T_{ij} = C_{ijk\ell} S_{k\ell} \quad (5.10.11)$$

Burada elastiklik modulları dördüncü tərtib $c_{ijk\ell}$ tenzoru ilə ifadə olunur. Onu ikinci tərtib $S_{k\ell}$ tenzoruna vurduqda altıncı tərtib tenzor alınır. Lakin k və ℓ təkrarlanan indekslərinə görə iki dəfə bükülmə əməli yerinə yetirilməlidir və hər dəfə sağdakı altı tərtibli tenzorun tərtibi iki vahid azalır və nəticədə iki-tərtibli tenzor alınır. $C_{ijk\ell}$ dördtərtibli tenzorun ümumi halda 81 komponenti var, lakin T_{ij} və $S_{k\ell}$ tenzorları simmetrik olduqlarından sərbəst elastiklik modullarının sayını azaldan müəyyən sayda eyniliklər mövcuddur. Bu eynilikləri almaq üçün (5.10.10) tənliklərini açıq şəkildə yazıb əmsalları (5.7.2) bəra-

bərləklərinin uyğun əmsalları ilə müqayisə etmək lazımdır. Doğurdan da.

$$\begin{aligned}
 T_{11} &= C_{1111}S_{11} + C_{1112}S_{12} + C_{1113}S_{13} + C_{112}S_{21} + \\
 &+ C_{1122}S_{22} + C_{1123}S_{23} + C_{113}S_{31} + C_{1132}S_{32} + C_{1133}S_{33} \\
 T_{12} &= C_{121}S_{11} + C_{1212}S_{12} + C_{1213}S_{13} + C_{122}S_{21} + \\
 &+ C_{1222}S_{22} + C_{1223}S_{23} + C_{123}S_{31} + C_{1232}S_{32} + C_{1233}S_{33}
 \end{aligned} \quad (5.10.12)$$

Bu bərabərlikləri (4.7.2) bərabərlikləri ilə müqayisə etsək və $S_{12} = S_{21} = \frac{1}{2}S_{xy}$, $S_{13} = S_{31} = \frac{1}{2}S_{zx}$, $S_{32} = S_{23} = \frac{1}{2}S_{yz}$ olduğunu nəzərə alsaq aşağıdakıların doğruluğu nəticəsinə gəlirik:

$$\begin{aligned}
 C_{1111} &= c_{11}; C_{1121} = C_{1121} = c_{16}; C_{1133} = c_{13}; C_{1113} = C_{1131} = c_{15}; \\
 C_{1122} &= c_{12}; C_{1123} = C_{1132} = c_{14}; C_{1212} = C_{2121} = C_{2112} = C_{2121} = c_{66}; \\
 C_{1213} &= C_{1232} = C_{2113} = C_{3121} = C_{3112} = C_{1321} = C_{1312} = c_{56}; \\
 C_{1133} &= C_{3311} = c_{13}; C_{1123} = C_{1132} = C_{2311} = C_{3211} = c_{14}; \\
 C_{1113} &= C_{1131} = C_{3111} = C_{1311} = c_{15}; C_{1211} = C_{1112} = C_{2111} = C_{1121} = c_{16}; \\
 C_{2222} &= c_{22}; C_{2233} = C_{3322} = c_{23}; C_{2223} = C_{2232} = C_{3222} = C_{2332} = c_{24}; \\
 C_{2213} &= C_{2231} = C_{3122} = c_{25}; C_{2212} = C_{2221} = C_{2122} = c_{26}; C_{3333} = c_{33}; \\
 C_{3323} &= C_{3332} = C_{2333} = C_{3233} = c_{34}; C_{3313} = C_{3331} = C_{3133} = C_{1333} = c_{35}; \\
 C_{3312} &= C_{3321} = C_{2133} = C_{1233} = c_{36}; C_{2323} = C_{3232} = C_{3223} = c_{44} \\
 C_{2313} &= C_{2331} = C_{3213} = C_{3231} = C_{1323} = C_{3132} = C_{1323} = C_{1323} = c_{45} \quad (5.10.13) \\
 C_{1313} &= C_{1331} = C_{3131} = c_{55}; C_{2312} = C_{3212} = C_{2321} = C_{1232} = C_{2132} = c_{46}; \\
 C_{1312} &= C_{1321} = C_{3112} = C_{3121} = C_{1213} = C_{2131} = C_{2113} = C_{2131} = c_{56} \\
 C_{1212} &= C_{1221} = C_{2112} = C_{2121} = c_{66}
 \end{aligned}$$

Bunların nəticəsində 81 elastiklik modullarının sayı azalıb, ancaq 21-i qalır. c_{ijkl} tenzorial elastiklik modulları adi c_{ij} elas-

tiklik modullarından indekslərin aşağıdakı qanunla əvəz edilməsi ilə alınır.

$$\begin{aligned} 1 &\Rightarrow 11 & 2 &\Rightarrow 22 & 3 &\Rightarrow 33 \\ 4 &\Rightarrow 23 & 5 &\Rightarrow 13 & 6 &\Rightarrow 12 \end{aligned}$$

Burada həm də müxtəlif rəqəmli indekslərin müxtəlif rəqəmlərinin bütün mümkün yerdəyişmələri də yerinə yetirilməlidir. (5.7.6) tənliklərini də tenzor metodu ilə belə yazıb

$$S_{ij} = S_{ijk\ell} T_{k\ell} \quad (5.10.14)$$

Huk qanununda olduğu kimi bu tənlikləri və açıq yazıb (4.7.6)-nın əmsalları ilə müqayisə etsək alarıq:

$$\begin{aligned} S_{1111} &= S_{11}; \quad S_{1122} = S_{2211} = S_{12}; \quad S_{1133} = S_{3311} = S_{13} = S_{33} = S_{11}; \\ S_{1123} &= S_{1132} = S_{2311} = S_{3211} = \frac{1}{2} S_{14}; \quad S_{1113} = S_{1311} = S_{3111} = \frac{5}{2} S_{15}; \\ S_{1112} &= S_{1121} = S_{1211} = \frac{1}{2} S_{16}; \quad S_{2222} = S_{22}; \quad S_{2233} = S_{3322} = S_{23}; \\ S_{2223} &= S_{2232} = S_{2322} = S_{3222} = \frac{1}{2} S_{24}; \quad S_{2213} = S_{2231} = S_{3122} = \frac{1}{2} S_{25}; \\ S_{2212} &= S_{1222} = S_{2122} = \frac{1}{2} S_{26}; \quad S_{3333} = S_{33}; \\ S_{3323} &= S_{3332} = S_{3233} = S_{2333} = \frac{1}{2} S_{34}; \quad S_{3313} = S_{1333} = S_{3133} = \frac{1}{2} S_{35}; \\ S_{3312} &= S_{3321} = S_{1233} = S_{2133} = \frac{1}{2} S_{36}; \quad S_{2333} = S_{3323} = S_{3332} = \frac{1}{2} S_{44}; \\ S_{2313} &= S_{3213} = S_{1332} = S_{3132} = S_{1323} = S_{2331} = S_{2213} = S_{3231} = \frac{1}{4} S_{45}; \\ S_{2312} &= S_{3212} = S_{2321} = S_{3221} = S_{1223} = S_{3123} = S_{1232} = S_{2132} = \frac{1}{4} S_{46}; \\ S_{1313} &= S_{1331} = S_{3131} = \frac{1}{4} S_{54}; \end{aligned}$$

$$s_{1312} = s_{1321} = s_{3112} = s_{1223} = s_{1213} = s_{2113} = s_{2131} = s_{2131} = \frac{5}{4} s_{56}$$

$$s_{1212} = s_{1221} = s_{2112} = s_{2121} = \frac{1}{4} s_{46} \quad (5.10.15)$$

Burada da tenzorial elastiklik sabitləri s_{ijkl} -lərdən s_{ij} elastiklik sabitlərini almaq üçün indekslərdə aşağıdakı əvəzetmələri yerinə yetirmək

$$1 \Rightarrow 11 \quad 2 \Rightarrow 22 \quad 3 \Rightarrow 33$$

$$4 \Rightarrow 24 \quad 5 \Rightarrow 13 \quad 6 \Rightarrow 12$$

və mümkün yerdəyişmələri etmək lazımdır.

Lakin istənilən 4, 5, yaxud 6 indeksləri üçün elastiklik sabitləri s_{ij} -ni yarı bölmək, əgər 4, 5, 6 indeksli sabit iki dəfə rast gəlinə, onda uyğun elastiklik sabitləri 4-ə bölmək lazımdır.

İndi (5.8.14) tənliklərinə qayıdaq. Onları tenzorlar vasitəsi ilə belə yazmaq olar:

$$S_{ij} = s_{ijkl}^0 T_{kl} + \alpha_{ij} d\theta \quad (5.10.16)$$

Burada α_{ij} ($i, j = \overline{1,3}$) yenə də istidən genişlənmə əmsallarıdır. α_{ij} ikinci tərtib tenzordur. Onlar adi istidən genişlənmə əmsalları ilə aşağıdakı kimi əlaqələndirilir:

$$\alpha_{11} = \alpha_1, \alpha_{22} = \alpha_2, \alpha_{33} = \alpha_3, 2\alpha_{13} = \alpha_5, 2\alpha_{12} = \alpha_6, 2\alpha_{23} = \alpha_4.$$

(5.8.14) tənliklərinin sonuncusunu tenzorlarla yazdıqda o aşağıdakı şəkllə düşür

$$dQ = \alpha_{kl} T_{kl} \theta + \rho C_p d\theta \quad (5.10.17)$$

adiabatik prosesdə $dQ = 0$ olar və buradan alırıq:

$$d\theta = -\frac{\alpha_{kl} T_{kl}}{\rho C_p} \quad (5.10.18)$$

(5.10.17)-ni (5.10.16)-da yazaq. Onda

$$S_{ij} = s_{ijk\ell}^{\theta} T_{k\ell} - \frac{\alpha_{ij}\alpha_{k\ell} d\theta}{\rho C_{\rho}} T_k = \left(s_{ijk\ell}^{\theta} T_{k\ell} - \frac{\alpha_{ij}\alpha_{k\ell}}{\rho C_{\rho}} \theta \right) T_k \quad (5.10.19)$$

Bunu isə $S_{ij} = s_{ijk\ell}^{\sigma} T_{k\ell}$ münasibəti ilə müqayisə etsək adiabatik sabitlər arasında aşağıdakı münasibəti alarıq:

$$s_{ijk\ell}^{\sigma} = s_{ijk\ell}^{\theta} T_{k\ell} - \frac{\alpha_{ij}\alpha_{k\ell}}{\rho C_{\rho}} \theta \quad (5.10.20)$$

İndi isə elastiklik tənliyi

$$S_{ij} = s_{ijk\ell}^E T_{k\ell} + d_{mij} E \quad (5.10.21)$$

ilə pyezoelektrik effekti tənliyi olan

$$\delta_m = \frac{\varepsilon_{mn}}{4\pi} E_n + d_{mk\ell} T_{k\ell} \quad (5.10.22)$$

tənliklərinə birgə baxaq (biz onları birbaşa tenzorial yazılışda təqdim edirik).

Burada d_{mij} üçtərtib ε_{mn}^T isə ikitərtibli tenzorlardır. Tenzorial dielektrik sabitləri d_{mij} -lər adi dielektrik sabitləri ilə belə əlaqəlidirlər:

$$\begin{aligned} d_{111} &= d_{11}; & d_{122} &= d_{12}; & d_{133} &= d_{13}; & d_{123} &= d_{132} = \frac{1}{2} d_{14}; \\ d_{113} &= d_{131} = \frac{1}{2} d_{15}; & d_{112} &= d_{121} = \frac{1}{2} d_{16}; & d_{211} &= d_{21}; & d_{222} &= d_{22}; \\ d_{333} &= d_{33}; & d_{223} &= d_{232} = \frac{1}{2} d_{24}; & d_{213} &= d_{231} = \frac{1}{2} d_{25}; \\ d_{212} &= d_{221} = \frac{1}{2} d_{26}; & d_{311} &= d_{31}; & d_{322} &= d_{32}; & d_{233} &= d_{23}; \\ d_{323} &= d_{332} = \frac{1}{2} d_{34}; & d_{313} &= d_{331} = \frac{1}{2} d_{35}; & d_{312} &= d_{321} = \frac{1}{2} d_{36} \end{aligned} \quad (5.10.23)$$

(5.10.20) və (5.10.22) tənlikləri pyezoeffekt tənliklərini başqa cür yazmağa imkan verir. Yəni (5.10.20) tənliyi mexaniki gərginliklə deformasiya və elektrik sahə gərginliyi ara-

sında əlaqə yaradırsa, indi yazdığımız tənlik mexaniki gərginlik və deformasiyalar ilə elektrik induksiyası arasında əlaqə yaradır. Bu yeni formanı almaq üçün (5.10.22) tənliyinin hər tərəfini $4\pi\beta_{mn}^T$ tenzoruna vuraq. Onda:

$$4\pi\beta_{mn}^T \delta_n = \varepsilon_{mn}^T \beta_{mn}^T E_m + 4\pi d_{nkl} \beta_{mn}^T T_{kl} \quad (5.20.24)$$

Belə ki, sərbəst kristalın dielektrik qeyri-nüfuzluluğu tenzoru β_{mn}^T dielektrik nüfuzluluğu tenzoru ε_{mn}^T ilə belə əlaqəlidir:

$$\beta_{mn}^T = \frac{(-1)^{m+n} \Delta^{\varepsilon.T}}{\Delta^{\varepsilon.T}} \quad (5.10.25)$$

$$\Delta^{\varepsilon.T} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11}^T & \varepsilon_{12}^T & \varepsilon_{13}^T \\ \varepsilon_{21}^T & \varepsilon_{22}^T & \varepsilon_{23}^T \\ \varepsilon_{31}^T & \varepsilon_{32}^T & \varepsilon_{33}^T \end{vmatrix} \quad (5.10.26)$$

$\Delta^{\varepsilon.T}$ - isə $\Delta^{\varepsilon.T}$ determinantının ε_{mn}^T elementinə uyğun minordur.

Göstərək ki, $m, n=1,2,3$ qiymətlərində $\varepsilon_{mn}^T \beta_{mn}^T$ hasilini həmişə vahidə bərabərdir:

$$\varepsilon_{11}^T \beta_{11}^T + \varepsilon_{12}^T \beta_{12}^T + \varepsilon_{13}^T \beta_{13}^T = \frac{\varepsilon_{11}^T \Delta^{\varepsilon.T}}{\Delta^{\varepsilon.T}} + \frac{\varepsilon_{12}^T \Delta^{\varepsilon.T}}{\Delta^{\varepsilon.T}} + \frac{\varepsilon_{13}^T \Delta^{\varepsilon.T}}{\Delta^{\varepsilon.T}} = \frac{\Delta^{\varepsilon.T}}{\Delta^{\varepsilon.T}} = 1.$$

Eyni qayda ilə

$$\begin{aligned} \varepsilon_{21}^T \beta_{21}^T + \varepsilon_{22}^T \beta_{22}^T + \varepsilon_{23}^T \beta_{23}^T &= 1 \\ \varepsilon_{31}^T \beta_{31}^T + \varepsilon_{32}^T \beta_{32}^T + \varepsilon_{33}^T \beta_{33}^T &= 1 \end{aligned} \quad (5.10.27)$$

Ona görə də (5.10.24) aşağıdakı şəkllə düşür:

$$4\pi\beta_{mn}^T \delta_n = E_m + 4\pi d_{mkl} \beta_{mn}^T T_{kl} \quad (5.10.28)$$

Buradan

$$E_m = 4\pi\beta_{mn}^T \delta_n - 4\pi d_{mk\ell} \beta_{mn}^T T_{k\ell} \quad (5.10.28')$$

Burada isə

$$g_{mk\ell} = 4\pi d_{nk\ell} \beta_{mn}^T = 4\pi(d_{1k\ell} \beta_{m1}^T + d_{2k\ell} \beta_{m2}^T + d_{3k\ell} \beta_{m3}^T) \quad (5.10.29)$$

desək (5.10.28)-ni belə yazıb bilərik.

$$E_m = 4\pi\beta_{mn}^T \delta_n - g_{mk\ell} T_{k\ell} \quad (5.10.30)$$

Bunu isə

$$S_{ij} = s_{ijk\ell}^E T_{k\ell} + d_{mij} E_m \quad (5.10.31)$$

tənliyində yazsaq alarıq:

$$\begin{aligned} S_{ij} &= s_{ijk\ell}^E T_{k\ell} + d_{mij} (4\pi\beta_{mn}^T \delta_n - g_{mk\ell} T_{k\ell}) = \\ &= (s_{ijk\ell}^E - d_{mij} g_{mk\ell}) T_{k\ell} + 4\pi d_{mij} \beta_{mn}^T \delta_n = s_{ijk\ell}^D T_{k\ell} + g_{nij} \delta \end{aligned} \quad (5.10.32)$$

Belə ki,

$$s_{ijk\ell}^D = s_{ijk\ell}^E - d_{mij} g_{mk\ell} = s_{ijk\ell}^E - \frac{4\pi}{\beta_{mn}^T d_{nk\ell} g_{mij}} \quad (5.10.33)$$

i, j, k, ℓ indekslərinə müxtəlif qiymətlər verməklə 21 elastiklik sabitlərini (5.10.32)-də yazmaqla sabit elektrik induksiyası və sabit elektrik gərginliklərində ölçülmüş elastiklik sabitləri arasındakı fərqləri hesablamaq olar. Əgər (5.10.30) və (5.10.28') tənliklərini S_v ($v = \overline{1,6}$) və T_v komponentlərinin köməyi ilə ifadə etsək g_{nij} sabitləri g_{ij} sabitləri ilə (5.10.23) qanunu ilə əvəz olunur ($\alpha^{-1} g$ ilə əvəz etməklə).

Hal tənliklərinin üçüncü yazılış forması mexaniki gərginlikləri deformasiyalar və elektrik sahəsinin gərginlik komponentləri ilə əlaqələndirir. Bu yazılış formasını bilavasitə (5.10.21) və (5.10.22) tənliklərindən almaq olar. Bunun üçün birinci tənliyi tenzorla yazıb hər tərəfini elastiklik modulları tenzoru $c_{ijk\ell}^E$ -ə vuraq. $c_{ijk\ell}^E$ sabitləri uyğun s_{ij}^E elastiklik sabitləri ilə belə ifadə olunurlar:

$$c_{ij}^E = \frac{(-1)^{i+j} \Delta_{ij}^{\varepsilon.E}}{\Delta^{\varepsilon.E}} \quad (5.10.34)$$

$\Delta^{\varepsilon.E} = |s_{ij}^E|$ elastiklik sabitlərindən düzəldilmiş determinantdır.

$\Delta_{ij}^{\varepsilon.E} - s_{ij}^E$ elementinə uyğun minordur.

Dediyimiz vurma əməlini yerinə yetirsək (5.10.21)-dən alarıq:

$$c_{ijk\ell}^E S_{ij} = c_{ijk\ell}^E s_{ijk\ell}^E T_\ell + d_{mij} c_{ijk\ell}^E E_m \quad (5.10.35)$$

Yuxarıda göstərdiyimizə analogi olaraq asanlıqla göstərmək olar ki, $c_{ijk\ell}^E s_{ijk\ell}^E$ hasilə k və ℓ -in bütün qiymətlərində vahidə bərabərdir. Onda (5.10.35)-i belə yazmaq olar

$$T_{k\ell} = c_{ijk\ell}^E S_{ij} - e_{mk\ell} E_m \quad (5.10.36)$$

Burada $e_{mk\ell} = d_{mij} c_{ijk\ell}^E$ işarə olunub.

(5.10.36)-nı (5.10.22)-də yazsaq alarıq:

$$\begin{aligned} \delta_m &= \frac{\varepsilon_{mn}^T}{4\pi} E_m + d_{mk\ell} (c_{ijk\ell}^E S_{ij} - e_{mk\ell} E_m) = \\ &= d_{mk\ell} c_{ijk\ell}^E S_{ij} + \left(\frac{\varepsilon_{mn}^T}{4\pi} - e_{mk\ell} d_{mk\ell} \right) E_m \end{aligned} \quad (5.10.37)$$

Bunu (5.9.27), yəni

$$\delta_m = \frac{\varepsilon_{mn}^T}{4\pi} E_m + e_{nij} S_{ij}$$

Tənliyi ilə müqayisə edib tapırıq:

$$\varepsilon_{mn}^S = \varepsilon_{mn}^T - 4d_{nkl} e_{nkl} \quad (5.10.38)$$

Burada da iki və üçindeksli pyezoelektrik sabitləri arasında aşağıdakı əlaqələr var:

$$e_{111} = e_{11}; e_{211} = e_{21}; e_{311} = e_{31}; e_{122} = e_{12}; e_{222} = e_{22};$$

$$\begin{aligned}
e_{322} &= e_{32}; e_{133} = e_{13}; e_{232} = e_{23}; e_{333} = e_{33}; \\
e_{123} &= e_{132} = e_{14}; e_{223} = e_{232} = e_{24}; e_{323} = e_{332} = e_{34}; (5.10.39) \\
e_{113} &= e_{131} = e_{15}; e_{213} = e_{231} = e_{25}; e_{313} = e_{331} = e_{35}; \\
e_{112} &= e_{121} = e_{16}; e_{212} = e_{221} = e_{26}; e_{312} = e_{321} = e_{36};
\end{aligned}$$

Nəhayət hal tənliklərinin son forması olan (5.10.27) tənliklərinə müraciət edək. Onları tenzorlarla belə yazmaq olar:

$$\begin{aligned}
T_{k\ell} &= c_{ijk\ell}^D S_{ij} - h_{mk\ell} \delta_n \\
E_m &= 4\pi \beta_{mn}^S \delta_n - h_{mij} S_{ij}
\end{aligned} \quad (5.10.40)$$

Bu tənliklərə daxil olan üç indeksli pyezoelektrik sabitləri (5.10.27) tənliklərinə daxil olan iki indeksli pyezoelektrik sabitləri ilə (5.9.27) qanunu ilə əlaqələndirilər (əlbəttə e-ni h ilə əvəz etməklə).

(5.10.40) tənliklərindən ikincisini β_{mn}^S tenzoruna vuraq. Onda alırıq:

$$\beta_{mn}^S \delta_n = \frac{1}{4\pi} \beta_{mn}^S \varepsilon_{mn}^S E_m + e_{nij}^S S_{ij} \beta_{mn}^S \quad (5.10.41)$$

Burada yenə m və n-in bütün qiymətlərində

$$\beta_{mn}^S \varepsilon_{mn}^S = 1 \quad (5.10.42)$$

Ona görə də (5.10.41)-dən alırıq:

$$E_m = 4\pi \beta_{mn}^S \delta_n - 4\pi e_{nij}^S \beta_{mn}^S S_{ij} \quad (5.10.43)$$

(5.10.43)-ü (5.10.40)-ın birincisində yazsaq

$$T_{k\ell} = (c_{ijk\ell}^E + 4\pi e_{mk\ell}^S e_{nij}^S \beta_{mn}^S) S_{ij} - 4\pi e_{mk\ell}^S \beta_{mn}^S \delta_n \quad (5.10.44)$$

alınar. İndi isə $h_{mn\ell} = 4\pi e_{mk\ell}^S \beta_{mn}^S$ desək (5.10.44)-dən

$$c_{ijk\ell}^D = c_{ijk\ell}^E + e_{mk\ell} h_{mij} = c_{ijk\ell}^E + 4\pi e_{mk\ell} e_{nij} \beta_{mn}^S \quad (5.10.45)$$

münasibətinə gələrik.

Beləliklə, pyezoelektrik sabitləri arasındakı münasibətləri belə yazıb bilərik

$$\begin{aligned} g_{mk\ell} &= 4\pi \beta_{mn}^S d_{mk\ell} \\ h_{mk\ell} &= 4\pi \beta_{mn}^S e_{mk\ell} = g_{nij} e_{ijk\ell} \\ e_{mk\ell} &= d_{mij} c_{ijk\ell}^E \end{aligned} \quad (5.10.46)$$

Bundan əlavə dielektrik sabitləri arasındakı isə

$$\begin{aligned} \beta_{mn}^T &= \frac{(-1)^{m+n} \Delta_{mn}^{\varepsilon.T}}{\Delta^{\varepsilon.T}} \quad \varepsilon_{mn}^S = \varepsilon_{mn}^T - 4\pi d_{nk\ell} e_{mk\ell} \\ \beta_{mn}^S &= \beta_{mn}^T + \frac{1}{4\pi} g_{nk\ell} h_{mk\ell} \quad \beta_{mn}^S = \frac{(-1)^{m+n} \Delta_{mn}^{\varepsilon.S}}{\Delta^{\varepsilon.S}} \end{aligned} \quad (5.10.47)$$

münasibətlərini tapmış olduq.

(5.10.46), (5.10.47) ifadələrində üç və dörd indeksi sabitləri yuxarıda göstərdiyimiz (5.10.13), (5.10.15), (5.10.23), (5.10.39) və (5.10.31) qanunları ilə iki indeksli sabitlərlə əvəz etsək (5.9.28) bərabərliklərini alarıq.

§5.11. Koordinat sisteminin başlanğıc ətrafında fırlanması zamanı hal tənliklərinin və elastiklik modulları, elastiklik sabitləri, pyezoelektrik və dielektrik sabitlərinin çevrilməsi

Tenzor hesabının bizə verdiyi imkanlardan biri də kristalloqrafik oxlara nəzərən çəpəki kəsilmiş lövhələr üçün hal tənliklərinin çəxarılması və kristalın maddi sabitlərinin çevrilmə düsturlarının çıxarılmasıdır. Belə lövhələri öyrənmək üçün hal tənliklərini koordinat sisteminin istənilən oriyentasiyası üçün düzgün yazmaq bacarmaq zəruridir. Ölçmə apararkən belə lövhələrdən bir neçəsi istifadə olunur. Belə ki, bu lövhələr üçün təyin edilmiş rezonans tezliyi və rəqsin impedansı kristalın

bütün əsas sabitlərinin hesablanması üçün istifadə oluna bilər.

Yenidən hal tənliklərinin üçüncü formasına baxaq:

$$\begin{aligned} T_{k\ell} &= c_{ijk\ell}^D S_{ij} - h_{mk\ell} \delta_n \\ E_m &= 4\pi \beta_{mm}^S \delta_n - h_{mij} S_{ij} \end{aligned} \quad (5.11.1)$$

Bu bərabərlərdən birincisinin sol tərəfi ikinci, ikincisinin isə sol tərəfi birinci tərtib tenzorlardır. Bu tənlikləri hər hansı x', y', z' sistemində yazmaq üçün onların uyğun olaraq (3.1.7) və (3.1.6) çevirmə düsturlarından istifadə edək. Onda yazıla bilər:

$$T'_{k\ell} = \frac{\partial x'_k}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x'_\ell}{\partial x_\ell} T_{k\ell} \quad \text{və} \quad E'_m = \frac{\partial x'_j}{\partial x_m} E_m \quad (5.11.2)$$

Onda (5.11.1) tənlikləri aşağıdakı şəkllə düşərlər:

$$\begin{aligned} T'_{k\ell} &= \frac{\partial x'_k}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x'_\ell}{\partial x_\ell} (s_{11k\ell}^D S_{11} + 2c_{12k\ell}^D S_{12} + 2c_{13k\ell}^D S_{13} + 2c_{23k\ell}^D S_{23} \\ &+ c_{22k\ell}^D S_{22} + c_{33k\ell}^D S_{33}) - \frac{\partial x'_k}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x'_\ell}{\partial x_\ell} (h_{1k\ell} \delta_1 + h_{2k\ell} \delta_2 + h_{3k\ell} \delta_3) \end{aligned} \quad (5.11.3)$$

$$\begin{aligned} E'_m &= 4\pi \frac{\partial x'_m}{\partial x_m} (\beta_{m1}^S \delta_1 + \beta_{m2}^S \delta_2 + \beta_{m3}^S \delta_3) - \frac{\partial x'_m}{\partial x_m} (h_{m11} S_{11} + \\ &+ 2h_{m12} S_{12} + 2h_{m13} S_{13} + h_{m22} S_{22} + 2h_{m23} S_{23} + h_{m33} S_{33}) \end{aligned}$$

Bu çevirməni başa çatdırmaq üçün S_{ij} və δ_n tenzorlarının da çevrilməsini, yəni

$$S_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_i} \frac{\partial x_j}{\partial x'_j} S'_{ij} \quad \delta_n = \frac{\partial x_n}{\partial x'_n} \delta'_n \quad (5.11.4)$$

çevirmələrini də nəzərə almaq zəruridir.

Burada $\frac{\partial x_i}{\partial x'_i}$ yeni koordinat oxlarının köhnə sistemin oxlarına nəzərən istiqamətverici kosinuslarıdır, həm də qeyd etməliyə ki

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_i} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_i} \quad (5.11.5)$$

bərabərliyinin doğruluğu aşkardır.

(3.1.1) və (3.1.4)-ə əsasən

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} = \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} & \ell_2 &= \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} = \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} & \ell_3 &= \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} = \frac{\partial x_3}{\partial x'_3} \\ m_1 &= \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} & m_2 &= \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} & m_3 &= \frac{\partial x_3}{\partial x'_3} \\ n_1 &= \frac{\partial x_3}{\partial x'_1} & n_2 &= \frac{\partial x_3}{\partial x'_2} & n_3 &= \frac{\partial x_3}{\partial x'_3} \end{aligned} \quad (5.11.6)$$

İndi (5.11.4)-ü (5.11.3)-də yazsaq alarıq:

$$\mathbf{T}'_{k\ell} = c_{ijk\ell}^D \frac{\partial x'_k}{\partial x_k} \frac{\partial x'_i}{\partial x_i} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x_j}{\partial x'_j} \mathbf{S}_{ij} - h_{nk\ell} \frac{\partial x'_k}{\partial x_k} \frac{\partial x_\ell}{\partial x'_\ell} \frac{\partial x_n}{\partial x'_n} \delta'_n \quad (5.11.7)$$

$$\mathbf{E}'_m = 4\pi\beta_{mn}^S \frac{\partial x'_m}{\partial x_m} \frac{\partial x_n}{\partial x'_n} \delta'_n - h_{nk\ell} \frac{\partial x'_k}{\partial x_k} \frac{\partial x_i}{\partial x'_i} \frac{\partial x_j}{\partial x'_j} \mathbf{S}_{ij}$$

Bu tənliklər kristal lövhəsinin istənilən oriyentasiyası üçün yararlıdır. (5.11.7)-ni (5.11.1) ilə müqayisə edib aşağıdakı nəticələrə gəlirik:

$$\begin{aligned} c_{ijk\ell}^{D'} &= \frac{\partial x'_k}{\partial x_k} \frac{\partial x'_i}{\partial x_i} \frac{\partial x_\ell}{\partial x'_\ell} \frac{\partial x_j}{\partial x'_j} c_{ijk\ell}^D \\ h'_{nk\ell} &= \frac{\partial x'_k}{\partial x_k} \frac{\partial x_\ell}{\partial x'_\ell} \frac{\partial x_n}{\partial x'_n} h_{nk\ell} \\ \beta_{mn}^{S'} &= \frac{\partial x'_m}{\partial x_m} \frac{\partial x_n}{\partial x'_n} \beta_{mn}^S \end{aligned} \quad (5.11.8)$$

Elastiklik və dielektrik nüfuzluluğu sabitləri üçün çevirmə düsturlarını almaq üçün hal tənliklərinin birinci formasına müraciət edək

$$S_{ij} = s_{ijk\ell}^E T_{k\ell} - d_{nij} E_m \quad \delta_m = \frac{\varepsilon_{mn}^T}{4\pi} E_m + d_{nk\ell} T_{k\ell} \quad (5.11.9)$$

Tenzorların çevirmə düsturlarından istifadə etsək onları belə yazı bilərik

$$S'_{ij} = s_{ijk\ell}^E \frac{\partial x'_i}{\partial x_i} \frac{\partial x'_j}{\partial x_j} \frac{\partial x_k}{\partial x'_k} \frac{\partial x_\ell}{\partial x'_\ell} T_{k\ell} + d_{ijm} \frac{\partial x'_i}{\partial x_i} \frac{\partial x'_j}{\partial x_j} \frac{\partial x_m}{\partial x'_m} E_m$$

$$\delta'_n = \frac{\varepsilon_{mn}^T}{4\pi} \frac{\partial x'_n}{\partial x_n} \frac{\partial x_m}{\partial x'_m} E'_m + d_{nk\ell} \frac{\partial x'_n}{\partial x_n} \frac{\partial x_k}{\partial x'_k} \frac{\partial x_\ell}{\partial x'_\ell} T_{k\ell} \quad (5.11.10)$$

Büradan da sabitlərin çevrilmə düsturlarını alırıq:

$$s_{ijk\ell}^{E'} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_i} \frac{\partial x'_j}{\partial x_j} \frac{\partial x_k}{\partial x'_k} \frac{\partial x_\ell}{\partial x'_\ell} s_{ijk\ell}^E$$

$$d'_{ijm} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_i} \frac{\partial x'_j}{\partial x_j} \frac{\partial x_m}{\partial x'_m} d_{ijm} \quad (5.11.11)$$

$$\varepsilon_{mn}^{T'} = \frac{\partial x'_n}{\partial x_n} \frac{\partial x_m}{\partial x'_m} \varepsilon_{mn}^T$$

Bu düsturların köməyi ilə ixtiyari istiqamətdə polyarlaşdırılmış kristalda polyarlaşma vektorunun istiqamətindən asılı olaraq elastiklik, dielektrik və pyezoelektrik sabitlərinin dəyişmələrini müəyyən etmək olar.

§5.12. Elastiklik, dielektrik və pyezoelektrik sabitlərinin polyarlıq vektorunun istiqamətindən asılı olaraq dəyişmələrinin təyini

Pyezokeramikanın əvvəlcədən asanlıqla polyarlaşdırıla bilməsi onlardan müxtəlif məqsədlər üçün istifadə olunmasına imkan verir. Qeyd etmişdik ki, polyarlaşma vektoru elastiklik

modulları, dielektrik və pyezoelektrik sabitləri tenzorlarının simmetriyasına təsir edən əsas faktorlardan biridir. Pyezokeramikadan hazırlanmış cihaz və cihaz hissələrinin, habelə digər qurğuların əsas xarakteristikalarını öyrənmək və onları məqsədyönlü təkmilləşdirmək üçün elastiklik modullarının və elastiklik sabitlərinin, pyezoelektrik və dielektrik sabitləri tenzorlarının bütün komponentlərinin tam komplektinin varlığı vacibdir. Onları ölçmə üsullarının varlığına baxmayaraq bu ölçmələr tədqiqatçılar üçün əlavə çətinliklər yaradır və vaxta qənaət etməyə imkan vermir, bundan əlavə müvafiq ölçmə cihazlarına ehtiyac yaradır. Həqiqətən də bu maddi sabitlərin polyarlaşma vektorunun istiqamətindən asılı olaraq təyin olunması çox zəhmət tələb edən bir məşğuliyyətdir. Ona görə də müxtəlif istiqamətdə yönəlmiş polyarlaşma vektorunun istiqamətinin maddi sabitlərin tenzorlarına təsirini bilmək üçün zəruri düsturların çıxarılmasını məqsəduyğun hesab etməliyik.

Polyarlaşmış pyezokeramik materiallar üçün elastiklik modullar tenzoru c_{ij}^E , pyezoelektrik sabitləri tenzoru ε_{nm}^s və dielektrik sabitləri tenzoru e_{mv} ($i, j, m, n, v=1, 2, 3$) müəyyən simmetriyaya malik olurlar. Qalınlıq istiqamətində polyarlaşmış pyezokeramik lövhənin anizotrop luq oxu yeganədir və onu Oz oxu kimi qəbul edirlər. Belə pyezokeramika heksoqonal simmetriyalı kristallar sinfinə aid olurlar [30]. Bu kristallar üçün yuxarıda dediyimiz tenzorlar aşağıdakı kimi olurlar:

$$\|c_{ij}\| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{vmatrix} \quad (5.12.1)$$

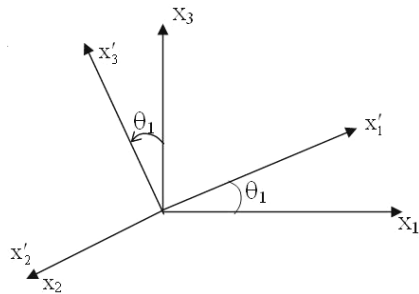
$$\|e_{nv}\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (5.12.2)$$

$$\|\varepsilon_{nm}\| = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} \quad (5.12.3)$$

Bu tenzorlardan görünür ki, qalınlıq istiqamətində polyarlaşmış pyezokeramik lövhə altı elastiklik, üç payezoelektrik və iki dielektrik sabitləri ilə xarakterizə olunurlar. Bunları birlərək polyarlaşmanın başqa istiqamətləri üçün elastiklik və dielektrik sabitlərinin tam yığımını təyin etmək olar.

Buna, məsələn, kristalda kristallik oxlara nəzərən çəpinə kəsilmiş lövhədə adını çəkdiyimiz maddi sabitlərin təyin olunmasında ehtiyac yaranır. Bunun üçün uyğun olaraq (5.11.8) və (5.11.11) düsturlarından istifadə olunur. Məsələn Oxz müstəvisində Oz oxu ilə θ_1 bucağı əmələ gətirən istiqamətdə polyarlaşmış element üçün maddi sabitlərin tam yığımını təyin etmək və qeyd etmək ki, bu koordinat sisteminin Oy oxu ətrafında saat əqrəbinin əksi istiqamətində θ_1 bucağı qədər dönməsinə uyğundur (şəkil 5.12.1).

Bu şəkildə x_1, x_2, x_3 köhnə, x'_1, x'_2, x'_3 isə yeni koordinat oxlarıdır (x, y, z əvəzinə x_1, x_2, x_3 işarə etmişik). Onu da qeyd etmək ki, bu hal üçün



Şəkil 5.12.1.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x'_1}{\partial x_1} &= \cos \theta_1 & \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} &= 0 & \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} &= \sin \theta_1 \\
\frac{\partial x'_2}{\partial x_1} &= 0 & \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} &= 1 & \frac{\partial x'_2}{\partial x_3} &= 0 \\
\frac{\partial x'_3}{\partial x_1} &= -\sin \theta_1 & \frac{\partial x'_3}{\partial x_2} &= 0 & \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} &= \cos \theta_1
\end{aligned} \tag{5.12.4}$$

Üstündə ştrix olmayan dəyişənlərin ştrixli dəyişənlərə görə törəmələri də daxil olmaqla hər iki variantı bir cədvəldə belə göstərə bilərik.

Cədvəl 5.12.1.

	x_1	x_2	x_3
x'_1	$\cos \theta_1$	0	$\sin \theta_1$
x'_2	0	1	0
x'_3	$-\sin \theta_1$	0	$\cos \theta_1$

(5.12.1)-(5.12.3) tenzorlarına və (5.11.8) düsturlarına əsasən seçilmənin bir nümunəsini göstərək. (5.10.12)-yə görə $c'_{11} = c'_{1111}$

$$c'_{ijk\ell} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x'_j}{\partial x_\beta} \frac{\partial x'_k}{\partial x_\gamma} \frac{\partial x'_\ell}{\partial x_\delta} c_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (i,j,k,\ell,\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,2,3) \tag{5.12.4'}$$

Əvvəlcə $i=1$ deyib α -nı birdən üçə qədər dəyişdirməklə (5.12.5)-in sağındakı tenzoru bükək

$$c'_{1ijk\ell} = \left[c_{1\beta\gamma\delta} \frac{\partial x'_1}{\partial x_\beta} + c_{2\beta\gamma\delta} \frac{\partial x'_1}{\partial x_\gamma} + c_{3\beta\gamma\delta} \frac{\partial x'_1}{\partial x_\delta} \right] \frac{\partial x'_j}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x'_k}{\partial x_\gamma} \frac{\partial x'_\ell}{\partial x_\delta} \tag{5.12.5}$$

Cədvəl (5.12.1)-ə əsasən

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x'_1}{\partial x_1} &= \cos \theta_1 & \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} &= 0 & \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} &= \sin \theta_1
\end{aligned} \tag{5.12.6}$$

Onda

$$c'_{j k \ell} = (c_{1\beta\gamma\delta} \cos \theta_1 + c_{3\beta\gamma\delta} \sin \theta_1) \frac{\partial x'_j}{\partial x_\beta} \frac{\partial x_k}{\partial x'_\gamma} \frac{\partial x_\ell}{\partial x'_\delta} \quad (5.12.6')$$

İndi $j=1$ deyib, β -nı birdən üçə qədər dəyişdirməklə (5.12.6')-in sağ tərəfini yenidən bükürük. Onda

$$\begin{aligned} c'_{11k\ell} = & \left[(c_{11\gamma\delta} \cos \theta_1 + c_{31\gamma\delta} \sin \theta_1) \frac{\partial x'_1}{\partial x} + \right. \\ & + (c_{12\gamma\delta} \cos \theta_1 + c_{32\gamma\delta} \sin \theta_1) \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} + (c_{13\gamma\delta} \cos \theta_1 + c_{32\gamma\delta} \sin \theta_1) \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} + \\ & \left. + (c_{13\gamma\delta} \cos \theta_1 + c_{33\gamma\delta} \sin \theta_1) \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} \right] \frac{\partial x_k}{\partial x'_\gamma} \frac{\partial x_\ell}{\partial x'_\delta} \end{aligned}$$

(5.12.6)-ya əsasən bunu belə yazıb bilərik:

$$\begin{aligned} c'_{11k\ell} = & \left[(c_{11\gamma\delta} \cos \theta_1 + c_{31\gamma\delta} \sin \theta_1) \cos \theta_1 + \right. \\ & \left. + (c_{13\gamma\delta} \cos \theta_1 + c_{33\gamma\delta} \sin \theta_1) \sin \theta_1 \right] \frac{\partial x_k}{\partial x'_\gamma} \frac{\partial x_\ell}{\partial x'_\delta} = \\ = & \left[c_{11\gamma\delta} \cos^2 \theta_1 + c_{31\gamma\delta} \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \right. \\ & \left. + c_{13\gamma\delta} \sin \theta_1 \cos \theta_1 + c_{33\gamma\delta} \sin^2 \theta_1 \right] \frac{\partial x_k}{\partial x'_\gamma} \frac{\partial x_\ell}{\partial x'_\delta} = \\ = & \left[c_{11\gamma\delta} \cos^2 \theta_1 + (c_{31\gamma\delta} + c_{13\gamma\delta}) \sin \theta_1 \cos \theta_1 + c_{33\gamma\delta} \sin^2 \theta_1 \right] \frac{\partial x_k}{\partial x'_\gamma} \frac{\partial x_\ell}{\partial x'_\delta} \end{aligned}$$

İndi $k=1$ deyib γ -nı birdən üçə qədər dəyişdirib bükürük, onda analogi qayda ilə alırıq

$$\begin{aligned} c'_{111\ell} = & \left[c_{111\delta} \cos^3 \theta_1 + (c_{311\delta} + c_{131\delta} - c_{113\delta}) \sin \theta_1 \cos^2 \theta_1 + \right. \\ & \left. + (c_{331\delta} - c_{313\delta} - c_{133\delta}) \sin^2 \theta_1 \cos \theta_1 - c_{33\gamma\delta} \sin^3 \theta_1 \right] \frac{\partial x_k}{\partial x'_\gamma} \frac{\partial x_\ell}{\partial x'_\delta} \end{aligned}$$

Nəhayət $\ell=1$ deyib δ -nı birdən üçə qədər dəyişdirməklə büküb lazım olan islahatlardan sonra alırıq:

$$\begin{aligned} c'_{1111} &= c_{1111} \cos^4 \theta_1 + c_{3333} \cos^4 \theta_1 + \\ &+ (c_{3111} + c_{1311} - c_{1131} - c_{1113}) \sin \theta_1 \cos^3 \theta_1 + \\ &+ (c_{3311} - c_{3131} - c_{1331} - c_{3113} - c_{1313} + c_{1133}) \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 - \\ &- (c_{3331} + c_{3313} - c_{3133} - c_{1333}) \sin^3 \theta_1 \cos \theta_1 \end{aligned}$$

Lakin (5.10.12) münasibətinə əsasən

$$\begin{aligned} c_{1111} &= c_{11}; c_{3333} = c_{33}; c_{3111} = c_{15}; c_{1311} = c_{15}; c_{1131} = c_{15}; c_{1113} = c_{15} \\ c_{3311} &= c_{13}; c_{3131} = c_{55}; c_{1331} = c_{55}; c_{3113} = c_{3131} = c_{55}; c_{1313} = c_{55}; \\ c_{1133} &= c_{13}; c_{3331} = c_{35}; c_{3313} = c_{35}; c_{1133} = c_{13}; c_{1333} = c_{35} \end{aligned}$$

Beləliklə, alırıq

$$\begin{aligned} c'_{1111} &= c'_{11} = c_{11} \cos^4 \theta_1 + c_{33} \sin^4 \theta_1 + \\ &+ (c_{15} + c_{15} - c_{15} - c_{15}) \sin \theta_1 \cos^3 \theta_1 + \\ &+ (c_{13} - c_{55} - c_{55} - c_{55} - c_{55} + c_{13}) \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 - \\ &- (c_{35} + c_{35} - c_{35}) \sin^3 \theta_1 \cos \theta_1 \end{aligned}$$

(4.12.1) matrisinə əsasən

$$c_{15}=0; c_{55}=c_{44}; c_{35}=0$$

Nəhayət alırıq:

$$c'_{11} = c_{11} \cos^4 \theta_1 + 2(c_{13} - 2c_{44}) \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 + c_{33} \sin^4 \theta_1$$

Eyni qayda ilə qalan sabitlər üçün aşağıdakı düsturları alırıq:

$$c'_{12} = c_{12} \cos^2 \theta_1 + c_{13} \sin^2 \theta_1$$

$$c'_{13} = c_{13} (\sin^4 \theta_1 + \cos^4 \theta_1) + (c_{11} + c_{33} + 4c_{44}) \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1$$

$$c'_{23} = c_{12} \sin^2 \theta_1 + c_{13} \cos^2 \theta_1$$

$$\begin{aligned}
c'_{15} &= \sin \theta_1 \cos \theta_1 [(c_{11} - c_{13} + 2c_{44}) \cos^2 \theta_1 - (c_{13} + c_{33} + 2c_{44}) \sin^2 \theta_1] \\
c'_{48} &= -(c_{44} + c_{66}) \sin \theta_1 \cos \theta_1 \\
c'_{66} &= c_{66} \cos^2 \theta_1 - c_{44} \sin^2 \theta_1 \\
c'_{44} &= c_{44} \cos^2 \theta_1 - c_{66} \sin^2 \theta_1 \\
c'_{33} &= c_{33} \cos^4 \theta_1 + 2(c_{13} - 2c_{44}) \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 + c_{11} \sin^4 \theta_1 \\
c'_{22} &= c_{11} \\
c'_{55} &= (c_{11} - c_{13} - c_{44}) \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 + c_{44} (\sin^4 \theta_1 + \cos^4 \theta_1) \\
c'_{25} &= c_{12} \cos^2 \theta_1 + c_{23} \sin^2 \theta_1 \\
c'_{35} &= \sin \theta_1 \cos \theta_1 [c_{13} \cos^2 \theta_1 - (c_{11} - 2c_{13}) \sin^2 \theta_1]
\end{aligned} \tag{5.12.7}$$

Bu üsulla

$$e'_{ijm} = e_{\alpha\beta\ell} \frac{\partial x'_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x'_j}{\partial x'_\beta} \frac{\partial x'_m}{\partial x'_\ell} \quad \text{və} \quad \varepsilon'_{nm} = \varepsilon_{nm} \frac{\partial x'_n}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x'_m}{\partial x_\beta}$$

düsturlarından istifadə edərək pyezoelektrik və dielektrik sabitləri tenzorlarının komponentlərini tapırıq:

$$\begin{aligned}
e'_{11} &= \sin \theta_1 [e_{33} \sin^2 \theta_1 + (e_{31} + 2e_{15}) \cos^2 \theta_1] \\
e'_{12} &= e_{31} \sin \theta_1; \quad e'_{24} = e_{15} \sin \theta_1; \\
e'_{13} &= \sin \theta_1 [e_{31} \sin^2 \theta_1 + (e_{13} - 2e_{15}) \cos^2 \theta_1] \\
e'_{31} &= \cos \theta_1 [e_{31} \cos^2 \theta_1 + (e_{33} - 2e_{15}) \sin^2 \theta_1] \\
e'_{15} &= \cos \theta_1 [e_{15} \cos^2 \theta_1 + (e_{31} + e_{15} + e_{33}) \sin^2 \theta_1] \\
e'_{33} &= \cos \theta_1 [e_{33} \cos^2 \theta_1 + (e_{31} + 2e_{15}) \sin^2 \theta_1] \\
e'_{35} &= \sin \theta_1 [e_{15} \sin^2 \theta_1 + (e_{33} - e_{31} - e_{15}) \cos^2 \theta_1]; \quad e'_{26} = e_{15} \sin \theta_1 \\
\varepsilon'_{11} &= \varepsilon_{11} \cos^2 \theta_1 + \varepsilon_{33} \sin^2 \theta_1; \quad \varepsilon'_{13} = (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11}) \sin \theta_1 \cos \theta_1 \\
\varepsilon'_{22} &= \varepsilon_{11}; \quad \varepsilon'_{33} = \varepsilon_{11} \sin^2 \theta_1 + \varepsilon_{33} \cos^2 \theta_1
\end{aligned} \tag{5.12.8}$$

Beləliklə, elastiklik, modulları, pyezoelektrik və dielektrik sabitləri üçün uyğun olaraq aşağıdakı tenzorları alırıq:

$$\|c'_{ij}\| = \begin{vmatrix} c'_{11} & c'_{12} & c'_{13} & 0 & c'_{15} & 0 \\ c'_{12} & c'_{22} & c'_{23} & 0 & c'_{25} & 0 \\ c'_{13} & c'_{23} & c'_{33} & 0 & c'_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c'_{44} & 0 & c'_{46} \\ c'_{15} & c'_{25} & c'_{35} & 0 & c'_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c'_{46} & 0 & c'_{66} \end{vmatrix} \quad (5.12.9)$$

$$\|e'_{nm}\| = \begin{vmatrix} e'_{11} & e'_{12} & e'_{13} & 0 & e'_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e'_{24} & 0 & e'_{26} \\ e'_{31} & e'_{32} & e'_{33} & 0 & e'_{35} & 0 \end{vmatrix} \quad (5.12.10)$$

$$\|e'_{nm}\| = \begin{vmatrix} e'_{11} & 0 & e'_{13} \\ 0 & e'_{12} & 0 \\ e'_{13} & 0 & e'_{33} \end{vmatrix} \quad (5.12.11)$$

Göründüyü kimi (5.12.9)-(5.12.11) tenzorları uyğun (5.12.1)-(5.12.3) tenzorları ilə eyni deyillər. (5.12.6)-(5.12.8) düsturlarında $\theta_1=0$ desək (5.12.6)-(5.12.8) matrislərini alırıq ki, bu da pyezlkeramik elementin qalınlığı istiqamətində polyarlaşmasına uyğundur. Eləcə də, həmin düsturlarda $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ desək

uzunluğu istiqamətində polyarlaşmış pyezokeramik lövhə üçün uyğun sabitlərin tenzorlarını alırıq. x_1 oxu polyarlaşma istiqaməti ilə üst-üstə düşdüyü hal üçün aşağıdakı tenzorları alırıq:

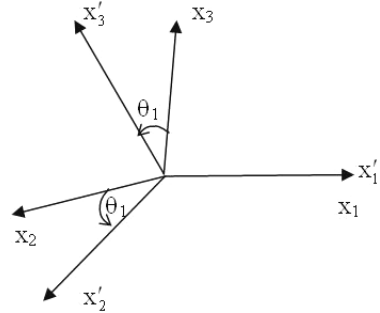
$$\|e'_{ij}\| = \begin{vmatrix} e_{33} & e_{31} & e_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \end{vmatrix} \quad (5.12.12)$$

$$\|c_{ij}\| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{13} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{33} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{13} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{vmatrix} \quad (5.12.13)$$

$$\|\varepsilon_{nm}\| = \begin{vmatrix} \varepsilon_{33} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{11} \end{vmatrix} \quad (5.12.14)$$

Eninə polyarlaşmış pyezokeramika üçün elastiklik modulları, pyezoelektrik və dielektrik sabitləri tenzorlarını almaq üçün fərz edirik ki, koordinat sistemi Ox oxu ətrafında saat əqrəbinin əksi istiqamətində θ_1 bucağı qədər fırladılıb (şəkil 5.12.2).

Onda $c'_{ijk\ell}$, e'_{ijk} və ε'_{ij} tenzorlarını yenə də yuxarıda göstərdiyimiz çevirmə düsturları vasitəsilə tapmaq olar. Bu baxdığımız halda köhnə və yeni oxlar arasındakı bucaqların kosinusları aşağıdakı cədvəldə göstərildiyi kimi olar.



Şəkil 5.12.2.

Cədvəl 5.12.2.

	x_1	x_2	x_3
x'_1	1	0	0
x'_2	0	$\cos\theta_1$	$\sin\theta_1$
x'_3	0	$-\sin\theta_1$	$\cos\theta_1$

Bundan əvvəlki halda olduğu kimi fəaliyyət göstərərək alırıq:

$$\begin{aligned}
 c'_{11} &= c_{11}; \quad c'_{12} = c_{12} \cos^2 \theta_1 + c_{13} \sin^2 \theta_1; \\
 c'_{13} &= c_{12} \sin^2 \theta_1 + c_{13} \cos^2 \theta_1 \\
 c'_{22} &= c_{11} \cos^4 \theta_1 + 2(c_{13} - 2c_{44}) \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_1 + c_{33} \sin^4 \theta_1 \\
 c'_{23} &= c_{13} (\cos^4 \theta_1 + \sin^4 \theta_1) + (c_{11} + c_{33} + 4c_{44}) \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 \\
 c'_{24} &= [(c_{11} - c_{13} - 2c_{44}) \cos^2 \theta_1 + (c_{13} - c_{33} + 2c_{44}) \sin^2 \theta_1] \\
 c'_{34} &= -\sin \theta_1 \cos \theta_1 [(c_{13} + c_{11} + 2c_{44}) \sin^2 \theta_1 + (c_{33} + c_{13} + 2c_{44}) \cos^2 \theta_1] \\
 c'_{33} &= c_{33} \cos^4 \theta_1 + (4c_{44} + c_{13}) \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 + c_{11} \sin^4 \theta_1 \\
 c'_{44} &= c_{44} (\cos^4 \theta_1 + \sin^4 \theta_1) + (c_{11} + c_{33} - 2c_{13} - 2c_{44}) \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 \\
 c'_{55} &= c_{55} \cos^2 \theta_1 - c_{66} \sin^2 \theta_1; \quad c'_{56} = -(c_{44} + c_{66}) \sin \theta_1 \cos \theta_1 \\
 c'_{66} &= c_{66} \cos^2 \theta_1 - c_{44} \sin^2 \theta_1 \tag{5.12.15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e'_{15} &= e_{15} \cos \theta_1; \quad e'_{16} = e_{15} \sin \theta_1; \quad e'_{21} = e_{31} \sin \theta_1 \\
 e'_{22} &= \sin \theta_1 [e_{33} \sin^2 \theta_1 + (e_{31} + 2e_{15}) \cos^2 \theta_1]; \quad e'_{31} = e_{31} \cos \theta_1 \\
 e'_{23} &= \sin \theta_1 [e_{31} \sin^2 \theta_1 + (e_{33} - 2e_{15}) \cos^2 \theta_1] \\
 e'_{24} &= \cos \theta_1 [e_{15} \cos^2 \theta_1 + (e_{33} + e_{31} + e_{15}) \sin^2 \theta_1] \\
 e'_{32} &= \cos \theta_1 [e_{31} \cos^2 \theta_1 + (e_{33} - 2e_{15}) \sin^2 \theta_1] \tag{5.12.16} \\
 e'_{33} &= \cos \theta_1 [e_{33} \cos^2 \theta_1 + (e_{31} + 2e_{15}) \sin^2 \theta_1] \\
 e'_{34} &= \sin \theta_1 [e_{15} \sin^2 \theta_1 + (e_{33} - e_{31} - e_{15}) \cos^2 \theta_1];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon'_{11} &= \varepsilon_{11}; \quad \varepsilon'_{22} = \varepsilon_{11} \cos^2 \theta_1 + \varepsilon_{33} \sin^2 \theta_1; \\
 \varepsilon'_{23} &= (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11}) \sin \theta_1 \cos \theta_1; \tag{5.12.17} \\
 \varepsilon'_{33} &= \varepsilon_{11} \sin^2 \theta_1 + \varepsilon_{33} \cos^2 \theta_1
 \end{aligned}$$

Beləliklə, elastiklik modulları pyezoelektrik və dielektrik sabitlərinin aşağıdakı tenzorlarını alırıq:

$$\|c'_{ij}\| = \begin{vmatrix} c'_{11} & c'_{12} & c'_{13} & c'_{14} & 0 & 0 \\ c'_{12} & c'_{22} & c'_{23} & c'_{24} & 0 & 0 \\ c'_{13} & c'_{23} & c'_{33} & c'_{34} & 0 & 0 \\ c'_{14} & c'_{23} & c'_{34} & c'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c'_{55} & c'_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c'_{56} & c'_{66} \end{vmatrix} \quad (5.12.18)$$

$$\|e'_{ij}\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e'_{15} & e'_{16} \\ e'_{21} & e'_{22} & e'_{23} & e'_{24} & 0 & 0 \\ e'_{31} & e'_{32} & e'_{33} & e'_{34} & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (5.12.19)$$

$$\|\varepsilon'_{nm}\| = \begin{vmatrix} \varepsilon'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon'_{22} & \varepsilon'_{13} \\ 0 & \varepsilon'_{23} & \varepsilon'_{33} \end{vmatrix} \quad (5.12.20)$$

(5.12.15)-(5.12.17) düsturlarında $\theta_1=0$ desək qalınına polyarlaşmış element üçün (5.12.6-8) matrislərini və $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ desək eninə polyarlaşmış pyezoelement üçün aşağıdakı matrisləri alırıq:

$$\|c'_{ij}\| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{33} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{13} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{vmatrix} \quad (5.12.21)$$

$$\|e'_{ij}\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ e_{31} & e_{33} & e_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (5.12.19)$$

$$\|\varepsilon'_{nm}\| = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{11} \end{vmatrix} \quad (5.12.20)$$

Birinci və sonuncu matrislərdən aydın olur ki, polyarlaşma vektorunun istiqamətinə perpendikulyar olan müstəvi həmişə pyezokeramik elementin (və yaxud materialın) izotropluq müstəvisi olur. Buradan tapılmış düsturlar xz və yz müstəvilərində ixtiyari bucaq altında polyarlaşmış pyezokeramikanın maddi sabitlərini, yəni elastiklik modulları, pyezoelektrik və dielektrik sabitləri tenzorlarını hesablamağa imkan verir.

Vİ F Ə S İ L

PYEZOELASTİKLİYİN ƏSAS RİYAZİ MÜNASİBƏTLƏRİ

§6.1. Fəzada ortoqonal əyrixətli koordinat sistemi

Elastiklik və pyezoelastiklik nəzəriyyələrinin bir çox məsələlərinin həllində ortoqonal əyrixətli koordinat sistemindən istifadə qoyulan məsələnin həllini əhəmiyyətli dərəcədə asanlaşdırır. Belə sistemlərin seçilməsində əməl ediləcək ümumi qayda qoyulan məsələlərin xüsusiyyətindən asılı olaraq sistemi elə seçməkdən ibarətdir ki, baxılan tədqiqat obyektinin (daha doğrusu həll oblastının) sərhədləri koordinat xətləri olsunlar. Məsələn, oxasimetrik məsələnin həllində, müstəvi məsələlər üçün polyar, fəza məsələləri üçün silindrik, mərkəzi simmetriyaya malik məsələlərin həllində sferik (və yaxud fəzada polyar) koordinat sistemlərindən istifadə etmək əlverişlidir.

Ümumiyyətlə, əyrixətli fəza koordinat sistemi belə qurulur:

Fəzada x_1, x_2, x_3 dekart koordinatları ilə aşağıdakı kimi əlaqəli olan yeni α_i ($i=1,2,3$) dəyişənləri daxil edilir:

$$\alpha_i = \alpha_i(x_1, x_2, x_3) \quad (6.1.1)$$

Fərz edilir ki, α_i -lər öz aralarında xətti asılı olmayan x_i dəyişənlərinin birqiymətli və bu dəyişənlərə görə diferensiallana

bilən funksiyalardır. Onda $\left| \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} \right|$ yakobiani sıfırdan fərqli ol-

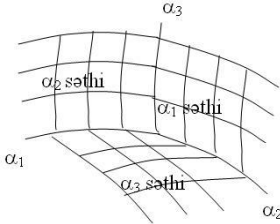
duqda (6.1.1) çevirməsinin tərs çevirməsi mövcuddur və deməli (6.1.1)-i x_i -lərə görə həll edib tərs çevirməni tapmaq olar.

$$x_i = x_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad (6.1.2)$$

Beləliklə, hər bir α_i ədədləri üçlüyü Evklid fəzasında bir nöqtəni təyin edir və tərsinə. Bu halda hər bir $\alpha_i=c_i=const$ münasibəti fəzada bir səthi təyin edir.

$$\begin{aligned}x_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= c_1 \\x_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= c_2 \\x_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= c_3\end{aligned}\quad (6.1.3)$$

c_i ($i=1,3$) sabitlərinin dəyişməsi fəzada səthlər ailəsini müəyyən edir. c_i -lərin seçilmiş qiymətlərinə uyğun müxtəlif ailələrdən olan üç səthin kəsişmə nöqtəsi fəzada bir x nöqtəsini birqiymətli olaraq təyin edir (şəil 6.1.1).



Şəkil 6.1.1.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ xətlərinə koordinat xətləri deyilir. Koordint xətlərinin uyğun parametrin artma istiqamətinə yönəlmiş toxunanlarına $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \bar{\tau}_3$ vektorları deyök. Bu vektorlar hər bir nöqtədə lokal koordinat oxlarının üçzlüsünü müəyyən edirlər. Göstərilən vektorların istiqamətləri bir nöqtədən başqasına keçdikdə dəyişir. Ona görə də onların müvafiq oxlar üzərinə proyeksiyaları dekart sistemindəki qaydalara tabe olurlar. Həmin qaydalara görə vektorun istənilən verilən ox üzərinə proyeksiyası onun modulunun uyğun dəyişənə görə törəməsinə bərabərdir. Əyrixətli koordinatlarda bu suala cavab tapmaq xatirinə (6.1.2) tənliklərini vektor şəklində ifadə edək:

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_i} d\alpha_i = \bar{\tau}_i ds_i \quad (6.1.4)$$

Daha doğrusu $\frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_i} d\alpha_i$ vektoru modulca α_i -in $d\alpha_i$ artımı aldıqda α_i – xəttinin ds_i qövs artımına bərabər olur və isti-

qamətçə $\bar{\tau}_1$ vektoru ilə üst-üstə düşür. Onda (6.1.5)-ə əsasən

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_i} \text{ vektorunun proyeksiyaları } \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_1} \text{ olar.}$$

Beləliklə, toxunan vektorun uzunluğuna h_1 desək a aşağıdakı düsturla hesablanı bilər:

$$h_1 = \left| \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_1} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_1} \right)^2} \quad (6.1.6)$$

Oxşar qayda ilə yazı bilərik:

$$h_2 = \left| \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_2} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_2} \right)^2} \quad (6.1.7)$$

$$h_3 = \left| \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_3} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3} \right)^2} \quad (6.1.8)$$

(6.1.6)-(6.1.8)-ə əsasən isə yazı bilərik:

$$ds_1 = h_1 d\alpha_1 \quad \bar{\tau}_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_1} \quad (6.1.9)$$

Oxşar qayda ilə alırıq:

$$ds_2 = h_2 d\alpha_2 \quad \bar{\tau}_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_2}; \quad ds_3 = h_3 d\alpha_3 \quad \bar{\tau}_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_3} \quad (6.1.10)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – koordinat xətlərinin O başlanğıcındakı toxunan vektorları $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \bar{\tau}_3$ vektorlarını, proyeksiyalarla belə ifadə etmək olar:

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} \bar{i} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1} \bar{j} + \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_1} \bar{k} \\
\bar{\tau}_2 &= \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} \bar{i} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \bar{j} + \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_2} \bar{k} \\
\bar{\tau}_3 &= \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_3} \bar{i} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_3} \bar{j} + \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3} \bar{k}
\end{aligned} \tag{6.1.11}$$

Sistem ortoqonaldırsa, bu o deməkdir ki, τ_i ($i=1,2,3$) vektorları öz aralarında qarşılıqlı ortoqonaldırlar və onların cüt-cüt skalyar hasilləri sıfıra bərabərdirlər. Yəni

$$(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) = (\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_3) = (\bar{\tau}_2, \bar{\tau}_3) = 0 \tag{6.1.12}$$

(6.1.12)-ni ümumiləşdirib belə yazmaq olar:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_i} \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_j} = 0 \tag{6.1.13}$$

(6.1.13)-ə ortoqonallıq şərti deyilir.

Əyrixətli ortoqonal fəza koordinat sistemində hər hansı fəza əyrisinin ds qövsünün uzunluğunu hesablayaq. Məlum olduğu kimi

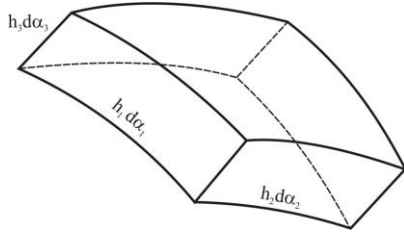
$$\begin{aligned}
ds^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \\
&= \left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_3} d\alpha_3 \right)^2 + \\
&+ \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_3} d\alpha_3 \right)^2 + \\
&+ \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3} d\alpha_3 \right)^2
\end{aligned} \tag{6.1.14}$$

Mötərizələri açıb (6.1.13)-ü nəzərə alsaq taparıq:

$$ds^2 = h_1^2 d\alpha_1^2 + h_2^2 d\alpha_2^2 + h_3^2 d\alpha_3^2 \quad (6.1.15)$$

İndi üç cüt koordinat səthləri ailələri ilə hüdudlanmış elementar həcmə baxaq (şəkil 6.1.2).

Elementar həcmənin hər bir tili boyunca ancaq bircə koordinat dəyişən olur. Ona görə də (6.1.15) düsturuna görə onun tillərinin uzunluqları belə hesablanır:



Şəkil 6.1.2.

$$ds_1 = h_1 d\alpha_1; \quad ds_2 = h_2 d\alpha_2; \quad ds_3 = h_3 d\alpha_3 \quad (6.1.16)$$

Onda baxılan elementar həcm

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \quad (6.1.17)$$

düsturu ilə tapıla bilər.

İndi də baxılan fəzada hər hansı $\vec{E}(x_1, x_2, x_3)$ vektor sahəsinə baxıb onun divirgensiyasını tapaq. Bunun üçün aşağıdakı düstura müraciət edək:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\iint_S E_n ds}{V_m} \quad (6.1.18)$$

Burada S hər hansı V həcmi öz daxilinə alıb hüdudlandıran səth, V isə hər hansı M nöqtəsinə öz daxilinə alan həcmdir. (6.1.18) düsturunu şəkil 6.1.2-də göstərilən elementar həcmə tətbiq edək. Elementar həcmənin qarşılıqlı üzlərindən keçən \vec{E} vektor selini orta qiymət teoreminə görə belə hesablamaq olar

$$Q_1 = E_1 ds_2 ds_3 \Big|_{\alpha_1 + d\alpha_1} - E_1 ds_2 ds_3 \Big|_{\alpha_1} \quad (6.1.19)$$

(6.1.10) bərabərliklərinə əsasən bunu belə yazaq:

$$\begin{aligned} Q_1 &= (h_1 h_3 E_1) \Big|_{\alpha_1 + d\alpha_1} - (h_1 h_3 E_1) \Big|_{\alpha_1} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (h_1 h_3 E_1) d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \end{aligned} \quad (6.1.20)$$

Oxşar qayda ilə yazı bilərik:

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (h_1 h_3 E_2) d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \\ Q_3 &= \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (h_1 h_2 E_3) d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \end{aligned} \quad (6.1.21)$$

Onda bunları (6.1.12)-də yazıb alırıq:

$$\iint_S E_n ds = Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad (6.1.22)$$

Yəni

$$\begin{aligned} \operatorname{div} E &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \times \\ &\times \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (h_1 h_3 E_1) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (h_1 h_3 E_2) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (h_1 h_2 E_3) \right] \end{aligned} \quad (6.1.23)$$

Əgər \vec{E} vektor sahəsi potensiallıdırsa, yəni

$$\vec{E} = \operatorname{grad} U \quad (6.1.24)$$

doğrudursa, onda

$$E_1 = \frac{\partial U}{\partial s_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial \alpha_1} \quad E_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial \alpha_2} \quad E_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial U}{\partial \alpha_3} \quad (6.1.25)$$

(6.1.19)-u (6.1.17)-də yazaq. Onda ortoqonal əyrixətli koordinat sistemində Laplas operatoru üçün

$$\Delta U = \operatorname{divgrad} U = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial U}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial U}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial \alpha_3} \right) \right] \quad (6.1.26)$$

ifadəsini alırıq.

§6.2. Yerdəyişmələrlə ifadə olunmuş pyezoelastiklik tənlikləri

Bundan sonra pyezokeramikanın elastiklik nəzəriyyəsinin köməyi ilə öyrənilməsinə pyezoelastiklik deyəcəyik.

Pyezoelastikliyin əsas riyazi münasibətləri dedikdə pyezokeramik cisimlər üçün hal tənlikləri və onlardan əlavə deformatsiyalarla yerdəyişmələr, gərginliklərlə deformatsiyalar arasındakı münasibətləri, hərəkət tənliklərini, Maksvell tənlikləri və uyğun başlanğıc və sərhəd şərtlərini nəzərdə tuturlar.

Bu dediklərimizin öyrənilməsində elastiklik nəzəriyyəsinin aşağıdakı məlum münasibətlərinə istinad edəcəyik. Məlum olduğu kimi [54] deformatsiyalar əyrixətli ortoqonal koordinat sistemində yerdəyişmələr vasitəsi ilə belə ifadə olunurlar

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2h_i h_j} \left[h_i^2 \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{u_i}{h_i} \right) + h_j^2 \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{u_j}{h_j} \right) \right] \quad i \neq j \quad (6.2.1)$$

Burada silindrik koordinat sistemində keçmək üçün

$$x_1 = R \cos \theta, \quad x_2 = R \sin \theta, \quad x_3 = x_3 \quad (6.2.2.)$$

düsturlarından istifadə etsək alırıq:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2 + dz^2 \quad (6.2.3)$$

(6.2.3)-ü (6.1.15) ilə müqayisə etsək, silindrik sistem üçün $h_1=1$, $h_2=R$, $h_3=1$ olması nəticəsinə gəlirik. Bundan əlavə $u_1=u_2$, $u_2=u_3$, $u_3=u_z$

$$\begin{aligned} u_1 = u_2, \quad u_2 = u_3, \quad u_3 = u_z, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{rr}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{\theta\theta}, \\ \varepsilon_{33} = \varepsilon_{zz}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{r\theta}, \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{\theta z}, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{rz}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

işarələrini daxil etsək (6.2.1)-dən alarıq:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right); \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_{z\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Əyrixətli koordinat sistemində gərginlikləri deformasiyalara uyğun işarə edirlər. Əyrixətli elementin üzlərinə nolmal təsir edən gərginlikləri uyğun olaraq σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} ilə işarə edirik, toxunan komponentləri isə σ_{rz} , $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta z}$ kimi işarə edirik. Onda gərginlik və deformasiya komponentləri arasında əlaqələr dekart koordinat sistemində

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda e; \quad \sigma_{yy} = 2\mu\varepsilon_{yy} + \lambda e; \quad \sigma_{zz} = 2\mu\varepsilon_{zz} + \lambda e \\ \sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy}; \quad \sigma_{xz} = 2\mu\varepsilon_{xz}; \quad \sigma_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz} \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

düsturları ilə, silindrik koordinat sistemində isə

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = 2\mu\varepsilon_{rr} + \lambda e; \quad \sigma_{\theta\theta} = 2\mu\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda e; \quad \sigma_{zz} = 2\mu\varepsilon_{zz} + \lambda e \\ \sigma_{r\theta} = 2\mu\varepsilon_{r\theta}; \quad \sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz}; \quad \sigma_{z\theta} = 2\mu\varepsilon_{z\theta} \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

düsturları ilə ifadə olunurlar.

Hər iki halda

$$e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad \text{və} \quad e = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} \quad (6.2.8)$$

$$x_1 = r \sin \nu \cos \varphi; x_2 = r \sin \nu \sin \varphi; x_3 = r \cos \nu \quad (6.2.9)$$

$$0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq \nu < \pi.$$

Bu halda

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \nu d\varphi^2 + r^2 d\nu^2$$

$$\text{və buradan} \quad h_1 = 1, h_2 = r \sin \nu, h_3 = r \quad (6.2.10)$$

$$\text{Yenə də } u_1 = u_z, u_2 = u_\varphi, u_3 = u_\nu \text{ vƏ } \varepsilon_{11} = \varepsilon_{rr}, \varepsilon_{22} = \varepsilon_{\varphi\varphi},$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{\nu\nu}, \varepsilon_{23} = \varepsilon_{\varphi\nu}, \varepsilon_{31} = \varepsilon_{r\theta}, \varepsilon_{12} = \varepsilon_{r\varphi}$$

desək (6.2.1)-dən və (6.2.10)-dan alırıq

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin \nu} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \operatorname{ctg} \nu \frac{u_\nu}{r};$$

$$\varepsilon_{\varphi\nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_\nu}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}; \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r \sin \nu} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right] \quad (6.2.11)$$

$$\varepsilon_{\nu\nu} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \nu} - \frac{u_\nu}{r} + \frac{\partial u_\nu}{\partial r} \right]$$

$$\varepsilon_{\varphi\nu} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \nu} - \frac{u_\varphi}{r} \operatorname{ctg} \nu + \frac{1}{r \sin \nu} \frac{\partial u_\nu}{\partial \varphi} \right]$$

Sferik koordinat sistemində də gərginlik və deformasiya komponentləri arasındakı asılılıq

$$\sigma_{rr} = 2\mu\varepsilon_{rr} + \lambda e; \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda e; \quad \sigma_{\nu\nu} = 2\mu\varepsilon_{\nu\nu} + \lambda e$$

$$\sigma_{r\varphi} = 2\mu\varepsilon_{r\varphi}; \quad \sigma_{r\nu} = 2\mu\varepsilon_{r\nu}; \quad \sigma_{\varphi\nu} = 2\mu\varepsilon_{\varphi\nu} \quad (6.2.12)$$

$$e = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\nu\nu} + \varepsilon_{\varphi\varphi}$$

düsturları ilə təyin olunurlar.

Xüsusi halda deformasiya vəziyyəti mərkəzi simmetriya xarakterli olarsa, onda deformasiyalar ancaq r dəyişəninin funksiyaları olurlar və belə təyin olunurlar

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\nu\nu} = \frac{u_r}{r}; \quad \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\varphi\theta} = 0 \quad (6.2.13)$$

(6.1.8) və (6.2.9) münasibətlərindən alınır ki, bu xüsusi halda

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu\varepsilon_{rr} + \lambda e & \sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{\nu\nu} = 2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda e \\ \sigma_{r\varphi} &= \sigma_{\varphi r} = \sigma_{r\nu} = 0 & e &= \varepsilon_{rr} + 2\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\frac{u_r}{r} \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

Əyrixətli ortoqonal koordinat sistemində hərəkət tənliyi aşağıdakı kimidir [54]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_i g) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{g\sigma_{kk}}{h_k^2} \frac{\partial h_k^2}{\partial x_i} + \\ + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left(\frac{g\sigma_{ik} h_i}{h_k} \right) + x_i g h_i = 0 \end{aligned} \quad (6.2.15)$$

Burada $g=h_1 h_2 h_3$.

(6.2.15) tənlikləri silindrik koordinat sistemində aşağıdakı şəkllə düşürlər:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + X_r = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + 2\frac{\sigma_{r\varphi}}{r} + X_\varphi = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + X_z = 0 \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

burada X_r , X_φ , X_z – həcmi qüvvələrdir (dinamik məsələlərdə ədalət qüvvələridir).

(6.2.15) tənliyi sferik sistemdə belə yazılırlar.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \nu} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\nu}}{\partial \nu} + \\
& + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\nu\nu} - \text{ctg}\nu \sigma_{r\nu}}{r} + X_r = 0 \\
& \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \nu} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\nu\nu}}{\partial \nu} + \\
& + \frac{3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\varphi\nu} \text{ctg}\nu}{r} + X_\varphi = 0 \\
& \frac{\partial \sigma_{r\nu}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \nu} \frac{\partial \sigma_{\varphi\nu}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\nu\nu}}{\partial \nu} + \\
& + \frac{3\sigma_{r\varphi} + (\sigma_{\nu\nu} - \sigma_{\varphi\varphi}) \text{ctg}\nu}{r} + X_\nu = 0
\end{aligned} \tag{6.2.17}$$

(6.2.16) və (6.2.8) sistemində gərginlik komponentlərini (6.2.6) düsturları vasitəsi ilə deformasiya komponentləri ilə, deformasiya komponentlərini isə uyğun olaraq (6.2.5) və (6.2.11) düsturları vasitəsi ilə yerdəyişmələrlə ifadə olunmuş hərəkət tənliklərini belə yazıb bilərik:

a) silindrik koordinat sistemində:

$$\begin{aligned}
& \mu \left(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - 2 \frac{\partial u_\varphi}{r^2 \partial \varphi} \right) + \\
& + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + X_r = 0 \\
& \mu \left(\Delta u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) + \\
& + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + X_\varphi = 0 \\
& \mu \Delta u_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + X_z = 0
\end{aligned} \tag{6.2.18}$$

b) sferik sistemdə :

$$\mu \left\{ \Delta u_r - \frac{2}{r^2} \left[u_r + \frac{1}{\sin \nu} \frac{\partial}{\partial \nu} (u_\nu \sin \nu) + \frac{1}{\sin \nu} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] \right\} + (\lambda + \mu) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \nu} \frac{\partial}{\partial \nu} (u_\nu \sin \nu) + \frac{1}{r \sin \nu} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] + X_r = 0 \quad (6.2.19)$$

$$\mu \left\{ \Delta u_\nu - \frac{2}{r^2} \left[\frac{\partial u_r}{\partial \nu} - \frac{1}{2 \sin^2 \nu} u_\nu - \frac{\cos \nu}{\sin \nu} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] \right\} + (\lambda + \mu) \frac{1}{r} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \nu} \frac{\partial}{\partial \nu} (u_\nu \sin \nu) + \frac{1}{r \sin \nu} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] + X_\nu = 0$$

$$\mu \left\{ \Delta u_\varphi - \frac{2}{r^2 \sin \nu} \left[\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \nu \frac{\partial u_\nu}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{2 \sin \nu} \right] \right\} + \frac{\lambda + \mu}{r \sin \nu} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \nu} \frac{\partial}{\partial \nu} (u_\nu \sin \nu) + \frac{1}{r \sin \nu} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] + X_z = 0$$

Burada

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \nu} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\sin \nu \frac{\partial}{\partial \nu} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \nu} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (6.2.20)$$

sferik sistemdə Laplas operatorudur.

Pyezoelastiklik tənliklər sistemini tam sistemə gətirmək üçün elastiklik nəzəriyyəsinin yuxarıda göstərdiyimiz tənliklərinə deformasiyaların birgəlik şərtlərini və termodinamikadan məlum olan Maksvell tənliklərini də qoşmaq lazımdır. Onlar ümumi halda əyrixətli ortoqonal koordinat sistemində aşağıdakı kimi yazılırlar:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(E_3 h_3)}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial(E_2 h_2)}{\partial \alpha_3} \right] \bar{i} + \frac{1}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial(E_1 h_1)}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial(E_2 h_2)}{\partial \alpha_1} \right] \bar{j} + \\
& + \frac{1}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial(E_2 h_2)}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial(E_1 h_1)}{\partial \alpha_2} \right] \bar{k} = -\frac{\partial B}{\partial t} \rightarrow r_0 t E = -\frac{\partial B}{\partial t} \\
& \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(H_3 h_3)}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial(H_2 h_2)}{\partial \alpha_3} \right] \bar{i} + \frac{1}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial(H_1 h_1)}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial(H_2 h_2)}{\partial \alpha_1} \right] \bar{j} + \\
& + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(H_2 h_2)}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial(H_1 h_1)}{\partial \alpha_2} \right] \bar{k} = -\frac{\partial B}{\partial t} \rightarrow r_0 t H = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (6.2.21) \\
& \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_2 h_3 D_1)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(h_1 h_3 D_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 D_3)}{\partial \alpha_3} \right] = \rho_e \rightarrow \operatorname{div} D = \rho_e \\
& \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_2 h_3 B_1)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(h_1 h_3 B_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 B_3)}{\partial \alpha_3} \right] = 0 \rightarrow \operatorname{div} B = 0
\end{aligned}$$

Burada H_1, H_2, H_3 – dielektrik olmadıqda maqnit sahəsinin gərginlik vektorunun; E_1, E_2, E_3 – elektrik sahəsinin gərginlik vektorunun; D_1, D_2, D_3 – elektrik induksiya vektorunun komponentləridir.

B_1, B_2, B_3 – maqnit induksiya vektorunun komponentləridir.

Pyzeoelektrikliyin yerdəyişmələrdə hərəkət tənliklərini bir-başına almaq üçün, dekart koordinat sistemində elastiklik nəzəriyyəsinin

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (6.2.22)$$

tənliklərindən və

$$T_i = c_{ij}^D S_j - e_{mi} E_m \quad D_m = e_{mi} S_i + \varepsilon_{mn}^S E_n \quad (6.2.23)$$

hal tənliklərindən istifadə edirik.

Xətti pyzeoelektriklərdə sərbəst yüklərin və keçiricilik cərəyanının olmamasını nəzərə alaraq elektromaqnit şüalan-

masının rolunu nəzərə almasaq Maksivell tənliklərini belə yazı bilərik:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (h_2 h_3 D_1) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (h_1 h_3 D_2) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (h_1 h_2 D_3) = 0 \quad (6.2.24)$$

$$E = - \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_3} \right) \rightarrow E_i = - \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i}$$

Onda (6.1.23) tənlikləri qalınlıq istiqamətində polyarlaşmış pyezokeramika üçün aşağıdakı şəkllə düşürlər:

$$\begin{aligned} T_1 &= c_{11}^E \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12}^E \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{13}^E \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + e_{31} \frac{\partial u_4}{\partial x_3} \\ T_2 &= c_{12}^E \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{11}^E \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{13}^E \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + e_{31} \frac{\partial u_4}{\partial x_3} \\ T_3 &= c_{13}^E \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + c_{33}^E \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + e_{33} \frac{\partial u_4}{\partial x_3} \\ T_4 &= c_{44}^E \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + e_{15} \frac{\partial u_4}{\partial x_2} \\ T_5 &= c_{44}^E \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + e_{15} \frac{\partial u_4}{\partial x_1} \\ T_6 &= c_{66}^E \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ D_1 &= e_{15} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) - \epsilon_{11}^S \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ D_2 &= e_{15} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) - \epsilon_{11}^S \frac{\partial u_4}{\partial x_2} \\ D_3 &= e_{31} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) - e_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \epsilon_{11}^S \frac{\partial u_4}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (6.2.25)$$

Burada münasiblik xətinə $\varphi = u_4$ demişik. (6.2.25) ifadələrini (6.2.22)-də yazsaq, tenzor şəklində yazılmış u_1, u_2, u_3 və u_4 məchullarının daxil olduğu dörd tənlikdən ibarət sistem alırıq:

$$L_{ij} u_j = 0 \quad (6.2.26)$$

Burada L_{ij} xətti diferensial operatorlardır və (6.1.25)-ni (6.1.22)-də və (6.2.24)-in birincisində yazmaqla tapılırlar.

Məsələn, (6.2.22) tənliklərinə baxaq. O bizim işarələrlə belə yazılır:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial T_6}{\partial x_2} + \frac{\partial T_5}{\partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial T_6}{\partial x_1} + \frac{\partial T_2}{\partial x_2} + \frac{\partial T_4}{\partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial T_5}{\partial x_1} + \frac{\partial T_4}{\partial x_2} + \frac{\partial T_3}{\partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (6.2.27)$$

Bu tənliklərdə T_i ($i = \overline{1,6}$) (6.1.25)-dəki ifadələrini yazıb alırıq:

$$\begin{aligned} &\left(c_{11}^E \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + c_{66}^E \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + c_{44}^E \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_1 + (c_{12}^E + c_{66}^E) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \\ &+ (c_{13}^E + c_{44}^E) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_3} = 0 \\ &(c_{12}^E + c_{66}^E) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(c_{66}^E \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + c_{11}^E \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + c_{44}^E \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_2 + \\ &+ (c_{13}^E + c_{44}^E) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 \end{aligned} \quad (6.2.28)$$

$$\begin{aligned} & \left(c_{11}^E + c_{44}^E \right) \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \left(c_{11}^E + c_{44}^E \right) \frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \left[c_{44}^E \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + \right. \\ & \left. + c_{33}^E \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathbf{u}_3 + \left[e_{15} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + e_{33} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] \mathbf{u}_4 = 0 \end{aligned}$$

İnduksiya vektorunun D_1 , D_2 , D_3 komponentlərinin (6.2.25)-dakı ifadələrini (6.2.24)-in biricinsində yazıb daha bir tənlik alırıq:

$$\begin{aligned} & \left(e_{15} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} + e_{31} \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \right) \mathbf{u}_1 + \\ & + \left(e_{15} \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} + e_{31} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \mathbf{u}_2 + \\ & + \left[e_{15} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + e_{33} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] \mathbf{u}_3 - \\ & - \left[\varepsilon_{11}^S \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + \varepsilon_{33}^S \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] \mathbf{u}_4 = 0 \end{aligned} \tag{6.2.29}$$

Beləliklə, tapırıq ki:

$$L_{11} = c_{11}^E \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + c_{66}^E \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + c_{44}^E \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Delta_1 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square_1$$

$$L_{22} = c_{66}^E \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + c_{11}^E \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + c_{44}^E \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Delta_2 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square_2$$

$$L_{33} = c_{44}^E \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + c_{33}^E \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Delta_3 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square_3$$

$$L_{12} = \left(c_{12}^E + c_{66}^E \right) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} = L_{21}; \quad L_{13} = \left(c_{13}^E + c_{44}^E \right) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}$$

$$\begin{aligned}
L_{14} &= (\mathbf{e}_{31} + \mathbf{e}_{15}) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1 \partial \mathbf{x}_3}; & L_{23} &= (\mathbf{c}_{13}^E + \mathbf{c}_{44}^E) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2 \partial \mathbf{x}_3} = L_{21} \\
L_{24} &= (\mathbf{e}_{31} + \mathbf{e}_{15}) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1 \partial \mathbf{x}_3}; & L_{31} &= L_{13}; L_{32} = L_{23}; \\
L_{34} &= \mathbf{e}_{15} \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} \right) + \mathbf{e}_{33} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_3^2} = \Delta_4; \\
L_{41} &= \mathbf{e}_{15} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1 \partial \mathbf{x}_3} + \mathbf{e}_{31} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2 \partial \mathbf{x}_3}; & L_{42} &= \mathbf{e}_{15} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2 \partial \mathbf{x}_3} + \mathbf{e}_{31} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1 \partial \mathbf{x}_3} \\
L_{43} &= \mathbf{e}_{15} \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} \right) + \mathbf{e}_{33} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_3^2} = \Delta_4 \\
L_{43} &= -\Delta_5 = \boldsymbol{\varepsilon}_{11}^S \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} \right) - \boldsymbol{\varepsilon}_{33}^S \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_3^2}
\end{aligned} \tag{6.2.30}$$

Burada işarə olunub:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \mathbf{c}_{11}^E \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} + \mathbf{c}_{66}^E \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} + \mathbf{c}_{44}^E \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_3^2} \\
\Delta_2 &= \mathbf{c}_{66}^E \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} + \mathbf{c}_{11}^E \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} + \mathbf{c}_{44}^E \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_3^2} \\
\Delta_3 &= \mathbf{c}_{44}^E \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} \right) + \mathbf{c}_{33}^E \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_3^2} \\
\Delta_4 &= \mathbf{e}_{15} \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} \right) + \mathbf{e}_{33} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_3^2} \\
\Delta_5 &= \boldsymbol{\varepsilon}_{11}^S \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} \right) + \boldsymbol{\varepsilon}_{33}^S \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_3^2}
\end{aligned} \tag{6.2.31}$$

$$\square_1 = \Delta_1 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad \square_2 = \Delta_2 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad \square_3 = \Delta_3 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Δ_n ($n=1,5$) operatorlarına anizotrop Laplas, \square_p ($p=1,3$) operatorlarına isə Dalamber operatorları deyilir.

(5.12.1), (5.12.2) cədvəlləri və (6.2.23) hal tənliklərinə əsasən silindrik koordinat sistemində

$$\begin{aligned} T_1 &= T_{rr} = c_{11}^E S_{rr} + c_{12}^E S_{\theta\theta} + c_{13}^E S_{zz} - e_{31} E_3 \\ T_2 &= T_{\theta\theta} = c_{12}^E S_{rr} + c_{22}^E S_{\theta\theta} + c_{13}^E S_{zz} - e_{31} E_3 \\ T_3 &= T_{zz} = c_{13}^E S_{rr} + c_{13}^E S_{\theta\theta} + c_{33}^E S_{zz} - e_{33} E_3 \\ T_4 &= T_{rz} = c_{44}^E S_{rz} - e_{15} E_2 \\ T_5 &= T_{\theta z} = c_{44}^E S_{\theta z} - e_{15} E_1 \\ T_6 &= T_{r\theta} = c_{66}^E S_{r\theta} \\ D_r &= e_{15} S_{r\theta} + \varepsilon_{11} E_r \\ D_\theta &= e_{15} S_{r\theta} + \varepsilon_{11} E_\theta \\ D_z &= e_{31} (S_{rr} + S_{\theta\theta}) + e_{33} S_{zz} + \varepsilon_{33} E_z \end{aligned} \tag{6.2.32}$$

(6.2.6) ifadələrini (6.2.32)-də yazsaq alırıq:

$$\begin{aligned} T_{rr} &= \left(c_{11}^E \frac{\partial}{\partial r} + c_{12}^E \frac{1}{r} \right) u_r + \left(c_{12}^E \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u_\theta + c_{13}^E \frac{\partial u_z}{\partial z} - e_{13} \frac{\partial u_4}{\partial z} \\ T_{\theta\theta} &= \left(c_{12}^E \frac{\partial}{\partial r} + c_{22}^E \frac{1}{r} \right) u_r + \left(c_{22}^E \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u_\theta + c_{13}^E \frac{\partial u_z}{\partial z} - e_{13} \frac{\partial u_4}{\partial z} \\ T_{zz} &= c_{13}^E \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) u_r + \left(c_{13}^E \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u_\theta + c_{33}^E \frac{\partial u_z}{\partial z} - e_{33} \frac{\partial u_4}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{rz} &= c_{44}^E \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) - e_{15} \frac{\partial u_4}{\partial r} \\
T_{z\theta} &= c_{44}^E \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) - e_{15} \frac{\partial u_4}{\partial r} \\
T_{\theta r} &= c_{66}^E \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_r}{r} \right) \\
D_r &= e_{15} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) + \varepsilon_{11} E_r \\
D_\theta &= e_{15} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) + \varepsilon_{11} E_\theta \\
D_z &= e_{15} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \varepsilon_{33} E_r
\end{aligned} \tag{6.2.33}$$

(6.2.32)-ni (6.2.16)-də yazaraq. Onda (6.2.26) şəkilli tənliklər sistemini alarıq və uyğun xətti diferensial L_{ij} operatorlarının aşağıdakı kimi olduqlarını görürük.

$$\begin{aligned}
L_{11} = \square_1 = \Delta_1 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad \Delta_1 &= c_{11}^E \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) + c_{66}^E \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + c_{44}^E \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
L_{22} = \square_2 = \Delta_2 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad \Delta_2 &= c_{66}^E \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) + c_{11}^E \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + c_{44}^E \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
L_{33} = \square_3 = \Delta_3 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad \Delta_3 &= c_{44}^E \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + c_{33}^E \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
\Delta_4 &= e_{15} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + e_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
\Delta_5 &= \varepsilon_{11} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + e_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{6.2.34}$$

$$\begin{aligned}
L_{12} &= (c_{12}^E + c_{66}^E) \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - (c_{11}^E + c_{66}^E) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \\
L_{13} &= (c_{13}^E + c_{44}^E) \frac{\partial^2}{\partial r \partial z}; \quad L_{14} = (e_{31} + e_{15}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} \\
L_{21} &= (c_{12}^E + c_{66}^E) \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + (c_{11}^E + c_{66}^E) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \\
L_{23} &= (c_{13}^E + c_{44}^E) \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}; \quad L_{24} = (e_{31} + e_{15}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \\
L_{31} &= (c_{13}^E + c_{44}^E) \left(\frac{\partial^2}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \right); \quad L_{32} = L_{23} \\
L_{34} &= \Delta_4; \quad L_{41} = (e_{31} + e_{15}) \left(\frac{\partial^2}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \right); \\
L_{43} &= L_{34} = \Delta_4; \quad L_{44} = -\Delta_5.
\end{aligned}$$

(6.2.12) və (6.2.23) münasibətlərinə əsasən sferik sistemdə gərginliklər və yerdəyişmələr arasında aşağıdakı münasibətləri alırıq:

$$\begin{aligned}
T_{rr} &= c_{11}^E \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{12}^E \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\nu}{\partial \nu} + \frac{\partial u_r}{r} \right) + \\
&+ c_{13}^E \left(\frac{1}{r \sin \nu} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \operatorname{ctg} \nu \frac{u_\nu}{r} \right) - e_{31} E_\varphi \\
T_{\nu\nu} &= c_{21}^E \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{11}^E \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\nu}{\partial \nu} + \frac{\partial u_r}{r} \right) + \\
&+ c_{13}^E \left(\frac{1}{r \sin \nu} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \operatorname{ctg} \nu \frac{u_\nu}{r} \right) - e_{31} E_\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\varphi\varphi} &= c_{31}^E \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{31}^E \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_v}{\partial v} + \frac{u_r}{r} \right) + \\
&+ c_{33}^E \left(\frac{1}{r \sin v} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \operatorname{ctgv} \frac{u_v}{r} \right) - e_{33} E_\varphi \\
T_{r\varphi} &= c_{44}^E \left(\frac{1}{r \sin v} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) - e_{15} E_v \\
T_{v\varphi} &= c_{44}^E \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial v} - \frac{u_\varphi}{r} \operatorname{ctgv} + \frac{1}{r \sin v} \frac{\partial u_v}{\partial \varphi} \right) - e_{15} E_r \quad (6.2.35) \\
T_{r\theta} &= c_{66}^E \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial v} - \frac{u_v}{r} + \frac{\partial u_v}{\partial r} \right) \\
D_r &= e_{31} \left(\frac{1}{r \sin v} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_v}{r} \operatorname{ctg}\theta \right) + \varepsilon_{11} E_r \\
D_v &= e_{31} \left(\frac{1}{r \sin v} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_v}{r} \operatorname{ctg}\theta \right) + \varepsilon_{11} E_v \\
D_\varphi &= e_{31} \frac{\partial u_r}{\partial r} + e_{33} \left(\frac{1}{r \sin v} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_v}{r} \operatorname{ctg}\theta \right) + \varepsilon_{33} E_\varphi
\end{aligned}$$

Bunları (6.2.17)-də və (6.2.24)-ün birincisində yazıb lazımı riyazi əməlləri yerinə yetirərək alınan tənlikləri (6.1.27) şəklinə gətirməklə təyin edirik:

$$\begin{aligned}
L_{11} &= \Delta_1 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square_1 \\
\Delta_1 &= c_{33}^E \left(\frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + 2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{2}{r^2} (c_{13}^E + c_{12}^E - c_{11}^E) + c_{66}^E \frac{1}{r^2 \sin^2 v} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \\
&+ c_{44}^E \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{1}{r^2} \operatorname{ctgv} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= c_{66}^E \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) - (2c_{66}^E - c_{44}^E + c_{44}^E \operatorname{tg}^2 \nu) \frac{1}{r^2} + \\
&+ c_{11}^E \frac{1}{r^2 \sin^2 \nu} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + c_{44}^E \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \frac{1}{r^2} \operatorname{ctgv} \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \\
\Delta_3 &= c_{44}^E \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) - (2c_{44}^E + c_{12}^E + c_{11}^E \operatorname{ctg}^2 \nu) \frac{1}{r^2} + \\
&+ \frac{c_{44}^E}{r^2 \sin^2 \nu} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + c_{11}^E \left(\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \operatorname{ctgv} \right) \frac{1}{r^2} \\
\Delta_4 &= (e_{31} + e_{15}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \nu} + e_{15} \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \nu} + \frac{e_{15}}{r^2 \sin^2 \nu} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\
\Delta_5 &= \varepsilon_{11} \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \nu} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \frac{1}{r^2} \operatorname{ctgv} \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \\
L_{12} &= \frac{1}{r \sin \nu} (c_{13}^E + c_{66}^E) \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + (c_{13}^E - c_{12}^E - c_{12}^E - c_{66}^E) \frac{1}{r^2 \sin \nu} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\
L_{13} &= (c_{13}^E + c_{44}^E) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \nu} + (c_{13}^E + c_{44}^E) \frac{1}{r} \operatorname{ctgv} \frac{\partial}{\partial r} + \\
&+ (c_{13}^E - c_{11}^E - c_{12}^E - c_{44}^E) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \nu} + (c_{13}^E - c_{11}^E - c_{12}^E - c_{44}^E) \frac{1}{r^2} \operatorname{ctgv} \\
L_{14} &= e_{33} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} (e_{33} - e_{31}) \frac{\partial}{\partial \nu} + e_{15} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \frac{1}{r^2} \operatorname{ctgv} \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \\
L_{21} &= -(c_{13}^E + c_{66}^E) \frac{1}{r \sin \nu} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + (c_{11}^E + c_{12}^E + 2c_{66}^E) \frac{1}{r^2 \sin \nu} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\
L_{22} &= \Delta_2 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square_2 \tag{6.2.36} \\
L_{23} &= (c_{12}^E + c_{44}^E) \frac{1}{r^2 \sin \nu} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \nu} + (c_{11}^E + c_{44}^E) \frac{\cos \nu}{r^2 \sin^2 \nu}
\end{aligned}$$

$$L_{24} = e_{31} \frac{1}{r \sin \nu} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + e_{15} \frac{2}{r^2 \sin \nu} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \nu} + \cos \nu \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$L_{31} = (c_{13}^E + c_{44}^E) \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \nu} + (c_{11}^E + c_{12}^E + 2c_{44}^E) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \nu}$$

$$L_{32} = (c_{12}^E + c_{44}^E) \frac{1}{r^2 \sin \nu} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \nu} - (c_{11}^E + c_{44}^E) \frac{\cos \nu}{r^2 \sin^2 \nu} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$L_{33} = \Delta_3 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square_3; L_{34} = \Delta_4$$

$$L_{41} = e_{33} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (e_{31} + e_{33}) \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2e_{31}}{r^2} +$$

$$+ e_{15} \left[\frac{1}{r^2 \sin^2 \nu} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + r^2 \operatorname{ctg} \nu \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} \right]$$

$$L_{42} = (e_{31} + e_{15}) \frac{1}{r \sin \nu} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + (e_{31} - e_{15}) \frac{1}{r^2 \sin \nu} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$L_{43} = (e_{31} + e_{15}) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \nu} + \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \nu \frac{\partial}{\partial r} \right) + (e_{31} - e_{15}) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \nu} + \frac{\operatorname{ctg} \nu}{r^2} \right)$$

$$L_{44} = -\Delta_5.$$

Beləliklə, ortoqonad dekart, silindrik və sferik koordinat sistemində pyzeoelastikliyin yerdəyişmələrlə ifadə olunmuş hərəkət tənliklərini çıxarmış olduq.

§6.3. Gərginliklərlə ifadə olunmuş pyzeoelastiklik tənlikləri

Gərginliklərlə ifadə olunmuş pyzeoelastiklik tənliklərini almaq üçün tez-tez elastiklik nəzəriyyəsiəndən məlum olan ümumiləmiş Beltrami-Mitçel tənliklərindən istifadə olunur. Pyzeoelastiklik üçün ümumiləmiş Beltrami-Mitçel tənlikləri almaq üçün biz deformasiyaların birgəlik şərti olan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 S_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 S_2}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial^2 S_6}{\partial x_1 x_2} & 2 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x_2 x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial S_6}{\partial x_3} + \frac{\partial S_5}{\partial x_2} - \frac{\partial S_4}{\partial x_1} \right) \\
\frac{\partial^2 S_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 S_3}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial^2 S_4}{\partial x_2 x_3} & 2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial x_1 x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial S_5}{\partial x_1} - \frac{\partial S_4}{\partial x_2} + \frac{\partial S_6}{\partial x_3} \right) \\
\frac{\partial^2 S_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial x_3^2} &= \frac{\partial^2 S_5}{\partial x_1 x_3} & 2 \frac{\partial^2 S_3}{\partial x_1 x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial S_4}{\partial x_1} + \frac{\partial S_5}{\partial x_2} - \frac{\partial S_6}{\partial x_3} \right)
\end{aligned} \tag{6.3.1}$$

şərtlərindən və yenə də elastiklik nəzəriyyəsinin məlum

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial T_6}{\partial x_2} + \frac{\partial T_4}{\partial x_3} &= X \\
\frac{\partial T_6}{\partial x_1} + \frac{\partial T_2}{\partial x_2} + \frac{\partial T_5}{\partial x_3} &= Y \\
\frac{\partial T_4}{\partial x_1} + \frac{\partial T_5}{\partial x_2} + \frac{\partial T_3}{\partial x_3} &= Z
\end{aligned} \tag{6.3.2}$$

tənliklərindən istifadə edəcəyik.

(6.3.2)-dən alırıq:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial x_1} + \frac{\partial Y}{\partial x_2} - \frac{\partial Z}{\partial x_3} &= \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 T_3}{\partial x_3^2} + 2 \frac{\partial^2 T_6}{\partial x_1 \partial x_2} \\
\frac{\partial X}{\partial x_1} + \frac{\partial Y}{\partial x_3} - \frac{\partial Z}{\partial x_1} &= \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T_3}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 T_5}{\partial x_2 \partial x_3} \\
\frac{\partial X}{\partial x_1} + \frac{\partial Y}{\partial x_3} - \frac{\partial Z}{\partial x_2} &= \frac{\partial^2 T_3}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 T_4}{\partial x_1 \partial x_3}
\end{aligned} \tag{6.3.3}$$

$$\begin{aligned}
S_i &= s_{ij}^E T_j + d_{mi} E_i \\
D_m &= d_{mi} T_i + \varepsilon_{nm}^T E_n
\end{aligned} \tag{6.3.4}$$

hal tənliklərinə və (4.12.2), (4.12.3) cədvəllərinə əsasən izotermik proses üçün yazı bilərik:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= s_{11}^E T_1 + s_{12}^E T_2 + s_{13}^E T_3 + d_{31} E_3 \\
 S_2 &= s_{12}^E T_1 + s_{22}^E T_2 + s_{13}^E T_3 + d_{31} E_3 \\
 S_3 &= s_{31}^E (T_1 + T_2) + s_{33}^E T_3 + d_{33} E_3 \\
 S_4 &= s_{44}^E T_4 + d_{15} E_2 \\
 S_5 &= s_{44}^E T_5 + d_{15} E_1 \\
 S_4 &= 2(s_{11}^E - s_{12}^E) T_6 \\
 D_1 &= d_{15} T_5 + \varepsilon_{11}^T E_1 \\
 D_2 &= d_{15} T_4 + \varepsilon_{11}^T E_2 \\
 D_3 &= d_{31} (T_1 + T_2) + d_{33} T_3 + \varepsilon_{33}^T E_3
 \end{aligned} \tag{6.3.5}$$

(6.3.5) münasibətlərini onlarla ekvivalent olmaqla istifadə üçün daha əlverişli aşağıdakı şəkildə yazıq:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= s_{11}^E [(1 + \nu_{12}) T_1 - \nu_{12} \Sigma + (\nu_{12} - \nu_{13}) T_3] + d_{31} E_3 \\
 S_2 &= s_{11}^E [(1 + \nu_{12}) T_2 - \nu_{12} \Sigma + (\nu_{12} - \nu_{13}) T_3] + d_{31} E_3 \\
 S_3 &= s_{11}^E [(1 + \nu_{12}) T_3 - \nu_{12} \Sigma + (\nu_{12} - \nu_{13})(T_1 + T_2) + (\nu_{33} - 1) T_3] + d_{33} E_3 \\
 S_4 &= 2s_{11}^E \nu_{44} T_4 \quad S_5 = 2s_{11}^E \nu_{44} T_5 + d_{15} E_1 \\
 S_6 &= 2(S_{11} - S_{12}) T_6 = 2s_{11}^E (1 + \nu_{12}) T_6
 \end{aligned} \tag{6.3.6}$$

$$\text{Burada } \Sigma = T_1 + T_2 + T_3, \quad \nu_{12} = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E}; \quad \nu_{13} = -\frac{s_{13}^E}{s_{11}^E} \tag{6.3.7}$$

$$\nu_{33} = \frac{s_{33}^E}{s_{11}^E}; \quad \nu_{44} = -\frac{s_{44}^E}{2s_{11}^E} \text{ işarələri qəbul olunub.}$$

İzotrop materiallar üçün $\nu_{13} = \nu_{12} = \nu$, $\nu_{33} = 1$, $\nu_{44} = 1 + \nu$

(6.3.6) deformasiyalarını (6.3.1) bərabərliklərinin birinci üçündə yazıb alırıq:

$$\begin{aligned}
 & (1 + \nu_{12}) \frac{\partial^2 \mathbf{T}_1}{\partial \mathbf{x}_2^2} + (1 + \nu_{12}) \frac{\partial^2 \mathbf{T}_2}{\partial \mathbf{x}_1^2} + (\nu_{12} - \nu_{13}) \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} \right) \mathbf{T}_3 - \\
 & - \nu_{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} \right) \Sigma + \frac{\mathbf{d}_{31}^E}{s_{11}^E} \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} \right) \mathbf{E}_3 = 2(1 + \nu_{12}) \frac{\partial^2 \mathbf{T}_6}{\partial \mathbf{x}_1 \partial \mathbf{x}_2} \\
 & \left[(1 + \nu_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_3^2} + (\nu_{12} - \nu_{13}) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} \right] \mathbf{T}_2 + \\
 & + \left[(\nu_{33} - 1) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} + (\nu_{12} - \nu_{13}) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_3^2} \right] \mathbf{T}_3 + (\nu_{12} - \nu_{13}) \frac{\partial^2 \mathbf{T}_1}{\partial \mathbf{x}_2^2} - \\
 & - \nu_{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} \right) \Sigma + \left[\frac{\mathbf{d}_{33}^E}{s_{11}^E} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} + \frac{\mathbf{d}_{31}^E}{s_{11}^E} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_3^2} \right] \mathbf{E}_3 - \\
 & - \frac{\mathbf{d}_{15}^E}{s_{11}^E} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_2}{\partial \mathbf{x}_1 \partial \mathbf{x}_3} = 2\nu_{44} \frac{\partial^2 \mathbf{T}_4}{\partial \mathbf{x}_2 \partial \mathbf{x}_3} \\
 & \left[(\nu_{12} - \nu_{44}) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} + (1 + \nu_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_3^2} \right] \mathbf{T}_1 + (\nu_{12} - \nu_{13}) \frac{\partial^2 \mathbf{T}_2}{\partial \mathbf{x}_2} + \\
 & + \lambda_{44} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_3^2} \mathbf{T}_2 + \left[(\nu_{33} + \nu_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} + (\nu_{12} - \nu_{13} + \nu_{44}) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_3^2} \right] \mathbf{T}_3 - \\
 & - \nu_{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_3^2} \right) \Sigma + \left[\frac{\mathbf{d}_{33}^E}{s_{11}^E} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} + \frac{\mathbf{d}_{31}^E}{s_{11}^E} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} \right] \mathbf{E}_3 - \\
 & - \frac{\mathbf{d}_{15}^E}{s_{11}^E} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_1}{\partial \mathbf{x}_1 \partial \mathbf{x}_3} = 2\nu_{44} \frac{\partial^2 \mathbf{T}_5}{\partial \mathbf{x}_1 \partial \mathbf{x}_3}
 \end{aligned} \tag{6.3.8}$$

Bu tənliklərin hər iki tərəfinə uyğun olaraq

$$(1 + \nu_{12}) \left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_1}{\partial \mathbf{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{T}_2}{\partial \mathbf{x}_2^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{T}_3}{\partial \mathbf{x}_3^2} \right); \quad \nu_{44} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_1}{\partial \mathbf{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{T}_3}{\partial \mathbf{x}_3^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{T}_2}{\partial \mathbf{x}_2^2} \right) \nu \vartheta$$

$$\nu_{44} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_2}{\partial \mathbf{x}_2^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{T}_3}{\partial \mathbf{x}_3^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{T}_1}{\partial \mathbf{x}_1^2} \right) \quad (6.3.9)$$

ifadələrini əlavə edib (6.3.3) bərabərliklərinə əsasən alırıq:

$$(1 + \nu_{12}) \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} \right) (\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2) +$$

$$+ \left[(\nu_{12} - \nu_{13}) \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} \right) - (1 + \nu_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_3^2} \right] \mathbf{T}_3 - \nu_{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} \right) \Sigma +$$

$$+ \frac{\mathbf{d}_{31}}{s_{11}^E} \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} \right) \mathbf{E}_3 = (1 + \nu_{12}) \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}_1} + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{x}_2} - \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{x}_3} \right)$$

$$\left[(\nu_{12} - \nu_{13}) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} + \nu_{44} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} \right] \mathbf{T}_1 + \left[(1 + \nu_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_3^2} + (\nu_{12} - \nu_{13} - \nu_{44}) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} \right] \mathbf{T}_2 +$$

$$+ \left[(\nu_{33} + \nu_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} + (\nu_{12} - \nu_{13} - \nu_{44}) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_3^2} \right] \mathbf{T}_3 - \nu_{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_3^2} \right) \Sigma$$

$$+ \left[\frac{\mathbf{d}_{33}}{s_{11}^E} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} + \frac{\mathbf{d}_{31}}{s_{11}^E} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_3^2} \right] \mathbf{E}_3 - \frac{\mathbf{d}_{15}}{s_{11}^E} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_2}{\partial \mathbf{x}_2 \partial \mathbf{x}_3} = \nu_{44} \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}_1} + \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{x}_3} - \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{x}_2} \right) \quad (6.3.10)$$

$$\left[(\nu_{12} - \nu_{13} - \nu_{44}) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} + (1 + \nu_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_3^2} \right] \mathbf{T}_1 + \left[(\nu_{12} - \nu_{13}) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} - \right.$$

$$\left. - \nu_{44} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} \right] \mathbf{T}_2 + \left[(\nu_{33} - \nu_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} + (\nu_{12} - \nu_{13} + \nu_{44}) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_3^2} \right] \mathbf{T}_3 -$$

$$- \nu_{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_3^2} \right) \Sigma + \left[\frac{\mathbf{d}_{33}}{s_{11}^E} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} + \frac{\mathbf{d}_{31}}{s_{11}^E} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_3^2} \right] \mathbf{E}_3 -$$

$$- \frac{\mathbf{d}_{15}}{s_{11}^E} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_1}{\partial \mathbf{x}_1 \partial \mathbf{x}_3} = \nu_{44} \left(\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{x}_2} + \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{x}_3} - \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}_1} \right)$$

Bu tənliklər üzərində aşağıdakı analogi eyniyyət çevirmələri yerinə yetirək. Məsələn:

$$(1 + v_{12}) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (T_1 + T_2) \text{ ifadəsinə baxaq. Bunu belə}$$

çevirək:

$$\begin{aligned} & (1 + v_{12}) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (T_1 + T_2) = \\ & = (1 + v_{12}) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) (T_1 + T_2 + T_3 - T_3) = \\ & = (1 + v_{12}) \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) [(T_1 + T_2 + T_3) - T_3] - \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (T_1 + T_2 + T_3) \right] + (1 + v_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} T_3 = \\ & = (1 + v_{12}) \left(\Delta \Sigma - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \Sigma - \Delta T_3 \right) + (1 + v_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} T_3 \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

Buna oxşar çevirmələrlə (6.3.10) tənliklərini aşağıdakı ekvivalent sistemlə əvəz etmək əlverişlidir.

$$\begin{aligned} & (1 + v_{12}) \left(\Delta \Sigma - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \Sigma - \Delta T_3 \right) + (v_{12} - v_{13}) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) T_3 - \\ & - v_{12} \left(\Delta \Sigma - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \Sigma \right) + \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) E_3 = (1 + v_{12}) \left(\frac{\partial X}{\partial x_1} + \frac{\partial Y}{\partial x_2} - \frac{\partial Z}{\partial x_3} \right) \\ & (v_{12} + 1) \left(\Delta \Sigma - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \Sigma - \Delta T_1 \right) - v_{12} \left(\Delta \Sigma - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \Sigma \right) + \\ & + \left[(1 - v_{12} - v_{44}) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (v_{12} - v_{13}) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] T_1 + (v_{44} - 1 - v_{13}) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} T_2 + \\ & + \left[\frac{d_{31}}{s_{11}^E} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{d_{33}}{s_{11}^E} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] E_3 - \frac{d_{15}}{s_{11}^E} \frac{\partial^2 E_2}{\partial x_2 \partial x_3} = v_{44} \left(\frac{\partial Y}{\partial x_2} + \frac{\partial Z}{\partial x_3} - \frac{\partial X}{\partial x_1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1 + v_{12}) \left(\Delta \Sigma - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \Sigma - \Delta T_2 \right) - v_{12} \left(\Delta \Sigma - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \Sigma \right) + \\
& + (v_{44} - 1 - v_{13}) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} T_1 + (1 + v_{12} - v_{44}) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} T_2 + \\
& + \left[(v_{33} - 1) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (v_{44} - 1 - v_{13}) \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] T_3 + \\
& + \left(\frac{d_{33}}{s_{11}^E} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) E_3 - \frac{d_{15}}{s_{11}^E} \frac{\partial^2 E_1}{\partial x_1 \partial x_3} = v_{44} \left(\frac{\partial X}{\partial x_1} + \frac{\partial Z}{\partial x_3} - \frac{\partial Y}{\partial x_2} \right)
\end{aligned} \tag{6.3.12}$$

(6.3.12) tənliklərini toplayıb nəticədən $\Delta \Sigma$ -ni tapırıq:

$$\begin{aligned}
\Delta \Sigma &= \frac{1}{1 - v_{12}} \left\{ (1 + v_{12}) \left(\frac{\partial X}{\partial x_1} + \frac{\partial Y}{\partial x_2} \right) + (2v_{44} - 1 - v_{12}) \frac{\partial Z}{\partial x_3} - \right. \\
& - \left[(v_{12} - v_{13} - v_{33} - 1) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + \right. \\
& + 2(2v_{44} - 1 - v_{13}) \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left. \right] T_3 - (v_{12} - v_{13}) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) T_1 - \\
& - (v_{12} - v_{13}) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} T_2 - \left[\frac{d_{33} + d_{31}}{s_{11}^E} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + \right. \\
& \left. + 2 \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{d_{15}}{s_{11}^E} \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \right] E_3 + \frac{d_{15}}{s_{11}^E} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} E_1 \left. \right\}
\end{aligned} \tag{6.3.13}$$

(6.3.12) və (6.3.13)-də Δ – adi Laplas operatorudur.

(6.3.13)-ü yenidən (6.3.12)-yə daxil edib zəruri əməlləri yerinə yetirsək alarıq:

$$\begin{aligned}
& \bar{L}_{11}T_1 + \bar{L}_{12}T_2 + L_{13}T_3 + L_{17}\Phi = \left(\frac{1+v_{12}}{1-v_{12}} + v_{44} \right) \frac{\partial X}{\partial x_1} + \\
& + \left(\frac{1+v_{12}}{1-v_{12}} - v_{44} \right) \frac{\partial Y}{\partial x_2} + \left(\frac{2v_{11}-1-v_{12}}{1-v_{12}} - v_{44} \right) \frac{\partial Z}{\partial x_3} \quad (6.3.14) \\
& \bar{L}_{21}T_1 + \bar{L}_{22}T_2 + \bar{L}_{23}T_3 + L_{27}\Phi = \left(\frac{1+v_{12}}{1-v_{12}} - v_{44} \right) \frac{\partial X}{\partial x_1} + \\
& + \left(\frac{1+v_{12}}{1-v_{12}} + v_{44} \right) \frac{\partial Y}{\partial x_2} + \left(\frac{2v_{44}-1-v_{12}}{1-v_{12}} - v_{44} \right) \frac{\partial Z}{\partial x_3} \\
& \bar{L}_{31}T_1 + \bar{L}_{32}T_2 + \bar{L}_{33}T_3 + \bar{L}_{37}\Phi = \frac{v_{12}(1+v_{12})}{1-v_{12}} \left(\frac{\partial X}{\partial x_1} + \frac{\partial Y}{\partial x_2} \right) + \\
& + \frac{2v_{44} - (2+v_{12})(1+v_{12})}{1-v_{12}} \frac{\partial Z}{\partial x_3}
\end{aligned}$$

Burada \bar{L}_{ij} -l rl  ($i = \bar{1,3}, j = \bar{1,4}$) i ar  olunub:

$$\begin{aligned}
\bar{L}_{11} &= \left(1 + v_{44} + \frac{v_{12} - v_{13}}{1 - v_{12}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \\
& + \left(1 + v_{13} + \frac{v_{12} - v_{13}}{1 - v_{12}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + (1 + v_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \\
\bar{L}_{12} &= \left(1 + v_{13} - v_{44} + \frac{v_{12} - v_{13}}{1 - v_{12}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \\
\bar{L}_{13} &= \left(1 + \frac{v_{12} - v_{13} + v_{33} - 1}{1 - v_{12}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \\
& + \left(1 - v_{13} + \frac{v_{12} - v_{13} + v_{33} - 1}{1 - v_{12}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \\
& + \left(1 + v_{13} - v_{44} + 2 \frac{v_{44} - 1 - v_{13}}{1 - v_{12}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{L}_{17} &= -\frac{d_{31}}{s_{11}^E(1-v_{12})} \left[\left(1 + \frac{d_{33}-d_{15}}{s_{11}^E} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \right. \\
&\quad \left. + (1-v_{12}) \frac{d_{33}}{d_{31}} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + (1-v_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - v_{12} \frac{d_{15}}{d_{13}} \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \right] \\
\bar{L}_{22} &= (1+v_{12}) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + \left(1+v_{44} + \frac{v_{12}-v_{13}}{1-v_{12}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\
\bar{L}_{21} &= \left(1+v_{13} - v_{44} + \frac{v_{12}-v_{13}}{1-v_{12}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \left(1 + \frac{v_{12}-v_{13}}{1-v_{12}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\
\bar{L}_{23} &= \left(1-v_{13} + \frac{v_{12}-v_{13}+v_{33}-1}{1-v_{12}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \left(v_{44} - v_{12} + \frac{v_{12}-v_{13}}{1-v_{12}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \\
&\quad + \left(1+v_{13} - v_{44} + 2 \frac{v_{44}-1-v_{13}}{1-v_{12}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \tag{6.3.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{L}_{27} &= -\frac{e_{31}}{1-v_{12}} d_{31} \left[\left(1 + v_{12} \frac{d_{33}-d_{15}}{d_{31}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \left(1 + \frac{d_{33}}{d_{31}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \right. \\
&\quad \left. + (1+v_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{d_{15}}{d_{31}} \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \right] \\
\bar{L}_{33} &= \left(1+v_{13} + \frac{v_{12}-v_{13}+v_{33}-1}{1-v_{12}} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + \\
&\quad + \left(2+v_{12} - 2 \frac{v_{44}-1-v_{12}}{1-v_{12}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \\
\bar{L}_{32} &= \frac{v_{12}-v_{13}}{1-v_{12}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}; \quad \bar{L}_{31} = \frac{v_{12}-v_{13}}{1-v_{12}} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}
\end{aligned}$$

$$\bar{L}_{37} = -\frac{e_{31}}{1 - \nu_{12}} \left[\left(\frac{d_{33} - d_{31}}{d_{31}} - \nu_{12} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \left(\nu_{12} + \frac{d_{33}}{d_{31}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{d_{15}}{d_{31}} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \right]$$

Eyni qayda ilə (6.3.1) şərtlərinin ikinci üçlüyündən pyezo-elastikliyin daha üç tənliyini alırıq:

$$\bar{L}_{41}(T_1 + T_2) + \bar{L}_{43}T_3 + \bar{L}_{44}T_4 + \bar{L}_{45}T_5 + \bar{L}_{17}\varphi = (1 + \nu_{12}) \left(\frac{\partial Y}{\partial x_3} + \frac{\partial Z}{\partial x_2} \right)$$

$$\bar{L}_{51}(T_1 + T_2) + \bar{L}_{53}T_3 + \bar{L}_{54}T_4 + \bar{L}_{55}T_5 + \bar{L}_{57}\varphi = (1 + \nu_{12}) \left(\frac{\partial X}{\partial x_3} + \frac{\partial Z}{\partial x_1} \right)$$

$$\bar{L}_{61}(T_1 + T_2) + \bar{L}_{63}T_3 + \bar{L}_{66}T_6 + \bar{L}_{67}\varphi = \nu_{44} \left(\frac{\partial Y}{\partial x_1} + \frac{\partial X}{\partial x_2} \right) \quad (6.5.16)$$

Burada:

$$\bar{L}_{41} = \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}; \quad \bar{L}_{43} = (1 + \nu_{12} - \nu_{13}) \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}$$

$$\bar{L}_{44} = (1 + \nu_{12}) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right);$$

$$\bar{L}_{45} = (1 + \nu_{12} - \nu_{44}) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$$

(6.3.17)

$$\begin{aligned}
\bar{L}_{47} &= -\frac{d_{31}^E}{s_{11}^E} \frac{\partial^3}{\partial x_2 \partial x_3^2}; \bar{L}_{51} = \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_3}; \bar{L}_{53} = (1 + v_{12} - v_{13}) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \\
\bar{L}_{54} &= (1 + v_{12} - v_{44}) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}; \bar{L}_{55} = (1 + v_{12}) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) + v_{44} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\
\bar{L}_{57} &= -\frac{d_{31}^E}{s_{11}^E} \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_3^2}; \bar{L}_{61} = (v_{44} - v_{13}) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}; \bar{L}_{63} = v_{33} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\
\bar{L}_{66} &= v_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + (1 + v_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}; \\
\bar{L}_{57} &= -\left(\frac{d_{33} - v_{44} d_{15}}{s_{11}^E} \right) \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}
\end{aligned}$$

(6.3.14) və (6.3.16) münasibətlərində altı tənliyə yeddi məchul daxildir. Bu sistemin qapanması üçün, yəni tənliklərlə məchulların sayının bərabərləşməsi üçün bunlara elektrik induksiya-sının və elektrik sahəsinin gərginliyi daxil olan

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{və} \quad E_k = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \quad (6.3.18)$$

tənliklərini də qoşmaq lazım gəlir. Bunların birincisindən (6.3.6) bərabərliklərinə əsasən alırıq:

$$\begin{aligned}
d_{15} \left(\frac{\partial T_5}{\partial x_1} + \frac{\partial T_4}{\partial x_2} \right) + d_{31} \frac{\partial}{\partial x_3} (T_1 + T_2) + d_{33} \frac{\partial T_3}{\partial x_3} + \\
+ \varepsilon_{11} \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_2} + \frac{\partial E_2}{\partial x_1} \right) + \varepsilon_{33} \frac{\partial E_3}{\partial x_3} = 0
\end{aligned} \quad (6.3.19)$$

nəzərə alsaq ki,

$$\frac{\partial T_5}{\partial x_1} + \frac{\partial T_2}{\partial x_2} = Z - \frac{\partial T_3}{\partial x_3}$$

bərabərliyi doğrudur, onda pyezoelastikliyin yeddinci tənliyini belə yaza bilərik:

$$\bar{L}_{71}(T_1 + T_2) + \bar{L}_{73}T_3 + \bar{L}_{77}\varphi = -d_{15}Z \quad (6.3.20)$$

Burada

$$\bar{L}_{71} = d_{31} \frac{\partial}{\partial x_3} \quad L_{73} = (d_{33} - d_{15}) \frac{\partial}{\partial x_3} \quad L_{77} = -\Delta_5 \quad (6.3.21)$$

Beləliklə, (6.3.14), (6.3.16) və (6.3.20) tənliklər sistemi elastiklik nəzəriyyəsinə məlum olan izotrop materiallar üçün Beltrami-Mitçell tənliklərinin pyezoelastiklik halı üçün ümumiləşməsindən başqa bir şey deyil. Doğurdan da, anizotropluğu xassəsini göstərən parametrləri izotropluğu parametrləri ilə eyniləşdirənsək (yəni $\nu_{12}=\nu_{13}=\nu$, $\nu_{33}=1$, $\nu_{44}=1+\nu$ götürsək) aldığımız sistem məlum Beltrami-Mitçell tənlikləri ilə üst-üstə düşərlər, yəni aşağıdakı tənlikləri alarıq:

$$\begin{aligned} (1+\nu)\Delta T_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \Sigma = 0 & \quad (1+\nu)\Delta T_4 + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \Sigma = 0 \\ (1+\nu)\Delta T_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \Sigma = 0 & \quad (1+\nu)\Delta T_5 + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \Sigma = 0 \\ (1+\nu)\Delta T_3 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \Sigma = 0 & \quad (1+\nu)\Delta T_6 + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \Sigma = 0 \end{aligned} \quad (6.3.22)$$

Dinamika məsələlərinə baxdıqda ümumiləşmiş Beltrami-Mitçell tənliklərini almaq üçün əvvəlcə elastiklik nəzəriyyəsinin əsas tənlikləri (6.3.2)-yə daxil olan həcmi qüvvələri uyğun etalət qüvvələri ilə əvəz etmək lazımdır

$$X = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad Y = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \quad Z = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \quad (6.3.23)$$

Lakin burada onlar yerdəyişmələrlə ifadə olunublar. Onların gərginliklərlə ifadələrini tapmaq üçün

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = s_{11}^E T_1 + s_{12}^E T_2 + s_{13}^E T_3 \\
S_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = s_{12}^E T_1 + s_{11}^E T_2 + s_{13}^E T_3 \\
S_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = s_{31}^E T_1 + s_{31}^E T_2 + s_{33}^E T_3
\end{aligned} \tag{6.3.24}$$

münasibətlərinə müraciət edirik. (6.3.24) bərabərlərini ρ -ya (kütlə sıxlığına) vurub zamana görə iki dəfə diferensiallasaq alırıq:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial x_1} &= \rho \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial t^2} = s_{11}^E \rho \frac{\partial^2 T_1}{\partial t^2} + s_{12}^E \rho \frac{\partial^2 T_2}{\partial t^2} + s_{13}^E \rho \frac{\partial^2 T_3}{\partial t^2} \\
\frac{\partial Y}{\partial x_1} &= \rho \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2 \partial t^2} = s_{12}^E \rho \frac{\partial^2 T_1}{\partial t^2} + s_{11}^E \rho \frac{\partial^2 T_2}{\partial t^2} + s_{13}^E \rho \frac{\partial^2 T_3}{\partial t^2} \\
\frac{\partial Z}{\partial x_3} &= \rho \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_3 \partial t^2} = s_{31}^E \rho \frac{\partial^2 T_1}{\partial t^2} + s_{31}^E \rho \frac{\partial^2 T_2}{\partial t^2} + s_{33}^E \rho \frac{\partial^2 T_3}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{6.3.25}$$

Bunları (6.3.14)-də yazıb alırıq:

$$\begin{aligned}
L_{11} T_1 + L_{12} T_2 + L_{13} T_3 + L_{17} \varphi &= 0 \\
L_{21} T_1 + L_{22} T_2 + L_{23} T_3 + L_{27} \varphi &= 0 \\
L_{31} T_1 + L_{32} T_2 + L_{33} T_3 + L_{37} \varphi &= 0
\end{aligned} \tag{6.3.26}$$

Bu halda

$$\begin{aligned}
L_{11} &= \bar{L}_{11} - \rho s_{11}^E \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}; & L_{12} &= \bar{L}_{12} - \rho s_{11}^E \alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \\
L_{13} &= \bar{L}_{13} - \rho s_{11}^E \alpha_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2}; & L_{17} &= \bar{L}_{11} - \rho s_{11}^E (1 - \nu_{12}) \alpha_3 \frac{\partial^3}{\partial x_3 \partial t^2};
\end{aligned}$$

$$\alpha_1 = (1 + v_{12})(1 - v_{44}) - v_{12} \left(\frac{2v_{44} - 1 - v_{12}}{1 - v_{12}} - v_{44} \right)$$

$$\alpha_2 = (1 + v_{12})(1 + v_{44}) - v_{12} \left(\frac{2v_{44} - 1 - v_{12}}{1 - v_{12}} - v_{44} \right)$$

$$L_{21} = \bar{L}_{21} - \alpha_1 \rho s_{11}^E \frac{\partial^2}{\partial t^2};$$

$$\alpha_3 = v_{33} \left(\frac{2v_{44} - 1 - v_{12}}{1 - v_{12}} - v_{44} \right) - 2v_{13} \frac{1 + v_{12}}{1 - v_{12}}; L_{22} = \bar{L}_{22} - \rho \alpha_2 s_{11}^E \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{23} = \bar{L}_{23} - \rho \alpha_3 s_{11}^E \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad L_{27} = \bar{L}_{27} - \alpha_4 \rho e_{31} \frac{\partial^3}{\partial x_3 \partial t^2}$$

$$L_{31} = \bar{L}_{31} - \beta_1 \rho s_{11}^E \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad L_{32} = \bar{L}_{32} - \beta_1 \rho s_{11}^E \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{33} = \bar{L}_{33} - \beta_3 \rho s_{11}^E \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad L_{37} = \bar{L}_{37} + \beta_4 \rho s_{11}^E e_{31} \frac{\partial^3}{\partial x_3 \partial t^2}$$

$$\beta_1 = v_{12}(1 + v_{12}) - v_{12} \frac{2v_{44} - (2 + v_{12})(1 + v_{12})}{1 - v_{12}} \quad (6.3.27)$$

$$\beta_3 = v_{33} \frac{2v_{44} - (2 + v_{12})(1 + v_{12})}{1 - v_{12}} - 2v_{13} \frac{v_{12}(1 + v_{12})}{1 - v_{12}}$$

$$\beta_4 = 2 \frac{v_{12}(1 + v_{12})}{1 - v_{12}} + \frac{d_{33}}{d_{31}} \frac{2v_{44} - (2 + v_{12})(1 + v_{12})}{1 - v_{12}}$$

$$\alpha_4 = 2 \frac{1 + v_{12}}{1 - v_{12}} + \frac{d_{33}}{d_{31}} \left(\frac{2v_{44} - 1 - v_{12}}{1 - v_{12}} - v_{44} \right)$$

Dinamika məsələləri üçün (6.3.16) sistemi aşağıdakı şəkllə düşür:

$$\begin{aligned}
L_{11}(T_1 + T_2) + L_{43}T_3 + L_{44}T_4 + L_{45}T_5 + L_{47}\varphi &= 0 \\
L_{51}(T_1 + T_2) + L_{53}T_3 + L_{54}T_4 + L_{55}T_5 + L_{57}\varphi &= 0 \quad (6.3.28) \\
L_{61}(T_1 + T_2) + L_{63}T_3 + L_{66}T_4 + L_{67}\varphi &= 0
\end{aligned}$$

haradaki:

$$\begin{aligned}
L_{41} &= \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}; \quad L_{43} = (1 + \nu_{12} - \nu_{13}) \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}; \\
L_{44} &= \bar{L}_{44} - \rho(1 + \nu_{12})s_{44}^E \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad L_{45} = \bar{L}_{45} \\
L_{47} &= \bar{L}_{47} + \rho(1 + \nu_{12})d_{15} \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad L_{51} = \bar{L}_{51}; \quad L_{53} = \bar{L}_{53} \\
L_{54} &= \bar{L}_{54}; \quad L_{55} = \bar{L}_{55} - \rho(1 + \nu_{12})s_{44} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\
L_{57} &= \bar{L}_{57} + \rho(1 + \nu_{12})d_{15} \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad L_{61} = \bar{L}_{61}; \quad L_{63} = \bar{L}_{63} \\
L_{66} &= \bar{L}_{66} - \rho s_{44} \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad L_{67} = \bar{L}_{67}
\end{aligned} \quad (6.3.26)$$

Pyezoelastikliyin dinamikasının yeddinci tənliyini (6.3.20) tənliyindən alırıq. Bunun üçün onu x_3 -ə görə birdəfə diferensiallayıb $\frac{\partial Z}{\partial x_3}$ -ü onun (6.3.25)-dəki ifadəsi ilə əvəz edirik. Onda yeddinci tənlik aşağıdakı kimi olur:

$$L_{71}(T_1 + T_2) + L_{73}T_3 + L_{77}\varphi = 0 \quad (6.3.30)$$

Belə ki, burada

$$L_{71} = d_{31} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - v_{12} \frac{d_{15}}{d_{13}} s_{11} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right]$$

$$L_{73} = - \left[\frac{d_{15} - d_{33}}{d_{13}} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - v_{33} \frac{d_{15}}{d_{13}} \rho s_{11}^E \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right]$$

$$L_{77} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\varepsilon_{11} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + \frac{d_{15} - d_{33}}{d_{13}} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \rho s_{11}^E \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right]$$

Beləliklə, pyzeoelastik sistemlər üçün aldığımız (6.3.26), (6.3.28) və (6.3.30) tənliklərindən ibarət olan ümumiləşmiş Beldtrami-Mitçell tənlikləri uyğun sərhəd və başlanğıc şərtləri ilə birlikdə pyzeoelastiklik məsələlərinin həllinə imkan verir.

§6.4. Pyzeoelastiklik məsələlərinin həllərinin yeganəliyi

Pyzeoelastiklik məsələlərinin həllinin yeganəliyini isbat etmək üçün ötən paragraflarda göstərdiyimiz aşağıdakı münasibətlərdən istifadə olunur:

a) hərəkət tənliyi

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial U_i}{\partial t^2} \quad i, j = \overline{1,3} \quad (6.4.1)$$

b) elektrik induksiyanın təyini tənliyi

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0 \quad (6.4.2)$$

c) hal tənlikləri

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} - e_{kij} E_k \quad (6.4.3)$$

$$D_j = e_{ikl} S_{kl} - \varepsilon_{ik} E_k \quad i, j = \overline{1,3} \quad (6.4.4)$$

ç) deformasiya komponentlərini və elektrik sahə vektorunun komponentlərini təyin edən münasibətlər:

$$S_{k\ell} = 0,5 \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right) \quad (6.4.5)$$

$$E_k = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$$

Göstərək ki, (6.1.4) – (6.4.4) sisteminin həlli yeganədir. Tərsini fərz edək, tutaq ki, onun

$$T_{ij}^{(1)}, U_i^{(1)}, D_i^{(1)}, E_k^{(1)}, S_{ij}^{(1)} \text{ və } \varphi^{(1)} \quad (6.4.6)$$

həllindən başqa hər hansı

$$T_{ij}^{(2)}, U_i^{(2)}, D_i^{(2)}, E_k^{(2)}, S_{ij}^{(2)} \text{ və } \varphi^{(2)}$$

Həlli də mövcuddur. Bu həllərin uyğun fərqlərinə

$$\tilde{T}_{ij}, \tilde{U}_i, \tilde{D}_{ij}, \tilde{E}_k, \tilde{S}_{ij}, \tilde{\varphi} \quad (6.4.7)$$

deyək. (6.4.1) tənliyindən

$$\frac{\partial \tilde{T}_{ij}}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial t^2}$$

fərqi $\frac{\partial U_j}{\partial t}$ -yə skalyar vurub onu həll oblastına daxil olan hər hansı V həcmi üzrə inteqrallayaq

$$\iiint_V \left[\left(\frac{\partial \tilde{T}_{ij}}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial^2 \tilde{U}_i}{\partial t^2} \right) \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial t} \right] dV = 0 \quad (6.4.8)$$

Bu bərabərliyi belə də yazıb bilərik:

$$\iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(T_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial t} \right) - T_{ij} \frac{\partial^2 U_j}{\partial t \partial x_i} - 0,5\rho \frac{\partial U_j}{\partial t} \frac{\partial U_i}{\partial t} \right] dV = 0 \quad (6.4.9)$$

Çünki

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial U_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(T_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial t} \right) - T_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)$$

bərabərliyi doğrudur.

(6.4.9) bərabərliyinə Ostraqradski-Hauss teoremini tətbiq edək. Onda alırıq ((6.4.3)-ün simmetrikliliyinə əsasən yazıla bilər):

$$\iint_S n_i \frac{\partial U_j}{\partial t} dS = \iiint_V \left[c_{ijkl} S_{kl} \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} - e_{kij} E_k \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t} \right] dV \quad (6.4.10)$$

Burada n_i ($i=1,3$) S səthinin xarici normalın istiqamətverici kosinusları, S isə V həcmi hüdudlandıran düzgün səthdir.

$\frac{\partial T}{\partial t}$ ilə işarə olunub:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0,5 \frac{\partial U_j}{\partial t} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial t} \quad (6.4.11)$$

(6.4.2) – (6.4.5)-ni nəzərə alaraq (6.4.10)-u belə yazmaq olar:

$$\begin{aligned} & \iint_S n_i T_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial t} dS = \\ & = \iiint_V \left[c_{ijkl} S_{kl} \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + \varepsilon_{ik} E_i \frac{\partial E_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\varphi \frac{\partial D_k}{\partial t} \right) + \frac{\partial T}{\partial t} \right] dV \end{aligned} \quad (6.4.12)$$

(6.4.4)-dən

$$\frac{\partial D_i}{\partial t} = e_{ikl} \frac{\partial S_{kl}}{\partial t} + \varepsilon_{ik} \frac{\partial E_k}{\partial t} \quad (6.4.13)$$

Bunun hər tərəfini E_k -ya vuraq. Onda

$$-e_{ikl} E_k \frac{\partial S_{kl}}{\partial t} = -E_k \frac{\partial D_i}{\partial t} + \varepsilon_{ik} E_k \frac{\partial E_i}{\partial t}$$

$$-E_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \text{ olduğundan}$$

$$-e_{ik\ell} E_k \frac{\partial S_{k\ell}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial D_i}{\partial t}.$$

Digər tərəfdən

$$\begin{aligned} -e_{ik\ell} E_k \frac{\partial S_{k\ell}}{\partial t} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial D_i}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\varphi \frac{\partial D_k}{\partial t} \right) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial D_k}{\partial t} + \varphi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial D_k}{\partial x_k} \right) = -E_k \frac{\partial D_k}{\partial t} \end{aligned}$$

Çünki, (6.4.2)-yə görə $\frac{\partial D_k}{\partial x_k} = 0$. Deməli,

$$-E_k \frac{\partial D_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\varphi \frac{\partial D_k}{\partial t} \right) \quad (6.4.14)$$

Onda (6.4.12)-ni belə yazı bilərik:

$$\begin{aligned} &\iint_S n_i T_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial t} dS = \\ &= \iiint_V \left[c_{ijk\ell} S_{k\ell} \frac{\partial S_i}{\partial t} + \varepsilon_{ik} E_i \frac{\partial E_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\varphi \frac{\partial D_k}{\partial t} \right) + \frac{\partial T}{\partial t} \right] dV \end{aligned} \quad (6.4.15)$$

İndi $\iiint_V \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\varphi \frac{\partial D_k}{\partial t} \right) dV$ inteqralna Ostrogradski-Hauss teoremini tətbiq edib (6.4.15)-i belə yazıq:

$$\begin{aligned} &\iiint_V \left[\frac{\partial T}{\partial t} + c_{ijk\ell} S_{k\ell} \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + \varepsilon_{ik} E_i \frac{\partial E_k}{\partial t} \right] dV = \\ &= \iint_S \left[n_i T_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial t} - n_i \varphi \frac{\partial D_k}{\partial t} \right] dS = 0 \end{aligned} \quad (6.4.16)$$

Bu bərabərliyin sol tərəfindəki inteqralaltı ifadədə sonuncu iki toplananın cəmi həllər fərqi üçün daxili enerjinin zamana görə törəməsinə bərabərdir, yəni

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} = c_{ijk\ell} \tilde{S}_{k\ell} \frac{\partial \tilde{S}_{ij}}{\partial t} + \varepsilon_{ik} \tilde{E}_i \frac{\partial \tilde{E}_k}{\partial t} \quad (6.4.17)$$

(6.4.17)-ni (6.4.16)-ya daxil etsək alırıq:

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} \right] dV = \iint_S \left[n_i \tilde{T}_{ij} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial t} - n_i \varphi \frac{\partial \tilde{D}_i}{\partial t} \right] dS \quad (6.4.18)$$

Bu bərabərliyi $[t_0, t]$ zaman parçasında inteqrallayaq:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \left[\iiint_V \left[\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} \right] dV \right] dt = \\ & = \int_{t_0}^t \left[\iint_S \left[n_i \tilde{T}_{ij} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial t} - n_i \varphi \frac{\partial \tilde{D}_i}{\partial t} \right] dS \right] dt \end{aligned} \quad (6.4.19)$$

Buradan isə alırıq:

$$\tilde{K} + \tilde{U} = \tilde{K}_0 + \tilde{U}_0 + \int_{t_0}^t dt \iint_S \left[n_i \tilde{T}_{ij} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial t} - n_i \varphi \frac{\partial \tilde{D}_i}{\partial t} \right] dS \quad (6.4.21)$$

Burada

$$\tilde{K}_0 = \iiint_V T_{ij} dV \quad \tilde{U}_0 = \iiint_V \tilde{U} dV \quad (6.4.20)$$

$\tilde{T}_j = n_i \tilde{T}_{ij}$ desək (6.4.20) aşağıdakı şəklə düşər:

$$\tilde{K} + \tilde{U} = \tilde{K}_0 + \tilde{U}_0 + \int_{t_0}^t dt \left[\iint_S \left[\tilde{T}_j \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial t} - n_i \varphi \frac{\partial \tilde{D}_i}{\partial t} \right] dS \right] \quad (6.4.22)$$

Burada isə \tilde{K}_0 və \tilde{U}_0 kəmiyyətləri $\frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial t}$, \tilde{S}_{ij} və \tilde{E}_k -lərdən asılı müsbət funksiyalar olduqlarından və habelə sağ tərəf tilda ilə fərqləndirilmiş həllər üçün başlanğıc və sərhəd şərtlərini ifadə etdiklərindən yaza bilərik

$$\frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial t} = \tilde{S}_{ij} = \tilde{E}_i = 0 \quad (6.4.23)$$

sonuncu bərabərlik hər iki həll üçün sərhəd və başlanğıc şərtləri eyni olduqlarından eyniliklə doğrudur.

Bununla da həllin yeganəliyi isbat olunmuş olur.

VII FƏSİL

PYEZOELASTİKLİK NƏZƏRİYYƏSİNİN TƏTBİQLƏRİNƏ AİD BƏZİ NÜMUNƏLƏR

Bu fəsildə pyezoelastiklik nəzəriyyəsinin bəzi pyezokeramik cihaz hissələrinin dinamikasının öyrənilməsində tətbiqlərinə aid bir sıra müəlliflərin işlərini nümunə kimi göstərəcəyik. Həmin işlərin müəllifləri ədəbiyyat siyahısında göstərilir. Göstərəcəyimiz işlərdə məzmunu xələl gətirmədən, ancaq bu kitabın məqsədinə uyğunlaşdırmaq üçün cüzi dəyişikliyə və ixtisarlara yol verilir. İşarələr müəlliflərdə olduğu kimi saxlanır.

§7.1. Diskvari pyezokeramik transformatorun giriş seksiyasının rəqsləri [36]

Radial və ya qalınlıq istiqamətində polyarlaşmış pyezokeramik disklər və həlqələr elektroakustikada, transformatorlarda və digər sahələrdə geniş tətbiq olunurlar. Burada belə strukturların dinamikasına baxacağıq. Bunun üçün sadəlik xatirinə qalınlıq istiqamətində polyarlaşmış konsentrik həlqəvari pyezokeramik lövhəyə baxacağıq. Aşağıdakıların doğru olmalarını fərz edək:

1) Piezoelementin qalınlığı kiçikdir və bu gərginlik tenzorunun aşağıdakı komponentlərini nəzərə almamağa imkan verir;

$$\sigma_{zz} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{rz} = 0$$

2) Elektrik sahəsində səpilmə yoxdur, ona görə də elektrik sahə vektorunun komponentlərindən $E_z = E_\theta = 0$ götürə bilərik;

3) Elektrik sahəsinin gərginliyi ancaq radiusun funksiyasıdır $\bar{E} = \bar{E}(r)$;

4) Rəqs tezliyinin baxdığımız diapazonunda elektromaqnit dalğalarının uzunluğu baxılan strukturun ölçülərindən əhəmiyyətli dərəcədə böyükdür ona görə də elektrostatikanın

$$\operatorname{div} D = 0, \operatorname{rot} E = 0 \quad (7.1.1)$$

tənliklərindən istifadə etmək olar.

5) Transformatorada enerji itgisi yoxdur;

6) Pyezoelement qalınlıq istiqamətində polyarlaşıbsa onda $E_r = E_\theta = 0$.

Qalınlıq istiqamətində polyarlaşmış həlqəvari diskin hərəkət tənlikləri

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{rz}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

Burada ρ - materialın kütlə sıxdığı, u_r , u_θ , u_z uyğun olaraq r , θ , z istiqamətlərindəki yerdəyişmələrdir. Baxdığımız variant üçün hal tənlikləri aşağıdakı şəkildədirlər:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= C_{11}^E S_{rr} + C_{12}^E S_{\theta\theta} + C_{13}^E S_{zz} - d_{31} E_z \\ \sigma_{\theta\theta} &= C_{12}^E S_{rr} + C_{11}^E S_{\theta\theta} + C_{13}^E S_{zz} - d_{31} E_z \\ \sigma_{zz} &= C_{13}^E (S_{rr} + S_{\theta\theta}) + C_{33}^E S_{zz} - d_{33} E_z \\ \sigma_{r\theta} &= C_{66}^E S_{r\theta}; \quad \sigma_{rz} = C_{44}^E S_{rz} - d_{15} E_r \\ \sigma_{z\theta} &= C_{44}^E S_{z\theta} - d_{15} E_\theta \\ D_r &= d_{15} S_{rr} + \varepsilon_{11}^S E_r \quad D_\theta = d_{15} S_{z\theta} + \varepsilon_{11}^S E_\theta \\ D_z &= d_{31} (S_{r\theta} + S_{\theta\theta}) + d_{33} S_{zz} + \varepsilon_{33}^S E_z \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

Burada C_{ij}^E ($i, j = \overline{1,6}$) - elastiklik modulları, ε_{ij}^S - dielektrik nüfuzluluqları, d_{in} - pyezosabitlərdir.

(7.1.1) – (7.1.3) tənliklərinə aşağıdakı həndəsi münasibətləri də qoşaq:

$$\begin{aligned}
S_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; & S_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; & S_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
S_{z\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}; & S_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \\
S_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}
\end{aligned} \tag{7.1.4}$$

Fərziyyəmizə əsasən (7.1.2) və (7.1.3) tənlikləri aşağıdakı şəkə düşürlər:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \\
\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (r D_r) + \frac{\partial D_z}{\partial z} &= 0
\end{aligned} \tag{7.1.5}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= C_{11}^E S_{rr} + C_{12}^E S_{\theta\theta} + C_{13}^E S_{zz} - d_{31} E_z \\
\sigma_{\theta\theta} &= C_{12}^E S_{rr} + C_{11}^E S_{\theta\theta} + C_{13}^E S_{zz} - d_{31} E_z \\
0 &= C_{13}^E (S_{rr} + S_{\theta\theta}) + C_{33}^E S_{zz} - d_{33} E_z \\
0 &= C_{44}^E S_{rz} - d_{15} E_r \\
D_r &= d_{15} S_{rz} + \epsilon_{11}^S E_r \\
D_z &= d_{31} (S_{rr} + S_{\theta\theta}) + d_{33} S_{zz} + \epsilon_{33}^S E_z
\end{aligned} \tag{7.1.6}$$

(7.1.4) həndəsi münasibətlər isə belə olurlar

$$\begin{aligned}
S_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; & S_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r}; & S_{z\theta} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
S_{z\theta} &= 0; & S_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}
\end{aligned} \tag{7.1.7}$$

(7.1.6) münasibətlərinin üçüncüsündən S_{zz} -i təyin edək:

$$S_{zz} = -\frac{C_{13}^E}{C_{33}^E}(S_{rr} + S_{\theta\theta}) + \frac{d_{33}}{C_{33}^E}E_z \quad (7.1.8)$$

Bunu o biri münasibətlərə daxil etsək alarıq:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \bar{C}_{11}S_{rr} + \bar{C}_{12}S_{\theta\theta} - \bar{d}_{31}E_z \\ \sigma_{\theta\theta} &= \bar{C}_{12}S_{rr} + \bar{C}_{11}S_{\theta\theta} - \bar{d}_{31}E_z \\ S_{rz} + \frac{d_{15}^E}{C_{11}^E}E_r & \quad D_r = \bar{\epsilon}_{33}E_z \\ D_z &= \bar{d}_{31}(S_{rr} + S_{\theta\theta}) + \bar{\epsilon}_{33}E_z \end{aligned} \quad (7.1.9)$$

Burada

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11} &= C_{11}^E \left[1 - \frac{(C_{13}^E)^2}{C_{11}^E C_{33}^E} \right] & \bar{C}_{12} &= C_{12}^E \left[1 - \frac{(C_{13}^E)^2}{C_{12}^E C_{33}^E} \right] \\ \bar{d}_{31} &= d_{31} \left[1 - \frac{d_{33} C_{31}^E}{d_{31} C_{33}^E} \right] & \bar{\epsilon}_{11} &= \epsilon_{11}^S \left[1 + \frac{d_{15}^2}{\epsilon_{33}^S C_{33}^E} \right] \\ \bar{\epsilon}_{33} &= \epsilon_{33}^S \left[1 + \frac{d_{33}^2}{\epsilon_{33}^S C_{33}^E} \right] \end{aligned} \quad (7.1.10)$$

işarə olunblar.

2) və 3) fərziyyələrinə görə deformasiya tenzorunun komponentlərini belə ifadə edə bilərik:

$$S_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad S_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad (7.1.11)$$

Bunları (7.1.9)-da yazıb, alınan nəticəni isə (7.1.5)-də yazsaq yerdəyişmənin radial komponenti u_r üçün alarıq:

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} + \left[\frac{\rho \omega^2}{C_{11}} - \frac{\bar{C}_{12}}{\bar{C}_{11}} \frac{1}{r^2} \right] u_r = 0 \quad (7.1.12)$$

Burada

$k^2 = \frac{\rho\omega^2}{C_{11}}$; $p^2 = \frac{\bar{C}_{12}}{C_{11}}$ deyib, $x = \frac{\omega}{v_1}r$ qanunu ilə yeni x dəyişəni daxil etsək (7.1.12) tənliyini belə yaza bilərik

$$\frac{d^2\bar{u}_r}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\bar{u}_r}{dx} + \left[k^2 - p^2 \frac{1}{x} \right] \bar{u}_2 = 0 \quad (7.1.13)$$

Belə ki, $u_2\left(\frac{v_1}{\omega}x\right) = \bar{u}_2(x)$

$$v_1^2 = \frac{\bar{C}_{11}}{C_{12}}$$

(7.1.13) p tərtibli Bessel tənliyi olduğundan onun ümumi həllini belə yaza bilərik:

$$\bar{u}_r = A_1 I_p(x) + B_1 N_p(x) \quad (7.14.14)$$

Diskvari transformator üçün \bar{u}_z mərkəzdə ($r=0$) sonsuzluğa çevrilə bilməz. Ona görə də $B_1=0$ olmalıdır. Onda alırıq:

$$\bar{u}_r = A_1 J_p(x) = A_1 J_p\left(\frac{\omega}{v_1}r\right) \quad (7.1.15)$$

(7.1.9)-a və (7.1.11)-ə əsasən gərginlik tenzorunun radial komponentini tapa bilərik:

$$\sigma_{rr} = A_{11} \bar{C}_{11} \frac{\omega}{v_1} \left[I_0\left(\frac{\omega}{v_1}r\right) - \frac{(1-v_1)v_1}{\omega r} I_1\left(\frac{\omega}{v_1}r\right) \right] - \bar{e}_{31} E_z \quad (7.1.16)$$

burada ω - rəqsin dairəvi tezliyidir.

Eləcə də (7.1.11) və (7.1.9)-un köməyi ilə gərginlik tenzorunun qalan komponentlərini, habelə elektrik induksiyası vektorunun D_r və D_z komponentlərini tapa bilərik.

§7.2. Radial polyarlaşdırılmış pyezokeramik həlqəni oxasimmetrik rəqsləri və elektrik impedansı [81]

Silindrlər və həlqələr şəklində olan pyezokeramik çeviricilər elektroakustikada geniş tətbiq olunurlar. Bu məsələnin izotrop elastik, həlqə və sonlu uzunluğa malik silindrlər üçün həlli Haskins [103], Qutin [83] və Lazotkin [94] tərəfindən yerinə yetirilmişdi. Lakin müasir pyezokeramik materiallardakı elektromexaniki əlaqənin varlığı və anizotropiya [84]-ün nəticələrindən pyezokeramik materiallar üçün istifadə etməyə imkan vermir. Hər bir ixtiyari formalı pyezokeramik rezonatorların rəqslərinin öyrənilməsinin əsasında hərəkətin diferensial tənlikləri, Maksvell tənlikləri, habelə mexaniki və elektrik sahəsinin xarakteristikaları üçün sərhəd şərtləri dayanmalıdır. Qalınlığı az və qalınına silindrik izotropiyaya malik olan həlqələr üçün harmonik rəqslərin tənliyi silindrik r , φ , z koordinat sistemində belə yazılır:

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{T_{rz} - T_{\varphi\varphi}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7.2.1)$$

burada T_{rz} , $T_{\varphi\varphi}$ – mexaniki gərginlik tenzorunun komponentləri, ρ - sıxlıq, u – yerdəyişmənin radial komponentidir.

Tezliklərin bizi maraqlandıran aralığında sahənin elektromaqnit dalğalarının uzunluğu rezonatorun ölçülərindən əhəmiyyətli dərəcədə böyük olduğundan Maksvell tənlikləri elektrostatika tənliklərinə gətirilir. Bu halda sərbəst yüklərin olmadığı halda onlar aşağıdakı kimi yazılırlar:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (7.2.2)$$

Polyarlaşma radial olduqda bunlara

$$D_r = \frac{1}{r} D_0 \quad \text{və} \quad U = - \int E_r dr \quad (7.2.3)$$

tənlikləri uyğun gəlir, belə ki, burada D_r və E_r uyğun olaraq induksiyanın və elektrik sahəsi gərginliyin vektorunun radial komponentləri, D_0 isə sabitdir: $D_0 = \text{const}$.

Radial polyarlaşmış keramik qısa hələdə elektromexaniki hal tənliklərini ($T_z=0$) belə yazmaq olar:

$$S_{rr} = s_{13}^D T_{\varphi} + s_{33}^D T_{rr} + g_{33} D_r \quad (7.2.4)$$

$$S_{\varphi\varphi} = s_{11}^D T_{\varphi} + s_{13}^D T_{rr} + g_{31} D_r \quad (7.2.5)$$

$$E_r = -g_{31} T_{\varphi\varphi} - g_{33} T_{rr} + \beta_{33}^T D_r \quad (7.2.6)$$

Burada s_{ij}^D - elastiklik sabitləri, g_{ij} ($i,j=1,2,3$) isə pyezokeramik sabitləridir. Bunlara aşağıdakı həndəsi münasibətləri də qoşaq:

$$S_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad S_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} \quad (7.12.7)$$

(7.2.4) və (7.2.5) tənliklərini birgə həll edək. Kramer üsulu tətbiq edib alırıq:

$$s_{13}^D T_{\varphi\varphi} + s_{33}^D T_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} - g_{33} \frac{D_r}{r} \quad (7.2.8)$$

$$s_{11}^D T_{\varphi\varphi} + s_{33}^D T_{rr} = \frac{u}{r} - g_{31} \frac{D_0}{r}$$

Bu sistemdən tapırıq:

$$T_{rr} = -\frac{s_{11}^D}{\Delta} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{s_{13}^D}{\Delta} \frac{u}{r} + \frac{s_{11}^D g_{33} - s_{13}^D g_{31}}{\Delta} D_0 \frac{1}{r} \quad (7.2.9)$$

$$T_{\varphi\varphi} = \frac{s_{13}^D}{\Delta} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{s_{33}^D}{\Delta} \frac{u}{r} + \frac{s_{33}^D g_{31} - s_{13}^D g_{33}}{\Delta} D_0 \frac{1}{r}$$

harada ki, $\Delta = (s_{13}^D)^2 - s_{11}^D s_{33}^D$.

(7.2.9)-u (7.2.1)-də yazıb alırıq:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{s_{33}^D}{s_{11}^D} \frac{u}{r^2} + \frac{\rho \omega^2}{s_{11}^D} \Delta_1 = \frac{s_{13}^D g_{33} - s_{33}^D g_{31}}{s_{11}^D} D_0 \frac{1}{r^2} \quad (7.2.10)$$

Aşağıdakı işarələri qəbul edək:

$$v^2 = \frac{S_{33}^D}{S_{11}^D}; \quad \frac{S_{13}^D g_{33} - S_{33}^D g_{33}}{S_{11}^D} D_0 = \left(g_{33} \frac{S_{13}^D}{S_{11}^D} - g_{31} \frac{S_{33}^D}{S_{11}^D} \right) D_0 = A \quad (7.2.11)$$

Onda tənlik aşağıdakı şəkllə düşür

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} (k^2 r^2 - v^2) \frac{\mathbf{u}}{r} = \frac{A}{r} \quad (7.2.12)$$

$$\text{Burada} \quad k = \omega(\rho S_{\text{eff}})^{\frac{1}{2}} \quad S_{\text{eff}} = S_{33}^D \left[1 - \frac{(S_{13}^D)^2}{S_{11}^D S_{33}^D} \right] \quad (7.2.13)$$

Bu tənlikləri çıxararkən fərz edilir ki, materialın bütün sabitləri həcm üzrə dəyişməzdirlər. Bu, polyarlaşmanın hər yerdə doymuş (yəni maksimum polyarlaşma) hala çatmış olması deməkdir. (7.2.12)-nin sağındakı qeyri-bircinslilik həddi materialda sahənin qeyri-bərabər paylanması ilə təyin olunur. Pyezoeffekt olmadıqda ($g_{ij}=0$) (7.2.12) tənliyi ($v=1$) izotrop eolastik həlqənin məlum hərəkət tənliyinə çevrilir.

T_{rr} -in (7.2.9)-dakı ifadəsini $T_{rr}|_{r=r_1, r_2} = 0$ sərhəd şərtində yapzsqa alarıq:

$$\frac{du}{dr} - \frac{S_{13}^D}{S_{11}^D} \frac{u}{r} = \frac{B}{r}, \quad r = r_1, r_2 \quad (7.2.14)$$

Burada $B = \left(g_{33} - g_{31} \frac{S_{13}^D}{S_{11}^D} \right) D_0$ işarə olunub. $\sigma_{13} = -\frac{S_{13}^D}{S_{11}^D}$ deyək.

Göründüyü kimi (7.2.12) qeyri-bircins Bessel tənliyidir. Ona görə də (7.2.12) (7.2.14)-lə birlikdə qeyri-bircins sərhəd məsələsi təşkil edirlər və onun həllini məlum metodlarla tapmaq olar.

Birinci addım kimi əvvəlcə bircinsli sərhəd məsələsinin ($A=B=0$) məxsusi ədədlərini və məxsusi funksiyalarını tapmaq. $A=0$ olduqda (7.2.12)-nin ümumi həlli

$$u = C_1 J_\nu(kr) + C_2 N_\nu(kr) \quad (7.2.15)$$

şəklindədir. Burada C_1 və C_2 – ixtiyari sabitlər, $J_\nu(kr)$ və $N_\nu(kr)$ uyğun olaraq Bessel və Neyman funksiyalarıdır. Bu funksiyaların törəmələri üçün

$$Z'_\nu(z) = Z_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} Z_\nu(z) \quad (7.2.16)$$

düsturu doğrudur. Belə ki, $Z_\nu(z)$ Bessel və Neyman funksiyalarından istənilən biri ola bilər.

(7.2.16)-nı nəzərə almaqla (7.2.15)-i (7.2.14)-də yazıb alırıq:

$$\begin{aligned} & C_1 \left[J_{\nu-1}(kr_1) - \frac{1}{r_1} (\nu - \sigma_{13}) J_\nu(kr_1) \right] + \\ & + C_2 \left[N_{\nu-1}(kr_1) - \frac{1}{r_1} (\nu - \sigma_{13}) N_\nu(kr_1) \right] = 0 \\ & C_1 \left[J_{\nu-1}(kr_2) - \frac{1}{r_2} (\nu - \sigma_{13}) J_\nu(kr_2) \right] + \\ & + C_2 \left[N_{\nu-1}(kr_2) - \frac{1}{r_2} (\nu - \sigma_{13}) N_\nu(kr_2) \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.2.17)$$

$x=kr_2$ desək bu sistemin sıfırdan fərqli həllinin varlığı üçün onun determinantı sıfıra bərabər olmalıdır. Həmin şərti belə yaza bilər:

$$\begin{aligned} & \frac{x J_{\nu-1}(x) - (\nu - \sigma_{13}) J_\nu(x)}{x N_{\nu-1}(x) - (\nu - \sigma_{13}) N_\nu(x)} = \\ & = \frac{\begin{pmatrix} x & r_1 \\ x & r_2 \end{pmatrix} J_{\nu-1} \begin{pmatrix} x & r_1 \\ x & r_2 \end{pmatrix} - (\nu - \sigma_{13}) J_\nu \begin{pmatrix} x & r_1 \\ x & r_2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} x & r_1 \\ x & r_2 \end{pmatrix} N_{\nu-1} \begin{pmatrix} x & r_1 \\ x & r_2 \end{pmatrix} - (\nu - \sigma_{13}) N_\nu \begin{pmatrix} x & r_1 \\ x & r_2 \end{pmatrix}} \end{aligned} \quad (7.2.18)$$

Beləliklə, məxsusi rəqslər üçün tekzlik tənliyi almış olduq. Qeyd edək ki, σ_{13} -ə effektiv Puasson əmsalı da deyilir. Əgər bu

tezlik tənliyinin x_n kökləri tapılmış olarsa, onda mexaniki rezonansın ($u=\infty$) tezliyini hesablamaq üçün

$$f_n = \frac{x_n}{2\pi r_2} (p s_{\text{effe}})^{-\frac{1}{2}} \quad (7.2.19)$$

düsturundan istifadə etmək olar.

(7.2.18) tənliyinin ən kiçik kökü x_0 «dairəvi rezonansa uyğun gəlir, x_n ($n=1,2,3\dots$) kökləri isə qalınlıq tipli rezonanslara uyğundurlar. Göstərmək mümkündür ki, bu tezliklər elə elektrik sahəsinin antirezonans tezlikləri ilə üst-üstə düşürlər.

Rezonatorun elektrik müqavimətini tapmaq üçün (7.2.11) və (7.2.12)-nin təşkil etdikləri qeyri-bircins sərhəd məsələsini həll etməliyik. Bunun üçün əvvəlcə göstərək ki

$$\Phi(r) = \frac{\pi A}{2} \left[N_v(kr) \int_r^1 J_v(kr) dr - J_v(kr) \int_r^1 \frac{N_v(kr)}{r} dr \right] \quad (7.2.20)$$

ifadəsi (7.2.12)-nin xüsusi həllidir. Doğurdan da (7.2.20)-ni (7.2.12)-də yazıb zəruri qruplaşdırmaları yerinə yetirsək alırıq:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi A}{2} \left\{ \left[N_v''(kr) + \frac{1}{r} N_v'(kr) + (kr - v^2) N_v(kr) \right] \int_r^1 \frac{J_v(kr)}{r} dr - \right. \\ & \left. - \left[J_v''(kr) + \frac{1}{r} J_v'(kr) + (kr - v^2) J_v(kr) \right] \int_r^1 \frac{N_v(kr)}{r} dr \right\} + \quad (7.2.21) \\ & + \frac{\pi A}{2} \left[N_v'(kr) J_v(kr) - J_v'(kr) N_v(kr) \right] \frac{1}{r} = \frac{A}{r^2} \end{aligned}$$

(7.2.21)-də fiqurlu mötərizə daxilinə düşən düz mötərizələrin daxilləri $N_v(kr)$ və $J_v(kr)$ Bessel tənliklərinin həlli olduqlarından sıfır bərabərdirlər. Onda alırıq:

$$\frac{\pi A}{2r} \left[N_v'(kr) J_v(kr) - J_v'(kr) N_v(kr) \right] = \frac{A}{r^2}$$

və yaxud

$$N'_v(kr)J_v(kr) - J'_v(kr)N_v(kr) = \frac{2}{\pi r}$$

bu isə məlum [106 səh, 327 düstur 36]

$$N'_v(kr)J_v(kr) - J'_v(kr)N_v(kr) = \frac{c}{r}$$

eyniliyinin $c = \frac{2}{\pi}$ olduğu xüsusi halıdır.

Beləliklə, (7.12.12) tənliyinin ümumi həllini belə yazıla bilər:

$$U = \bar{C}_1 J_v(kr) + \bar{C}_2 N_v(kr) + \frac{\pi A}{2} \left[N_v \int \frac{J_v(kr)}{r} dr + J_v \int \frac{N_v(kr)}{r} dr \right] \quad (7.2.22)$$

\bar{C}_1 və \bar{C}_2 sabitləri (7.2.14) sərhəd şərtlərindən tapılır və belə ifadə olunurlar:

$$\begin{aligned} \bar{C}_1 &= \frac{F_3(kr_1)F_2(kr_2) - F_3(kr_2)F_2(kr_1)}{F_1(kr_1)F_2(kr_2) - F_1(kr_2)F_2(kr_1)} \\ \bar{C}_2 &= \frac{F_3(kr_2)F_1(kr_1) - F_3(kr_1)F_1(kr_2)}{F_1(kr_1)F_2(kr_2) - F_1(kr_2)F_2(kr_1)} \end{aligned} \quad (7.2.23)$$

Belə ki:

$$F_1(kr) = J_{v-1}(kr) - (v - \sigma_{13}) \frac{J_v(kr)}{kr} \quad (7.2.24)$$

$$F_2(kr) = N_{v-1}(kr) - (v - \sigma_{13}) \frac{N_v(kr)}{kr}$$

$$F_3(kr) = \frac{B}{kr} - \frac{\pi A}{2} \left[F_2(kr) \int \frac{J_{v-1}(kr)}{r} dr - F_1(kr) \int \frac{N_{v-1}(kr)}{r} dr \right]$$

(7.2.4) və (7.2.6) bərabərliklərindən alırıq:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{g_{33}^D s_{11}^D - g_{31}^D s_{31}^D}{\Delta} \frac{dU}{dr} + \frac{g_{31}^D s_{33}^D - g_{33}^D s_{13}^D}{\Delta} \frac{U}{r} + \\ &+ \frac{(g_{31}^2 + g_{33}^2) 2g_{31}g_{33} s_{33}^D}{\Delta} \frac{dU}{dr} D_0 \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (7.2.25)$$

bunu

$$U = -\int E_r dz$$

bərabərliyində yazıb tapırıq:

$$U = a(u_2 - u_1) + b \int \frac{u}{r} dr + c \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Burada

$$a = \frac{g_{33} s_{11}^D - g_{31} s_{31}^D}{\Delta}; \quad b = \frac{g_{31} s_{33}^D - g_{33} s_{13}^D}{\Delta}$$

$$c = \frac{(g_{31}^2 + g_{33}^2) - 2g_{31}g_{33}s_{33}^D}{\Delta} D_0$$

u_2 və u_1 uyğun olaraq xarici ($r = r_2$) və daxili ($r = r_1$) səthlə-rindəki yerdəyişmələrdir. Harmonik rəqslərdə rezonatorndan keçən cərəyanı I ilə işarə etsək onu belə hesablaya bilərik:

$$J = j\omega \int_S D_r dS = 2\pi\omega_j D_0 \int_{r_1}^r \frac{r dr}{r} = 2\pi j\omega_j D_0 \int_{r_1}^{r_2} dr$$

$$= 2\pi\omega_j D_0 h \quad h = r_0 - r_1$$

Onda elektrik impedansı (ümumi müqavimət) üçün alarıq:

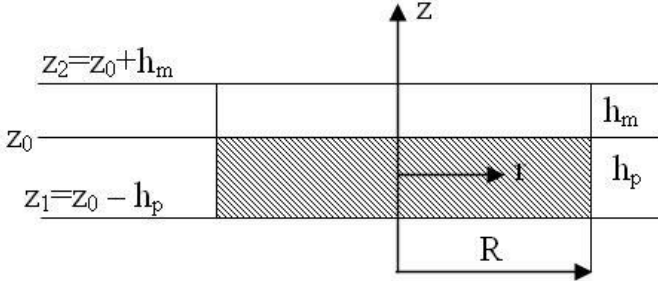
$$z = \frac{1}{2\pi j\omega h D_0} \left[a(u_2 - u_1) + b \int_{r_1}^r \frac{u dr}{r} + c \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

§7.3. Metal-pyezokeramika tipli diskvari bimorf çeviricinin rəqsləri

Bimorf tipli peyzoelementlər müxtəlif texnik qurğularda o cümlədən xüsusi pyezokeramik təzyiç göstəricilərində (datçik-lərdə) geniş tətbiq olunurlar. Bunlardan simmetrik (pyezo-keramika-pyezokeramika) və asimmetrik (metal-pyezokerami-ka) bimorflara daha tez-tez ehtiyac olur. Birinci halda qalınlıq istiqamətində qarşı-qarşıya polyarlaşmış iki pyezokeramik löv-hə bir-birinə yapışdırılır, ikinci halda isə pyezokeramik lövhə

metal lövhəyə yapışdırılır. Bimorf təzyiq göstəricilərinin həssaslığını və digər dinamik xarakteristikalarını öyrənmək üçün bu tipli çeviricilərin riyazi modellərinin qurulması zəruridir.

Bir-birinə yapışdırılmış eyni R radiuslu dairəvi metal və qalınlıq istiqamətinə polyarlaşdırılmış peyzokeramik lövhədən ibarət olan çeviriciyə baxaq.



Şəkil 7.3.1.

Bu lövhələrin qalınlıqlarına uyğun olaraq h_m və h_p deyək və çeviriciyə, z oxu ikilaylı disk oxu ilə üst-üstə düşən r , θ , z silindrik koordinat sistemi birləşdirək. Bu sistemin gətirilmə səthi $z = 0$ -a nəzərən vəziyyətini aşağıdakı kimi təyin edəcəyik (şəkil 7.3.1).

Metal lövhənin yuxarı səthinin, peyzoelementin aşağı səthinin və ayırma səthinin koordinatlarını uyğun olaraq

$$z_2 = z_0 + h_m, z_1 = z_0 - h_p \text{ və } z_0$$

ilə işarə edək.

Metal lövhənin səthinə normal istiqamətdə verilən harmonik $p e^{i\omega t}$ ($p = \text{const}$) yükünün təsiri altında elektrodları açıq olan peyzoelementdə $V_x e^{i\omega t}$ potensiallar fərqi yaranır. Peyzokeramik disk sətlini örtən elektrodların və lövhələr arasındakı yapışqan qatının qalınlıqlarını nəzərə almayacağıq. Asimmetrik bimorfun oxa simmetrik rəqslərinin riyazi modelini qurmaq üçün aşağıdakı kinematik hipotezlər qəbul olunur:

$$u_r(r, z) = u(r) + z\psi(z); u_z(r, z) = w(r) \quad (7.3.1)$$

burada $u(r)$ və $w(r)$ başlanğıcdakı səthin tangensial və normal yerdəyişmələridir, ψ - səthə normalın dönmə bucağıdır. Hər yerdə zamandan asılı $e^{i\omega t}$ vuruğu yazılır. Deformasiya tenzorunun komponentləri (7.3.1)-ə uyğun olaraq belə yazılırlar:

$$e_{rr} = \varepsilon_{rr} + z\alpha_r; e_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta} + z\alpha_\theta; e_{rz} = \varepsilon_{rz}; e_{zz} = 0 \quad (7.3.2)$$

Belə ki, burada

$$\begin{aligned} e_r &= \frac{du}{dr}; & e_\theta &= \frac{du}{r}; & \alpha_r &= \frac{d\psi}{dr}; \\ \alpha_r &= \frac{\psi}{r}; & 2\varepsilon_{rz} &= \frac{dw}{dr} + \psi \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

(7.3.1) hipotezləri yerdəyişmələrin ikilaylı bimorfun qalınlıq istiqamətində dəyişmə qanununu göstərir. Bu hipotezləri elektrik potensialının diskin qalınlığı istiqamətində dəyişmə qanununu göstərən hipotezlə tamamlayaq. Belə hipotez qismində [86]-də tətbiq olunmuş kvadratik annposkimasiyanı göstərək:

$$\varphi(r, z) = \frac{V_x}{h_p} \bar{z} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{4\bar{z}^2}{h_p^2} \right) \phi(r) \quad (7.3.4)$$

Burada V_x açıq elektrodlarda naməlum potensiallar fərqiinin amplitududur. (7.3.4) ifadəsində \bar{z} pyezokeramik diskin ortalıq səthindən ölçülən koordinatdır. Bu səthlə bimorfun başlanğıc səthi arasındakı məsafəni $a = z_0 - \frac{h_p}{2}$ ilə işarə edib (7.3.4)-ü başlanğıc səthə bağlı koordinat sistemində yazaq:

$$\varphi(r, z) = \frac{V_x}{h_p} (z - a) + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{4(z - a)^2}{h_p^2} \right) \phi(r) \quad (7.3.5)$$

Onda pyezokeramik diskdəki elektrik sahəsinin gərginlik vektorunun komponentləri üçün alırıq:

$$E_r(r, z) = f(z)E_r^{(0)}(r) \quad E_z(r, z) = E_z^{(0)} + (z - a)E_z^{(1)}(r)$$

$$f(z) = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{4(z - a)^2}{h_p^2} \right) \quad (7.3.6)$$

harada ki,

$$E_z^{(0)} = -\frac{d\phi}{dr}; \quad E_z^{(1)} = -\frac{V_x}{h_p}; \quad E_z^{(1)} = \frac{12}{h_p^2} \phi \quad (7.3.7)$$

Elektrostatika tənliklərini və təbii sərhəd şərtlərini tapmaq üçün ümumiləşmiş Hamilton prinsipinə [82] müraciət edirik. Bimorfun qərarlaşmış oxa simmetrik rəqslərinə baxaraq:

$$\delta u_r, u_z, u \left\{ \int_0^R \int_{z_1}^{z_2} (\sigma_{rr} e_{rr} + \sigma_{\theta\theta} e_{\theta\theta} + \sigma_{zz} e_{zz} + 2\sigma_{rz} e_{rz}) r dr dz - \right.$$

$$- \int_0^R \int_{z_1}^{z_2} (D_r E_r + D_z E_z) r dr dz - \quad (7.3.8)$$

$$\left. - \frac{\omega^2}{2} \int_0^R \int_{z_1}^{z_2} \rho(z) (u_r^2 + u_z^2) r dr dz - \int_0^R \rho u_z dr dz \right\} = 0$$

Funksionalının stasionarlıq şərtindən istifadə edəcəyik. (7.3.8)-də $\rho(z)$ – hissə-hissə sabit sıxlıq funksiyasıdır. Keramik və metal disklərin sıxlıqlarına uyğun olaraq ρ_p və ρ_m deyək. İki-laylı lövhənin gərginlik vəziyyətinin integral xarakteristikalarını daxil etsək

$$N_r = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_{rr} dz; \quad N_\theta = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_{\theta\theta} dz; \quad M_r = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_{rr} z dz$$

$$M_\theta = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_{\theta\theta} z dz; \quad Q_r = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_{rz} dz \quad (7.3.9)$$

və eləcə də pyezokeramik lövhənin elektriklik vəziyyəti üçün

$$\hat{D}_r = \int_{z_1}^{z_2} D_r f(z) dz; \quad \hat{D}_z^{(0)} = \int_{z_1}^{z_2} D_z dz; \quad (7.3.10)$$

$$\hat{D}_z^{(1)} = \frac{12}{h_p^2} \int_{z_1}^{z_2} D_z (z - a) dz$$

daxil etsək (7.3.8) variasiya tənliyini (7.3.2) və (7.3.6)-ya əsasən aşağıdakı şəkə salə bilərik:

$$\int_0^R [N_r \delta \epsilon_r + N_\theta \delta \epsilon_\theta + M_r \delta \alpha_r + M_\theta \delta \alpha_\theta + 2Q_r \delta \epsilon_{rz} + \\ + D_r \delta E_r^{(0)} - D_z^{(0)} \delta E_z^{(1)} - \frac{h_p^2}{12} D_z^{(1)} \delta E_z^{(1)} - \omega^2 [u \delta u + w \delta w] + \\ + \bar{\rho} [(u \delta \psi - \psi \delta u) + \rho_2 \psi \delta \psi - \rho \delta w]] r dr = 0 \quad (7.3.11)$$

harada ki

$$\rho_1 = \rho_p h_p + \rho_m h_m; \quad \rho_2 = \rho_p \frac{z_0^3 - z_1^3}{3} + \rho_m \frac{z_2^3 - z_0^3}{3} \\ \bar{\rho} = \rho_p \frac{z_0^3 - z_1^3}{2} + \rho_m \frac{z_2^3 - z_0^3}{2}$$

(7.3.11) tənliyində asılı olmayan δu , δw , $\delta \psi$, $\delta \phi_r$ və δV_x variasiyaların ikeçdikdə rəqs tənlikləri:

$$\frac{dN_r}{dr} + \frac{1}{r} (N_r - N_\theta) + \rho_1 \omega^2 u + \bar{\rho} \omega^2 \psi = 0 \\ \frac{dQ_r}{dr} + \frac{Q_r}{r} + \rho_1 \omega^2 w + p = 0 \quad (7.3.12) \\ \frac{dM_r}{dr} + \frac{1}{r} (M_r - M_\theta) - Q_r + \rho_2 \omega^2 \psi + \bar{\rho} \omega^2 u = 0,$$

elektrostatika tənlikləri

$$\frac{d}{dr} (r \hat{D}_r) - r \hat{D}_z^{(1)} = 0 \quad (7.3.13)$$

hələlə inteqral münasibəti

$$\int_0^R D_z^{(0)} r dr = 0 \quad (7.3.14)$$

alınır. (7.3.14) şərtinin mənası pyzeoelementin ortalıq səthindən keçən yerdəyişmə cərəyanının ($2\pi\omega$ dəqiqliyi ilə) sıfıra bərabər olmasıdır. Bu inteqral münasibəti, pyzokeramik diskin ekvipotensial səthlərində potensiallar fərqi birqiymətli təyin etmək üçün əlavə şərt hesab olunur. Təbii sərhəd şərtləri (7.3.11)-in nəticəsi olan

$$\left[N_r \delta u + M_r d\psi + Q_r \delta w + \hat{D}_r \delta \phi \right]_{r=0,R} = 0$$

bərabərliklərindən alınır.

Asimmetrik bimorfun elektroelastiklik münasibətlərini (7.3.9), (7.3.10) düsturlarına əsasən üç ölçülü hal tənliklərini nazik lövhələr nəzəriyyəsinin hipotezləri çərçivəsində inteqrallaqla alırıq. Onda qüvvə və momentləri belə ifadə edə bilərik:

$$\begin{aligned} N_r &= C_1 \varepsilon_r + C_2 \varepsilon_\theta + B_1 \varkappa_r + B_2 \varkappa_\theta - N_{el}, \\ N_\theta &= C_2 \varepsilon_r + C_1 \varepsilon_\theta + B_2 \varkappa_r + B_1 \varkappa_\theta - N_{el}, \\ M_r &= B_1 \varepsilon_r + B_2 \varepsilon_\theta + D_1 \varkappa_r + D_2 \varkappa_\theta - M_{el}, \\ M_\theta &= B_2 \varepsilon_r + B_1 \varepsilon_\theta + D_2 \varkappa_r + D_1 \varkappa_\theta - M_{el}. \end{aligned} \quad (7.3.15)$$

(7.3.15)-də göstərilən sərtlik xarakteristikaları və elektrik toplananları aşağıdakı bərabərliklərlə təyin olunurlar:

$$N_{el} = \frac{d_{31}}{s_{11}^D(1-\nu_p)} \int_{z_1}^{z_0} E_r dz; \quad M_{el} = \frac{d_{31}}{s_{11}^D(1-\nu_p)} \int_{z_1}^{z_0} E_z z dz \quad (7.3.16)$$

$$C_1 = h_p C_{11}^p + h_m C_{11}^m; \quad C_2 = h_p \nu_p C_{11}^p + h_m \nu_m C_{11}^m$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{z_0^2 - z_1^2}{2} C_{11}^p + \frac{z_2^2 - z_0^2}{2} C_{11}^m \\
B_2 &= \frac{z_0^2 - z_1^2}{2} C_{11}^p v_p + \frac{z_2^2 - z_0^2}{2} v_m C_{11}^m \\
D_1 &= \frac{z_0^3 - z_1^3}{3} v_p C_{11}^p + \frac{z_2^3 - z_0^3}{3} v_m C_{11}^m \\
D_2 &= \frac{z_0^3 - z_1^3}{3} v_p C_1^p + \frac{z_2^3 - z_0^3}{3} v_m C_{11}^m
\end{aligned} \tag{7.3.17}$$

(7.3.16) bərabərliyində d_{31} – pyezomodul, s_{11}^D və v_p pyezokeramik diskin elastiklik sabiti və Puasson əmsalıdır. (7.3.17) bərabərliyində

$$C_{11}^p = \frac{1}{s_{11}^p(1 - v_p^2)} \quad \text{və} \quad C_{11}^m = \frac{1}{s_{11}^m(1 - v_m^2)}$$

kimi işarə olunublar.

Bircinsli elastik (elektroelastik) lövhə və örtüklər nəzəriyyəsinə gətirilmə səthi qismində ortalıq səthin seçilməsi ilə qüvvə və momentlərin ortalıq səthin deformasiyaları ilə əlaqələri daha sadə şəkildə müəyyənləşdirilir – qüvvələr ancaq tangensial, momentlər isə ancaq əyilmə deformasiyalarından asılı olurlar. Aydın ki, (7.3.15) münasibətləri gərginlik və deformasiya vəziyyətlərinin göstərilən xarakteristikaları arasında daha mürəkkəb əlaqəni ifadə edirlər. Bircinsli lövhələr baxımından bu əlavə əlaqələr sərtlik xarakteristikaları vasitəsi ilə yerinə yetirilir. Bu xarakteristikaların ifadələrinin təhlili göstərir ki, əgər hər iki lövhənin Puasson əmsallarını bərabər qəbul etsək, başlanğıc səthi müvafiq qaydada seçməklə $B_1=B_2=0$ şərtini ödəmək olar. Onda (7.3.15) asılılıqları bircinsli məsələdə olduğu kimi sadə şəkllə düşürlər. Belə sadələşdirmə ancaq layların Puasson əmsalları bərabər olduqda mümkün olur [87].

Gətirmə səthinin vəziyyəti $B_1 = B_2 = 0$ şərtindən ($v_p = v_m$ olduqda) aşağıdakı münasibətlərlə təyin olunur:

$$\begin{aligned}
z_0 &= h_p \gamma_0; & z_1 &= h_p (\gamma_0 - 1); \\
z_2 &= h_p (\gamma_0 + \beta); & \gamma_0 &= \frac{\alpha - \beta^2}{2(\alpha + \beta)}
\end{aligned} \tag{7.3.18}$$

harada ki $\alpha = \frac{s_{11}^m}{s_{11}^p}$ və $\beta = \frac{h_m}{h_p}$. $\beta = 0$ xüsusi halı ilkin səthi ortalıq səth olan birləşli pyezokeramik lövhəyə uyğundur. $\alpha = 1$ ($\beta \neq 0$) olduğu halda başlanğıc səth ikiləyli paketin ortalıq səthi ilə üst-üstə düşür.

Beləliklə, $v_m = v_p = v$ şərti ödəndikdə bimorf üçün maddi münasibətlər belə yazıla bilər:

$$\begin{aligned}
N_r &= C_{11}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + e_{31} h_p E_z^{(0)}; & N_\theta &= C_{11}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) - e_{31} h_p E_z^{(0)} \\
M_r &= D_{11}(\varkappa_r + v \varkappa_\theta) - e_{31} h_p^2 \left[E_z^{(0)}(\gamma_0 - 0,5) + \frac{h_p}{12} E_z^{(1)} \right] \\
M_\theta &= D_{11}(v \varkappa_r + \varkappa_\theta) - e_{31} h_p^2 \left[E_z^{(0)}(\gamma_0 - 0,5) + \frac{h_p}{12} E_z^{(1)} \right] \\
Q_r &= C_{44} 2\varepsilon_{rz} - e_{15} h_p E_r^{(0)}; & \hat{D}_r &= \varepsilon_{11} h_p E_r^{(0)} - e_{15} h_p 2\varepsilon_{rz} \\
\hat{D}_z^{(0)} &= \varepsilon_{33} h_p E_z^{(0)} + e_{31} h_p (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + e_{31} h_p^2 (\gamma_0 - 12)(\varkappa_r + \varkappa_\theta) \\
\hat{D}_z^{(1)} &= \varepsilon_{33} h_p E_z^{(1)} + e_{31} h_p (\varkappa_r + \varkappa_\theta)
\end{aligned} \tag{7.3.19}$$

Belə ki,

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{h_p}{s_{11}^p(1 - v^2)}; & C_{44} &= \frac{h_p}{s_{44}^p} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \right); & e_{31} &= \frac{d_{31}}{s_{11}^p(1 - v)}; \\
e_{15} &= \frac{d_{15}}{s_{44}^p}; & D_{11} &= \frac{h_p^3}{s_{11}^p(1 - v^2)} \left(\gamma_0^2 - \gamma_1^2 + \frac{\gamma_2^3 - \gamma_1^3}{\alpha} \right) \\
\varepsilon_{33} &= \varepsilon_{33}^T (1 - K_p^2); & \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{11}^T (1 - K_{15}^2)
\end{aligned}$$

və s_{11}^p, s_{44}^p - elastiklik sabitləri (sabit elektrik sahəsində), d_{31}, d_{15} – pyezomodullar, $\epsilon_{11}^T, \epsilon_{33}^T$ - sabit gərginlikdə dielektrik nüfuzluluqları, K_p, K_{15} – planar və sürüşmə elektromexaniki əlaqə əmsallarıdır.

(7.3.12) rəqs və (7.3.13) elektrostatika tənlikləri (7.3.3), (7.3.7) asılılıqları (7.3.19) maddi münasibətləri və (7.3.14) inteqral münasibəti birlikdə layların sürüşmə sərtliyi azaldılmış metal-pyezokeramika tipli bimorf çeviricinin oxasimetrik rəqslərinin qapalı tənliklər sistemini təşkil edirlər.

Layların sürüşmə sərtliyi yüksək olan nazik bimorfun dinamik xarakteristikalarının qiymətləndirmək üçün yuxarıda göstərilən tənliklərin sadələşdirilmiş variantına müraciət etmək məqsədyönlüdür. Eninə sürüşmə deformasiyasını sıfıra bərabər ($\epsilon_{zz} = 0$) tutub sürüşmə sərtliyini isə sonsuz qəbul edərək Kirxhof-Lyav modelinə keçək. Limitdə sonlu qiymət alan kəsici qüvvə (7.3.12) sisteminin üçüncü tənliyindən inersial hədləri atmaqla təyin edilə bilər. Normalın dönmə bucağı sərbəst olmayıb lövhənin öz müstəvisindən çıxması (proqib) w-dən

$$\psi = -\frac{dw}{dr} \quad (7.3.20)$$

bərabərliyi ilə asılıdır. Tənliklərin sonrakı sadələşdirilmələrini $D_z^{(0)} = 0$ qəbul etməklə yerinə yetiririk. Aşkar

$$D_z(r, z) = \frac{1}{h_p} \hat{D}_z^{(0)}(r) + \frac{z-a}{h_p} \hat{D}_z^{(1)}(r) \quad (7.3.21)$$

bərabərliyindən aydındır ki, (7.3.21) əlavə məhdudiyyət anlayışı, əslində pyezokeramik elementin qalınlıq istiqamətində elektrik induksiyaının normal komponentinin sabitliyi haqqında daha sərt [88] hipotezə keçid deməkdir. (7.3.21) və (7.3.19) bərabərliklərindən istifadə edərək elektrik sahəsinin

$E_z^{(1)}$ gərginliyində xətti düzəliş başlanğıc səthin əyriliyinin dəyişməsi ilə ifadə etmək

$$E_z^{(1)} = \frac{K_p^2}{2d_{31}(1 - K_p^2)} (\mathfrak{a}_r + \mathfrak{a}_\theta)$$

və beləliklə onu (7.3.19) tənliyindən təcrid etmək imkanı verir. Elektrostatikaanın (7.3.13) tənliyi (7.3.21)-i nəzərə almaqla sadələşib

$$\hat{D}_r = \frac{\text{const}}{r}$$

şəklinə düşür və pyezokeramik diskin silindrik səthində yüklər olmadığı halda ödənməmiş olar. Daha sərt mexaniki və elektrik hipotezlərinə keçidlə bağlı sadələşdirmə, daha sadə elektromexaniki modelə və dəyişənlərin azalmasına gətirir – dönmə bucağı və ϕ funksiyası daha başlanğıc səthin öz müstəvisindən çıxmasının funksiyası olurlar.

Yuxarıda deyilənlərə uyğun (7.3.3), (7.3.7) münasibətlərinin ifadəsi ilə sadələşdirilmiş (7.3.19) maddi münasibətlərini indi belə yazma bilirik:

$$\begin{aligned} N_r &= C_{11} \left(\frac{du}{dr} + v \frac{u}{r} \right) + e_{31} V_x; \\ N_\theta &= C_{11} \left(v \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right) + e_{31} V_x \\ M_r &= -\bar{D}_{11} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + v \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + e_{31} h_p (\gamma_0 - 0,5) V_x; \\ M_\theta &= -\bar{D}_{11} \left(\bar{v} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + e_{31} h_p (\gamma_0 - 0,5) V_x; \end{aligned} \tag{7.3.22}$$

$$\hat{D}_z^{(0)} = -\varepsilon_{33} V_x + e_{31} h_p \left[\left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right) - h_p (\gamma_0 - 0,5) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right] \quad (7.3.23)$$

Momentlərin ifadələrində götürülmüş əyilmə sərtliyi və Puasson əmsalı iştirak edirlər

$$\bar{D}_{11} = \frac{h_p^3}{s_{11}^p (1 - \nu^2)} d; \quad \bar{\nu} = \frac{8g\nu + k}{8g + k}$$

harada ki,

$$d = \frac{8g + k}{24}; \quad k = \frac{(1 + \nu) K_p^3}{1 - K_p^2}; \quad g = \gamma_0^3 - \gamma_1^3 + \frac{\gamma_2^3 - \gamma_1^3}{\alpha}$$

(7.3.23)-ü (7.3.14) inteqral şərtində yazmaqla naməlum potensiallar fərqi üçün ifadə tapa bilərik. İnteqrallamadan sonra alırıq:

$$V_x = \frac{1}{d_{31}} \frac{K_p^2}{1 - K_p^2} \cdot \frac{h_p}{R} [u(R) - h_p (\gamma_0 - 0,5) w'(R)] \quad (7.3.24)$$

Beləliklə, potensialların çıxış fərqi başlanğıc səthin tangensial yerdəyişməsi və lövhənin ($r=R$) səthindəki dönmə bucağı ilə ifadə olunur. Aydınır ki, lövhənin qıraqları sərt bərkidilmiş olduqda potensiallar fərqi əmələ gəlmir.

(7.3.22)-ni (7.3.12) sistemində yazıb bimorfun qalınlığının kubu və kvadratı tərtibində olan kiçik inersial hədləri nəzərə almadan yerdəyişmələrdə rəqs tənliklərini alırıq

$$\Delta u + \left(\lambda^2 - \frac{1}{x^2} \right) = 0 \quad (7.3.25)$$

$$\Delta \Delta w - \mu^4 w = q \quad (7.3.26)$$

Burada $\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx}$ operatoru, $x = \frac{r}{R}$ ölçüsüz koordinat daxil edilmişdir. u və w radiusa bölünmüş ölçüsüz yerdəyişmələrdir, ölçüsüz kəmiyyətlər

$$\lambda^2 = \alpha\Omega^2; \quad \mu^4 = \alpha_2\Omega^2; \quad q = \frac{\rho R^3}{D_{11}}$$

$$\Omega^2 = \omega^2 R \rho_p s_{11}^p (1 - \nu^2); \quad \alpha_1 = \alpha \frac{1 + \rho\beta}{\alpha + \beta}$$

$$\alpha_2 = \frac{1 + \rho\beta}{\varepsilon^2 d}; \quad \rho = \frac{\rho_m}{\rho_p}; \quad \varepsilon = \frac{h_p}{R}$$

kimi ifadə olunurlar.

Bimorfun planar və əyilmə rəqslərinin (7.3.25), (7.3.26) tənlikləri şəkilcə bircinsli izotrop lövhələr üçün analogi tənliklərdən fərqlənmirlər. Bu tənliklərin həlləri radial yerdəyişmənin sıfıra bərabər olması və lövhənin mərkəzində yerdəyişmənin məhdud olması şərtləri daxilində J_n Bessel funksiyası və I_n modifikasiya olunmuş Bessel funksiyaları ilə ifadə olunurlar.

$$u = A_1 J_1(\lambda x); \quad w = A_2 J_0(\mu x) + A_3 I_0(\lambda x) - \frac{q}{\mu^4} \quad (7.3.27)$$

(7.3.24) bərabərliyi, (7.3.27)-dən istifadə etməklə belə yazılır

$$V = \frac{k^2}{1 + \nu} \varepsilon \{A_1 J_1(\lambda) + \varepsilon(\gamma_0 - 0,5)(A_2 J'_0(\lambda) + A_3 I'_0(\lambda))\} \quad (7.3.28)$$

Harada ki, $V = \frac{V_x d_{31}}{R}$ ölçüsüz potensialdır.

Naməlum V -ni və integral sabitləri A_1, A_2, A_3 -ləri tapmaq üçün (7.3.28) bərabərliyini sərhəd şərtləri ilə tamamlayaq. Şarnirli bərkitmə halında sərhəd şərtləri

$$U(1)=0, w(1)=0, M_x(1)=0 \quad (7.3.29)$$

və (7.3.28) bərabərliklərindən naməlum sabitləri tapmaq üçün cəbri tənliklər sistemi alırıq. Aydındır ki, $A_1=0$. Bimorfun əyilmə rəqslərində çıxış gərginliyi üçün aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$V = \frac{qk\varepsilon^2(\gamma_0 - 0,5)}{\mu(1 + \nu)} \times$$

$$\times \frac{I_0(\mu)J_0(\mu) - J_1(\mu)I_1(\mu)}{\left[-2\mu^2 J_0(\mu)I_0(\mu) + \mu \left(1 - \bar{\nu} - \frac{k(\gamma_0 - 0,5)}{d} \right) \right] [I_0(\mu)J_1(\mu) - J_0(\mu)I_1(\mu)]}$$

Sərhədlərin sərbəst söykənmə halında başqa hal meydana çıxır

$$N_x(1) = 0; w(1) = 0; M_x(1) = 0 \quad (7.3.30)$$

Belə ki, bu halda əyilmə rəqsindən başqa planar rəqslər də mövcud olur və (7.3.28) bərabərliyinə əsasən A_1 , A_2 , A_3 sabitləri bir-birindən asılı olmayaraq təyin oluna bilmirlər. (7.3.30) sərhəd şərtindən (7.3.28)-dən də istifadə etməklə cəbri tənliklər sistemi alırıq və onun sıfırdan fərqli həllini tapmaq üçün determinantını sıfıra bərabər edib məxsusi rəqslər üçün tezlik tənliyi alırıq:

$$\begin{aligned} & [\lambda J_0(\lambda) + (\nu_1 - 1)J_1(\lambda)] \times \\ & \times \left[-2\mu^2 I_0(\mu)J_0(\mu) + \mu(1 - \nu_2) [I_0(\mu)J_0(\mu) + I_1(\mu)J_1(\mu)] - \right. \\ & \left. - kJ_1(\mu)\mu [J_1(\mu)I_0(\mu) + I_1(\mu)J_0(\mu)] \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.3.31)$$

Burada:

$$\nu_1 = \nu + \frac{k\alpha}{\beta + \alpha}; \quad \nu_2 = \bar{\nu} + \frac{k(\gamma_0 - 0,5)^2}{d}; \quad \bar{k} = \frac{k^2\alpha(\gamma_0 - 0,5)}{d(\alpha + \beta)}$$

Xüsusi halda ($\gamma_0=0,5$) $\beta=0$ olduqda (7.3.31) tənliyi iki bir-birindən asılı olmayan tezlik tənliyinə, biri pyezokeramik diskin elektrodları açığı olduğu halda radial rəqsləri üçün

$$\lambda J_0(\lambda) + (\nu - 1 + k)J_1(\lambda) = 0$$

və o birisi də əyilmə rəqslərinin məxsusi tezlikləri üçün

$$-2\mu^2 J_0(\mu)I_0(\mu) + \mu(1 - \bar{\nu})[J_1(\mu)I_0(\mu) + I_1(\mu)J_0(\mu)] = 0$$

tənliklərinə ayrılır.

Ümumi halda $\beta \neq 0$ planar və əyilmə rəqsləri əlaqəli olurlar. Qeyd etməliyə ki, rəqslərin əlaqəliliyi tərs pyezoeffektin nəticəsi olaraq təzahür edir. Tənliklərdə bu əlaqə (7.3.30) sərhəd şərtlərinin ödənilməsi ilə (7.3.28) asılılığı vasitəsi ilə yerinə yetirilir. Pyezoelementin elektrodlarında potensiallar fərqi verildiyi halda (7.3.28) münasibəti maraqlı dairəsindən çıxarılır və bunun nəticəsində planar və əyilmə rəqslərinin tənlikləri əlaqəli olurlar.

§7.4. Mexaniki yüklənmədə qalın divarlı pyezokeramik silindrin rəqsləri [89]

Elektroelastiklik məsələlərində elektrik və mexaniki gərginlik sahələrinin bağlılığı pyezokeramik materiallardan hazırlanmış konstruksiya elementlərində gərginlik-deformasiya vəziyyətinin mürəkkəb şəklini şərtləndirir. Üçölçülü nəzəriyyənin örtüklər (оболочки) nəzəriyyəsinə gətirilməsinin inkişaf etdirilən yanaşmalarının müəyyən əsaslandırılmalara ehtiyacı var. Bu məqam dəqiq qoyulmuş elektroelastiklik məsələlərinin həllinə marağı daha da artırır.

Burada radial polyarlaşmış qalın divarlı silindrin mexaniki təsir altında məcburi rəqsləri öyrənilir. Rəqslər silindrin xarici yan səthində ($r=r_0+h$; $2h$ – silindrin divarının qalınlığıdır, r_0 – ortalıq səthin radiusudur) verilmiş fəzada bircinsli normal, yəni

$$\sigma_r(r_0 + h) = \sigma_0 e^{i\omega t} \quad (7.4.1)$$

gərginlikləri ilə həyacanlandırılır.

Silindrik koordinat sistemində qərarlaşmış akustoelektrik oxasimetrik rəqslərin hərəkət tənlikləri [88] belə yazılırlar

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \beta \omega^2 u_r &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \beta \omega^2 u_z &= 0 \\
\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r} D_r + \frac{\partial D_z}{\partial z} &= 0
\end{aligned} \tag{7.4.2}$$

Burada σ_{rr} , σ_{rz} , σ_{zz} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ – gərginlik tenzorunun komponentləri, u_r , u_z , D_r , D_z – uyğun olaraq yerdəyişmə və elektrik induksiyası vektorunun komponentləridir.

Radial polyarlaşmış pyezokeramik silindrin fiziki xassələri (hal tənlikləri) aşağıdakı [87] bərabərliklərlə ifadə olunurlar:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= C_{11}^E \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{13}^E \frac{1}{r} u_r + C_{13}^E \frac{\partial u_z}{\partial z} + \pi_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\
\sigma_{\varphi\varphi} &= C_{13}^E \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{33}^E \frac{1}{r} \frac{u_r}{r} + C_{23}^E \frac{\partial u_z}{\partial z} + \pi_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\
\sigma_{zz} &= C_{13}^E \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{23}^E \frac{1}{r} \frac{u_r}{r} + C_{33}^E \frac{\partial u_z}{\partial z} + \pi_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\
\sigma_{rz} &= C_{55}^E \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \pi_{53} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\
D_r &= \pi_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \pi_{13} \left(\frac{1}{r} u_r + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \epsilon_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\
D_z &= \pi_{53} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) - \epsilon_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial z}
\end{aligned} \tag{7.4.3}$$

Burada C_{ij}^E - elastiklik modulları (bundan sonra E yazılmayacaq), π_{ij} – pyezomodullar, ϵ_{ij} (s – indeksi yazılmır) – dielektrik nüfuzluluqları, φ - elektrik sahəsinin potensialıdır. (7.4.2), (7.4.3) sistemi qapalı sistemdir.

$\frac{\partial u_z}{\partial r}; \frac{\partial \sigma_r}{\partial r}; \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r}; \frac{\partial u_r}{\partial r}; \frac{\partial \varphi}{\partial r}$ və $\frac{\partial D_r}{\partial r}$ kəmiyyətlərini $u_z, \sigma_r, \sigma_{rz}, u_r, \varphi$, və D_r kəmiyyətləri ilə aşağıdakı kimi ifadə edək:

$$\begin{aligned} C_{55} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) &= \sigma_{rz} - \pi_{53} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Rightarrow \\ \Rightarrow C_{55} \frac{\partial u_z}{\partial r} &= \sigma_{rz} - C_{55} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \pi_{53} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} &= -\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{C_{55}} \left(\sigma_{rz} - \pi_{53} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

(7.4.2) və (7.4.3)-ün beşincisindən

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\pi_{11}}{\varepsilon_{11}} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\pi_{13}}{\varepsilon_{11}} \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \frac{1}{\varepsilon_{11}} D_r$$

Bunu (7.4.3)-ün birincisində yazaq.

$$\sigma_r = \frac{c_{11}\varepsilon_{11} + \pi_{11}^2}{\varepsilon_{11}} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{c_{13}\varepsilon_{11} + \pi_{12}\pi_{13}}{\varepsilon_{11}} \frac{u_r}{r} + \frac{c_{13}\varepsilon_{11} + \pi_{12}\pi_{13}}{\varepsilon_{11}} \frac{\partial u_z}{\partial r}$$

$\Delta_1 = C_{11}\varepsilon_{11} + \pi_{11}^2$; $\Delta_4 = C_{11}\varepsilon_{11} + \pi_{12}\pi_{13}$ deyib buradan $\frac{\partial u_r}{\partial r}$ -i tapırıq:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{\varepsilon_{11}}{\Delta} \sigma_r - \frac{\Delta_4}{\Delta_1} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\pi_{11}}{\Delta_1} D_r$$

(7.4.1)-in üçüncüsündən

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} = -\frac{\partial D_z}{\partial z} - \frac{D_r}{r}$$

(7.4.3)-ün dördüncüsündən isə

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{1}{C_{55}} \sigma_{rz} - \frac{\pi_{53}}{C_{55}} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Bunu (7.4.3)-ün altıncısında yazaq. Onda

$$D_z = \frac{\pi_{53}}{C_{55}} \sigma_{rz} - \frac{\pi_{53}^2}{C_{55}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varepsilon_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial z} =$$

$$= \frac{\pi_{53}}{C_{55}} \sigma_{rz} - \frac{1}{C_{55}} (\pi_{53}^2 + C_{55} \varepsilon_{33}) \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$\Delta_5 = \pi_{53}^2 + C_{55} \varepsilon_{33}$ deyək. Onda

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = \frac{\pi_{53}}{C_{55}} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{\Delta_5}{C_{55}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

(7.4.3)-ün beşincisində $\frac{\partial u_r}{\partial r}$ -nin tapılmış ifadəsini yazıb alırıq:

$$D_z = -\frac{\pi_{11} \Delta_4}{\Delta_1} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\pi_{11} \varepsilon_{11}}{\Delta_1} \sigma_{rr} - \frac{\pi_{11} \Delta_4}{\Delta_1} \frac{u_r}{r} + \frac{\pi_{11}^2}{\Delta_1} D_r -$$

$$- \pi_{13} \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Buradan

$$\varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\Delta_3}{\Delta_1} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\pi_{11}}{\Delta} \sigma_{rr} + \frac{\Delta_3}{\Delta_1} \frac{u_r}{r} - \frac{C_{11}}{\Delta} D_r$$

(7.4.2)-nin birincisindən

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = -\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \rho \omega^2 u_r + \frac{1}{r} (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})$$

(7.4.3)-ün birinci və ikinci bərabərliklərinə əsasən $\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}$ fərqlini tapıb burada yazsaq alırıq:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = -\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \rho \omega^2 u_r + \frac{1}{r} \left[(C_{13} - C_{11}) \frac{\partial u_r}{\partial z} + \right.$$

$$\left. + (C_{33} - C_{13}) \frac{u_r}{z} + (C_{23} - C_{13}) \frac{\partial u_z}{\partial z} + (\pi_{13} - \pi_{11}) \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]$$

İndi $\frac{\partial u_r}{\partial r}$ və $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ -in tapılmış ifadələrini burada yazıb zəruri əməlləri yerinə yetirdikdən sonra alırıq

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left(C_{23} + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\Delta_4}{\Delta_1} \right) \sigma_r - \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \\ &- \left[\rho \omega^2 - \frac{1}{r^2} \left(C_{33} - \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right) \right] u_r + \frac{\Delta_3}{\Delta_1} \frac{D_r}{r} \\ \Delta_2 &= C_{11} \pi^2 - 2C_{13} \pi_{11} \pi_{13} - C_{13}^2 \varepsilon_{11} \end{aligned}$$

(7.4.2)-nin ikincisindən

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} &= -\rho \omega^2 u_z - \frac{1}{r} \sigma_{rz} - C_{13} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} - \\ &- \frac{1}{r} C_{23} \frac{\partial u_r}{\partial z} - C_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \pi_{13} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} \end{aligned}$$

İndi də $\frac{\partial u_r}{\partial r}$ və $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ -in tapılmış ifadəlini burada yazıb alırıq:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} - \beta \omega^2 u_z - \frac{\sigma_{rz}}{r} - \left(C_{33} - \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{\Delta_4}{\Delta_1} \frac{\partial \sigma_r}{\partial z} - \\ - \frac{1}{r} \left(C_{33} + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right) \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\Delta_3}{\Delta_1} \frac{\partial D_r}{\partial z} \end{aligned}$$

Beləliklə (7.4.2), (7.2.3) sistemini aşağıdakı sistemlə əvəz etmiş oluruq.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial r} &= \frac{1}{C_{55}} \left(\sigma_{rz} - \pi_{53} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left(C_{23} + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\Delta_4}{\Delta_1} \right) \sigma_r - \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \\ &- \left[\beta \omega^2 - \frac{1}{r^2} \left(C_{33} + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right) \right] u_z + \frac{1}{r} \frac{\Delta_3}{\Delta_1} D_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} &= -\beta \omega^2 u_z - \left(C_{33} + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{\Delta_4}{\Delta_1} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \frac{1}{r} \sigma_{rz} - \\
&- \frac{1}{r} \left(C_{23} + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right) \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\Delta_3}{\Delta_1} \frac{\partial D_z}{\partial z} \\
\frac{\partial u_r}{\partial r} &= -\frac{\Delta_4}{\Delta_1} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\varepsilon_{11}}{\Delta_1} \sigma_{rr} - \frac{1}{r} \frac{\Delta_4}{\Delta_1} u_r + \frac{\pi_{11}}{\Delta_1} D_r \\
\frac{\partial \varphi}{\partial r} &= -\frac{\Delta_3}{\Delta_1} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\pi_{11}}{\Delta_1} \sigma_{rr} - \frac{1}{r} \frac{\Delta_3}{\Delta_1} u_r - \frac{C_{11}}{\Delta_1} D_r \\
\frac{\partial D_r}{\partial r} &= -\frac{\pi_{53}}{C_{55}} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\Delta_5}{C_{55}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{D_r}{r}
\end{aligned} \tag{7.4.4}$$

Fərz edirik ki, silindrin oxaperpendikulyar paralel müstəvilərlə kəsikləri olan uc ($z=0, \ell$) oturacaqları öz müstəvisində tamamilə sərt membranlə tərpənməz birləşib, həm də bu uc səthlər qapalı olmaqla özləri də elektrodlaşdırılıblar. Bu halda (7.4.4) sisteminin həllini belə axtarmaq olar:

$$\begin{aligned}
\{u_z(r, z), \sigma_{rz}(r, z)\} &= \sum_{M=1}^{\infty} \{u_z^m(r), \sigma_{rz}^m(r)\} \cos \frac{m\pi}{\ell} z \\
\{\sigma_{rr}(r, z), u_r(r, z), \varphi(r, z), D(r, z)\} &= \\
&= \sum_{M=1}^{\infty} \{\sigma_{rr}^m(r), u_r^m(r), \varphi^m(r), D^m(r)\} \sin \frac{m\pi}{\ell} z
\end{aligned} \tag{7.4.5}$$

Burada iki varianta, yəni səthlərin elektrodlaşdırılmış və elektrodlaşdırılmamış olduğu hallara baxmaq olar. Birinci halda ya səthlər naməlum potensiallı ekvipotensial səthlər olurlar. Bu səthlərə qeyri-bərabər potensialların verilməsi rəqslərin elektrik həyəcanına gətirir. Bizi isə ancaq mexaniki təsirə reaksiya maraqlandırdığından yan səthlərdə potensialların sıfır olması şərtini qəbul edirik. İkinci halda, xarici mühit elektrik keçirməyəndirsə və pyezomaterialla müqayisədə kiçik dielek-

trik nüfuzluluğuna malikdirsə, onda xarici mühitdə elektrik induksiyası vektorunun komponentlərini nəzərə almamaq olar. Elektrodlaşdırılmamış səthdə sərbəst elektrik yükü sıfıra bərabərdir ki, bu da elektrik induksiya vektorunun normal komponentinin sıfır olması şərtinə gətirir. Sistemin həllini (7.4.5) şəklində axtarmaq nəticə etibarlı ilə baxılan məsələnin həllini ayrılışın əmsallarına nəzərən adi diferensial tənliklər sistemi ardıcılığının müəyyən sərhəd şərtlərini ödəyən həllərinin tapılması məsələsinə gətirir.

Sərhəd şərtləri yuxarıda deyilənlərə əsasən belə olmalıdır

$$\sigma_r(r_0 + h) = \frac{4\sigma_0}{m\pi} \quad (m = 1,3,5,..) \quad (7.4.6)$$

$$\sigma_r(r_0 - h) = \sigma_z(r_0 \pm h) = 0$$

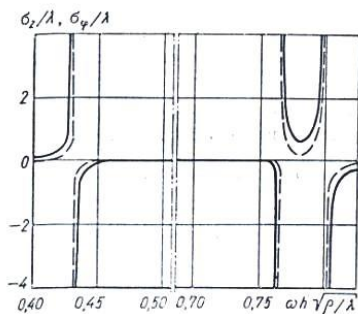
üçüncü şərt elektrik kəmiyyətləri üzərinə qoyulmalıdır. (7.4.5) (7.4.6) məsələsinin analitik həllini tapmaq demək olar ki, qeyri-mümkündür. Ona görə də onun həllini tapmaq üçü hər iki variantda verilmiş həndəsi və mexaniki xarakteristikalar üçün S.K.Qodunovun [91] təklif etdiyi diskret ortoqonalizasiya metodundan istifadə edilir. Bolkisev və başqaları bunu aşağıdakı həndəsi və fizikomexaniki xarakteristikalar üçün yerinə yetirmişlər

$$\frac{h}{r_0} = 0,25 \quad \frac{h}{\ell} = 0,05 \quad \lambda = 10^{10} \frac{N}{m^2} \quad C_{11} = 11,5\lambda$$

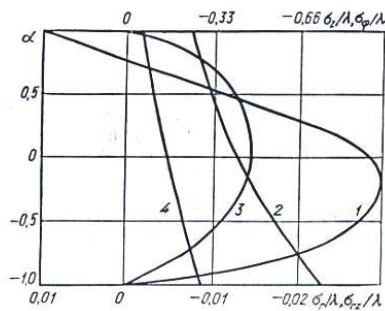
$$C_{23} = 7,78\lambda \quad C_{33} = 13,9\lambda \quad C_{55} = 2,56\lambda \quad \pi_{13} = -5,2 \frac{Kl}{m^2}$$

$$\pi_{53} = 12,7 \frac{Kl}{m^2} \quad \pi_{11} = 15,1 \frac{Kl}{m^2} \quad \varepsilon_{11} = 635e_0 \quad e_{33} = 73e_0$$

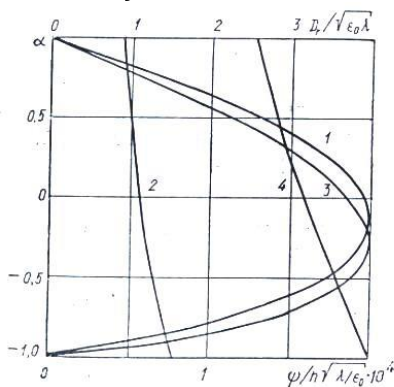
Belə ki, burada ε_0 – vakuumin elektrik nüfuzluluğudur, λ - normallaşdırıcı vuruqdur. Mexaniki təsirin amplitudu $0,01\lambda$ -ya bərabərdir. Həllin bəzi nəticələri 7.4.1-7.4.4 şəkillərində göstərilir.



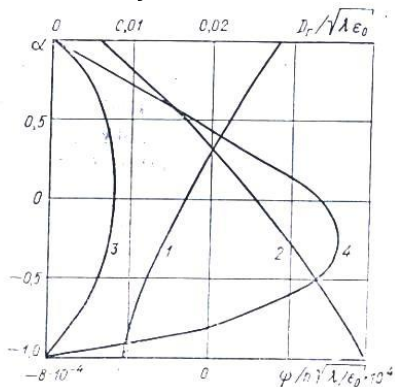
Şəkil 7.4.1.



Şəkil 7.4.2.



Şəkil 7.4.3.



Şəkil 7.4.4.

Şəkil 7.4.1-də ölçüsüz $\frac{\sigma_{zz}}{\lambda}$ və $\frac{\sigma_{\psi\psi}}{\lambda}$ gərginliklərinin amplitud-tezlik xarakteristikaları ortalıq səthin nöqtələri üçün uyğun olaraq bütöv və punktirli xətlərlə təsvir olunur. Baxılan tezliklər oblastı silindrin birinci üç məxsusi tezliklərini əhatə edir. Birinci və üçüncü məxsusi tezliklər birinci, birinci ikinci tezlik isə rəqsin üçüncü formasına uyğundur. Şəkildən görünür ki, rəqsin birinci formasında onlar öz maksimumlarını ortalıq səth üzərində alırlar. 3 əyrisi uc kəsiklərdəki σ_{tz} toxunan gərginliyə uyğundur. α - parametrinin mənası $r_0 = r + \alpha h$ münasibətindən

aydındır. σ_{zz} və $\sigma_{\varphi\varphi}$ maksimumlarını daxili səth üzərində alırlar. Hətta baxdığımız silindr kimi nisbətən qalın silindrlər üçün bu gərginliklər normal σ_{rr} və tangensial σ_{rz} gərginliklərinə onların misli tərtibində çoxdurlar. Qrafiklər silindrin üçüncü məxsusi tezliyinə yaxın olan $\Omega=0,818$ tezliyi üçün tərtib olunublar. Yan səthlər elektrodlaşdırılıb və torpaqla əlaqələndirilib. Şəkil 7.4.3-də elektrodlaşdırılmış və torpaqla əlaqələndirilmiş səthlər üçün silindrin qalınlığı boyunca potensialın paylanması və habelə həmin kəsikdə elektrik induksiyanın normal komponenti (1 və 3 əyriləri $\Omega=0,424$ tezliyində olan və əks işarəli $\Omega=0,818$ tezlikli potensiallara uyğundurlar) göstərilmişdir. (2, 3 əyriləri 0,424 və 0,818 tezliklərə uyğundurlar). Burada induksiyanın qalınlıq boyunca paylanması xətti pılanmaya yaxındır. Şəkil 7.4.4-də səthlərin elektrodlaşdırılmış halı üçün silindrin mərkəzi kəsiyində elektrik induksiya vektorunun normal komponentinin qalınlıq boyunca dəyişməsi (3 və 4 əyriləri 0,424 tezliyi və əks işarəli 0,814 tezlikləri üçün induksiya uyğun) göstərilir. Potensialın dəyişməsi xətti qanuna yaxındır. Sərhəd şərtlərinin şəkli potensialın və induksiya vektorunun normal komponentinə əhəmiyyətli dərəcədə təsir edir ki, bu da tətbiqi nəzəriyyələrin qurulmasında nəzərə alınmalıdır.

§7.5. Radial polyarlaşmış qalın divarlı pyezokeramik silindrə oxasimmetrik akustoelektrik dalğaların yayılması [91]

Daxili və xarici radiusları uyğun olaraq $r_0 - h$ və $r_0 + h$ olan qalın divarlı ($2h$ – silindr divarının qalınlığıdır) pyezokeramik silindrə baxaq. Kəsilməz pyezoelektrik mühitin t , θ , z silindrik koordinat sistemindəki hərəkət tənlikləri belədir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} \right) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \\
\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2\sigma_{r\theta} \right) + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \\
\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + 2\sigma_{rz} \right) + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \\
\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{D_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial D_z}{\partial z} &= 0
\end{aligned} \tag{7.5.1}$$

Deformasiyalar yerlədəyişmələrlə belə ifadə olunurlar:

$$\begin{aligned}
e_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad e_\theta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right); \quad e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
e_{r\theta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}; \quad e_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \\
e_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}
\end{aligned} \tag{7.5.2}$$

Elektrik sahəsinin gərginlik vektoru \bar{E} -nin komponentləri isə elektrostatik φ potensialı ilə

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{7.5.3}$$

kimi ifadə olunurlar.

(7.5.1) – (7.5.3) sisteminin qapanması üçün onlara aşağıdakı hal tənliklərini də qoşmaq zəruridir:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= C_{11}^E e_r + C_{13}^E (e_\theta + e_z) - \pi_{53} E_r \\
\sigma_{\theta\theta} &= C_{13}^E e_r + C_{11}^E e_\theta + C_{12}^E e_z - \pi_{13} E_r \\
\sigma_{zz} &= C_{13}^E e_r + C_{12}^E e_\theta + C_{11}^E e_z - \pi_{13} E_r \\
\sigma_{\theta z} &= (C_{11}^E - C_{12}^E) e_{\theta z}; \quad \sigma_{r\theta} = 2C_{55}^E e_{r\theta} - \pi_{15} E_\theta \\
\sigma_{rz} &= 2C_{55}^E e_{rz} - \pi_{15} E_z
\end{aligned} \tag{7.5.4}$$

$$D_r = \pi_{33}e_r + \pi_{13}(e_\theta + e_z) + \varepsilon_{33}^e \varepsilon_0 E_r$$

$$D_\theta = 2\pi_{15}e_{r\theta} + \varepsilon_{11}^e \varepsilon_0 E_\theta$$

$$D_z = 2\pi_{15}e_{rz} + \varepsilon_{11}^e E_z$$

Burada C_{ij}^E - elastiklik modulları, π_{ij} - pyezomodullar, ε_{jj}^e - nisbi dielektrik nüfuzluluqlarıdır (bundan sonra yuxarı indekslər yazılmır). Silindrin elektrodlaşdırılmış səthlərində

$$\begin{aligned} \sigma_r(r_0 \pm h, z, t) = 0 & \quad \sigma_{r\theta}(r_0 \pm h, z, t) = 0 \\ \sigma_{rz}(r_0 \pm h, z, t) = 0 & \quad \varphi(r_0 \pm h, z, t) = 0 \end{aligned} \quad (7.5.5)$$

şərtlərinin ödənilməsini tələb edəcəyik.

(7.5.1) – (7.5.5) məsələsinin həllini qaçan dalğalar şəklində axtaracağıq:

$$\begin{aligned} u_r &= h\tilde{R}_1(r) \cos m\theta \cdot e^{i(kz - \omega t)} \\ u_\theta &= h\tilde{R}_2(r) \sin m\theta \cdot e^{i(kz - \omega t)} \\ u_z &= h\tilde{R}_3(r) \cos m\theta \cdot e^{i(kz - \omega t)} \end{aligned} \quad (7.5.6)$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{C_a}{\varepsilon_0}} h\tilde{R}_0(r) \cos m\theta \cdot e^{i(kz - \omega t)}$$

(7.5.6)-nı (7.5.2), (7.5.3) və nəhayət (7.5.4)-də yazmaqla məsələnin həllini aşağıdakı dörd ikinci tərtib adi diferensial tənliklər sisteminin müvafiq sərhəd şərtlərini ödəyən həllinin tapılmasına gətirilir.

$$\begin{aligned} a_1 \left(R_1'' + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x} R_1' \right) - \left\{ a_2 \left[\zeta^2 + \frac{m^2 \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon x)^2} \right] + \frac{\varepsilon^2 a_3}{(1 + \varepsilon x)^2} - \Omega^2 \right\} R_1 + \\ + a_4 \frac{m\varepsilon}{1 + \varepsilon x} R_2' - a_5 \frac{m\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon x)^2} R_2 - \zeta \left(a_6 R_3 + \frac{\varepsilon a_7}{1 + \varepsilon x} R_3 \right) + \\ + a_8 R_0'' + \frac{\varepsilon a_9}{1 + \varepsilon x} R_0' - a_{10} \left[\frac{m^2 \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon x)^2} + \zeta^2 \right] R_0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_1 \left[R_2'' + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon X} R_2' - \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon X)^2} R_2 \right] - \left[b_2 \frac{\varepsilon^2 m^2}{(1+\varepsilon X)^2} + \zeta^2 b_3 - \Omega^2 \right] R_2 - \\
& - \frac{m\varepsilon}{1+\varepsilon X} \left(b_4 R_1' + \frac{\varepsilon b_5}{1+\varepsilon X} R_1 \right) - b_6 \frac{\varepsilon \zeta m}{1+\varepsilon X} R_3 - \\
& - \frac{\varepsilon m}{1+\varepsilon X} \left(b_7 R_0' + \frac{\varepsilon b_8}{1+\varepsilon X} R_0 \right) = 0
\end{aligned} \tag{7.5.7}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \left(R_3'' + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon X} R_3' \right) - \left[c_2 \frac{m^2 \varepsilon^2}{(1+\varepsilon X)^2} + c_3 \zeta^2 - \Omega^2 \right] R_3 + \\
& - \zeta \left(c_4 R_1' + \frac{\varepsilon c_5}{1+\varepsilon X} R_1 \right) + c_6 \frac{\varepsilon \zeta m}{1+\varepsilon X} R_2 + \zeta \left(c_7 R_0' + \frac{\varepsilon c_6}{1+\varepsilon X} R_0 \right) = 0 \\
& d_1 \left(R_0'' + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon X} R_0' \right) - d_2 \left[\frac{\varepsilon^2 m^2}{(1+\varepsilon X)^2} + \zeta^2 \right] R_0 + d_4 \frac{\varepsilon m}{1+\varepsilon X} R_2' - \\
& - d_5 \frac{m\varepsilon^2}{(1+\varepsilon X)^2} R_2 - \zeta \left(d_6 R_3' - \frac{\varepsilon d_7}{1+\varepsilon X} R_3 \right) + d_8 R_1'' + \\
& + \frac{\varepsilon d_9}{1+\varepsilon X} R_1' - d_{10} \left[\frac{m^2 \varepsilon^2}{(1+\varepsilon X)^2} + \zeta^2 \right] R_1 = 0
\end{aligned}$$

$x=\pm 1$ olduqda sərhəd şərtləri aşağıdakı şəkllə düşürlər:

$$\begin{aligned}
& \mu_{33} R_1' + \mu_{13} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon X} R_1 + \mu_{13} \frac{m\varepsilon}{1+\varepsilon X} R_2 + \zeta \mu_{12} R_3 + \varkappa_{33} R_0' = 0 \\
& \mu_{55} (\zeta R_1 + R_3') + \zeta \varkappa_{33} R_0 = \\
& - \mu_{55} \frac{m\varepsilon}{1+\varepsilon X} R_1 + \mu_{55} \left(R_2' - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon X} R_2 \right) - \varkappa_{15} \frac{m\varepsilon}{1+\varepsilon X} R_3 = 0 \\
& \varphi = 0
\end{aligned} \tag{7.5.8}$$

(7.5.7) və (7.5.8) bərabərliklərində aşağıdakı işarələr qəbul olunmuşdur:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{h}; \quad \varepsilon = \frac{h}{r_0}; \quad \zeta = kh; \quad \Omega = \omega h \sqrt{\rho c_0^{-1}}; \quad \mu_{ij} = \lambda^{-1} c_{ij} \\
\mathfrak{a}_{ij} &= \pi_{ij} (c_a \varepsilon)^{-0.5}; \quad \tilde{\mathbf{R}}_j(\mathbf{r}) = \mathbf{R}_j(\mathbf{x}); \quad \mathbf{a}_1 = \mu_{33}; \quad \mathbf{a}_2 = \mu_{55} \\
\mathbf{a}_3 &= \mu_{11}; \quad \mathbf{a}_4 = \mu_{13} + \mu_{55}; \quad \mathbf{a}_5 = \mu_{11} + \mu_{55}; \quad \mathbf{a}_6 = \mu_{13} + \mu_{15} = \mathbf{a}_4 \\
\mathbf{a}_7 &= \mu_{13} - \mu_{12}; \quad \mathbf{a}_8 = \mathfrak{a}_{33}; \quad \mathbf{a}_9 = \mathfrak{a}_{33} - \mathfrak{a}_{13}; \quad \mathbf{a}_{10} = \mathfrak{a}_{15}; \quad \mathbf{b}_1 = \mu_{55} \\
\mathbf{b}_2 &= \mu_{11}; \quad \mathbf{b}_3 = \frac{1}{2}(\mu_{11} - \mu_{12}); \quad \mathbf{b}_4 = \mu_{13} + \mu_{55}; \quad \mathbf{b}_5 = \mu_{11} + \mu_{55} \\
\mathbf{b}_6 &= \frac{1}{2}(\mu_{11} + \mu_{12}); \quad \mathbf{b}_7 = \mathfrak{a}_{13} + \mathfrak{a}_{15}; \quad \mathbf{b}_8 = \mathfrak{a}_{15}; \quad \mathbf{c}_1 = \mu_{55} \\
\mathbf{c}_2 &= \frac{1}{2}(\mu_{11} - \mu_{12}); \quad \mathbf{c}_3 = \mu_{11}; \quad \mathbf{c}_4 = \mu_{13} + \mu_{55}; \quad \mathbf{c}_5 = \mu_{12} + \mu_{55} \\
\mathbf{c}_6 &= \frac{1}{2}(\mu_{11} + \mu_{12}); \quad \mathbf{c}_7 = \mathfrak{a}_{13} + \mathfrak{a}_{15}; \quad \mathbf{c}_8 = \mathfrak{a}_{15} \tag{7.5.9} \\
\mathbf{d}_1 &= -\varepsilon_{33}; \quad \mathbf{d}_2 = -\varepsilon_{11}; \quad \mathbf{d}_4 = \mathfrak{a}_{13} + \mathfrak{a}_{15}; \quad \mathbf{d}_5 = \mathfrak{a}_{15}; \quad \mathbf{d}_6 = \mathfrak{a}_{13} + \mathfrak{a}_{15} \\
\mathbf{d}_7 &= \mathfrak{a}_{13}; \quad \mathbf{d}_8 = \mathfrak{a}_{33}; \quad \mathbf{d}_{10} = \mathfrak{a}_{15}; \quad \mathbf{d}_9 = \mathfrak{a}_{13} + \mathfrak{a}_{33}
\end{aligned}$$

c_a -nın ölçüsü elastiklik sabitlərinin ölçüləri ilə eynidir, ε_0 – vakuunun dielektrik nüfuzluğudur.

(7.5.7), (7.5.8) birinci sərhəd məsələsinin həllini aşağıdakı qüvvət sıraları şəklində axtaracağıq:

$$\{\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n, B_n, C_n, D_n\} \mathbf{x}^n \tag{7.5.10}$$

(7.5.10)-u (7.5.7)-yə daxil etsək və \mathbf{x} -in eyni dərəcəli qiymətlərinin əmsallarını bərabərləşdirsək indeksləri ikidən kiçik olmayan əmsalları indeksləri ikidən kiçik olan əmsallarla ifadə etməyə imkan verən aşağıdakı rekurrent münasibətləri alarıq.

$$\begin{aligned}
& (n+2)(n+1)a_1B_{n+2} + (n+2)(n+1)a_8A_{n+2} = \\
& = -(2n+1)(n+1)\varepsilon a_1B_{n+1} - (n^2\varepsilon^2a_1 - m^2\varepsilon^2a_2 - \varepsilon^2a_3 + \Omega^2)B_n - \\
& - (\Omega^2 - \zeta^2a_2)\varepsilon(2B_{n-1} + \varepsilon B_{n-2}) - (n+1)m\varepsilon a_4C_{n+1} - \\
& - m(na_4 - a_5)\varepsilon^2C_n + (n+1)\zeta a_6D_{n+1} + \varepsilon\zeta[2na_6 + a_7]D_n + \\
& + \zeta\varepsilon^2[(n-1)a_6 + a_7]D_{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (n+2)(n+1)b_1C_{n+2} = -(2n+1)(n+1)\varepsilon_1b_1C_{n+1} - \\
& - [(n^2-1)\varepsilon^2b_1 - \varepsilon m^2b_2 - \zeta^2b_3 + \Omega^2]\varepsilon^2C_n - \\
& - (\Omega^2 - \zeta^2b_3)\varepsilon(2C_{n-1} + \varepsilon C_{n-2}) + (n+1)m\varepsilon b_4B_{n+1} + \\
& + m(nb_4 + b_5)\varepsilon^2B_n - m\varepsilon\zeta b_6[D_n + \varepsilon D_{n-1}] + (n+1)m\varepsilon b_7A_{n+1} + \\
& + m(nb_7 + b_8)\varepsilon^2A_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (n+2)(n+1)c_1D_{n+2} = -(2n+1)(n+1)\varepsilon c_1D_{n+1} - \\
& - [(n^2c_1 - m^2c_2)\varepsilon^2 - \zeta^2c_3 + \Omega^2]D_n - (\Omega^2 - \zeta^2c_3)\varepsilon(2D_{n-1} + \varepsilon D_{n-2}) - \\
& - (n+1)\zeta c_4B_{n+1} - \varepsilon\zeta[2nc_4 + c_5]B_n - \varepsilon^2\zeta[(n-1)c_4 + c_5]B_{n-1} - \\
& - m\varepsilon\zeta c_6(C_n + \varepsilon C_{n-1}) - (n+1)\zeta c_7A_{n+1} - \varepsilon\zeta[2nc_7 + c_8]A_n - \\
& - \varepsilon^2\zeta[(n-1)c_7 + c_8]A_{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (n+2)(n+1)d_1A_{n+2} + (n+2)(n+1)d_8B_{n-2} = \\
& = -(2n+1)(n+1)\varepsilon d_1A_{n+1} - [(n^2d_1 - m^2d_2)\varepsilon^2 - \zeta^2d_2]A_n + \\
& + \varepsilon\zeta^2d_2(2A_{n-1} + \varepsilon A_{n-2}) - (n+1)m\varepsilon d_4C_{n+1} - \\
& - m(nd_4 - d_5)\varepsilon^2C_n + (n+1)\zeta d_6D_{n+1} + \varepsilon\zeta(2nd_6 + d_7)D_n + \\
& + \varepsilon^2\zeta[(n-1)d_6 + d_7]D_{n-1} - (n+1)\varepsilon(2nd_8 + d_9)B_{n+1} - \\
& - \{n\varepsilon^2[(n-1)d_8 + d_9] - (m^2\varepsilon^2 - \zeta^2)d_{10}\}B_n + \\
& + \varepsilon\zeta^2d_{10}(2B_{n-1} + \varepsilon B_{n-2}) \tag{7.5.11}
\end{aligned}$$

Mənfi indeksli əmsallar sırada iştirak etmədiklərinə görə onlar eyniyyətlə sıfıra bərabər hesab olunurlar. İndeksləri ikidən kiçik olan əmsallar üzərində qalan ixtiyarilik (7.5.8) sərhəd şərtlərinin ödənilməsinə imkan verir. (7.5.10)-nu sərhəd şərtlərində yazsaq onlar aşağıdakı şəkllə düşərlər:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(2n+1)\mu_{33}B_{2n+1} + (2n\mu_{33} + \mu_{13})\varepsilon B_{2n} + m\varepsilon\mu_{13}C_{2n} - \zeta\mu_{13}(D_{2n} + \varepsilon D_{2n-1}) + (2n+1)\varkappa_{33}A_{2n+1} + 2n\varepsilon\mu_{33}A_n] = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(2n+2)\mu_{33}B_{2n+2} + (2n\mu_{33} + \mu_{23} + \mu_{13})\varepsilon B_{2n+1} + \mu_{13}\varepsilon m C_{2n+1} - \zeta\mu_{13}(D_{2n+1} + \varepsilon D_{2n}) + (2n+2)\varkappa_{33}A_{2n+2} + (2n+1)\varepsilon\mu_{33}A_{2n+1}] = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{ \mu_{55}[\zeta B_{2n} + (2n+1)D_{2n+1}] + \zeta\varkappa_{15}A_{2n} \} = 0 \tag{7.5.12}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{ \mu_{55}[\zeta B_{2n+1} + (2n+2)D_{2n+2}] + \zeta\varkappa_{15}A_{2n+1} \} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(2n+1)\mu_{55}C_{2n+1} + (2n-1)\varepsilon\mu_{55}C_{2n} - m\varepsilon(\mu_{55}B_{2n} + \varkappa_{15}A_{2n})] = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(2n+2)\mu_{55}C_{2n+2} + 2n\varepsilon\mu_{55}C_{2n+1} - m\varepsilon(\mu_{55}B_{2n+1} + \varkappa_{15}A_{2n+1})] = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} = 0 \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} = 0$$

(7.5.11) münasibətləri vasitəsi ilə indeksi ikidən kiçik olmayan sabitləri indeksi ikidən kiçik olan sabitlərlə ifadə edib (7.5.12)-də yazsaq səkkiz tənlikdən ibarət xətti bircins cəbri tənliklər sistemi alarıq:

$$\sum_{q=1}^8 m_{pq} [\mu_{ij}; \varepsilon_{ij}; \varepsilon; \zeta; m; \Omega] x_q = 0 \quad (p = \overline{1,8}) \quad (7.5.13)$$

Belə ki,

$$(x_1 \dots x_8) = (A_0, A_1, B_0, B_1, C_0, C_1, D_0, D_1)$$

(7.5.13) sisteminin sıfırdan fərqli həllinin mövcud olması üçün onun determinantı sıfıra bərabər omlalıdır. Bu şərtdən məxsusi rəqslər üçün aşağıdakı tezlik tənliyini alırıq:

$$\det \{ m_{pq} [\mu_{ij}; \varepsilon_{ij}; \varepsilon; \zeta; m; \Omega] x_q \} = 0 \quad (7.5.14)$$

Dalğa ədədi ζ bu tənlikdən Ω -dan asılı tapılır.

(7.5.14)-dən məxsusi tezlikləri və onlara uyğun məxsusi funksiyaları məlum standart metodlarla və ya ədədi üsullarla tapıb lazımı təhlilləri yerinə yetirmək olar.

§7.6. Qalın divarlı pyezokeramik kürə şəkilli rezonatorun rəqsləri [92]

Pyezokeramik rezonatorların rəqslərinin təhlili məsələsi hərəkət tənlikləri ilə Maksvell tənliklərinin, elastiki və elektrik sahə tenzorları üçün verilmiş sərhəd şərtlərini ödəyən birgə həllinin tapılması məsələsinə gətirilir. Sferik r, θ, φ koordinat sistemində radial rəqslər üçün ($u_\theta = u_\varphi = 0$) hərəkət tənliyi belədir

$$\rho \ddot{u}_r = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} \quad (7.6.1)$$

Burada u_r yerdəyişmənin radial komponenti, σ_{ij} gərginlik tenzorunun komponentləridir.

Elektrostatika halı üçün Maksvell tənlikləri

$$\operatorname{div} \bar{D} = 0 \quad \text{və} \quad \operatorname{rot} \bar{E} = 0$$

aşağıdakı şəkllə düşürlər

$$U = \int E_r dr = \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) = 0 \quad (7.6.2)$$

Sonuncu bərabərlikdən birbaşa alınır ki,

$$D_r = \frac{1}{r^2} D_0 \quad D_0 = \text{const} \quad (7.6.3)$$

Radiusa nəzərən eninə izotropiyaya malik olan pyezokeramika üçün elektromexaniki hal tənliklərini belə yazsa bilərik:

$$\sigma_{rr} = C_{33}^D S_{rr} + C_{13}^D S_{\theta\theta} + C_{13}^D S_{\varphi\varphi} - h_{33} D_r \quad (7.6.4)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = C_{13}^D S_{rr} + C_{12}^D S_{\theta\theta} + C_{11}^D S_{\varphi\varphi} - h_{31} D_r$$

$$E_r = -h_{33} S_{rr} - h_{31} S_{\theta\theta} - h_{31} S_{\varphi\varphi} + \beta_{33}^S D_r \quad (7.6.5)$$

Radial rəqslər zamanı deformasiya tenzornun komponentləri yerdəyişmələrlə aşağıdakı kimi ifadə olunurlar:

$$S_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad S_{\theta\theta} = S_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} \quad (7.6.6)$$

Hesab etsək ki, polyarlaşma bütün həcmdə doymuş hala çatmışdır, onda C^D və h -in radiusdan asılı olmadığını qəbul etmək olar. (7.6.2) – (7.6.6) ifadələrini (7.6.1) tənliyində yazsaq harmonik rəqslər üçün aşağıdakı tənliyi alırıq:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \left[\frac{\omega^2 \rho}{C_{33}^D} - 2 \frac{C_{11}^D + C_{12}^D - C_{13}^D}{C_{33}^D} \right] \frac{u}{r^2} = - \frac{2h_{13}}{C_{33}^D} \frac{D_0}{r^3} \quad (7.6.7)$$

Bu tənliyə kürənin daxili və xarici səthlərində verilmiş $\sigma_{rr}=0$ ($r = r_1, r_2$) sərhəd şərtlərini də əlavə etsək aşağıdakı qeyri-bircins sərhəd məsələsinə gələrik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + (k^2 r^2 - \alpha^2) \frac{u}{r^2} = - \frac{2h_{13}}{C_{33}^D} \frac{D_0}{r^3} \quad (7.6.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2C_{13}^D}{C_{33}^D} \frac{u}{r} = \frac{h_{33}}{C_{33}^D} \frac{D_0}{r^3} \quad r = r_1, r_2 \quad (7.6.8')$$

$$\text{Burada } k = \frac{\omega}{c} = \omega \left(\frac{\rho}{C_{33}^D} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \alpha^2 = 2 \frac{C_{11}^D + C_{12}^D - C_{13}^D}{C_{33}^D}.$$

c – səs sürətidir.

Rezonatorun məxsusi rəqslərinin tezliklərini tapmaq üçün (7.6.8) (7.6.8') qeyri-bircins sərhəd məsələsinə uyğun bircins

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + (k^2 r^2 - \alpha^2) \frac{u}{r^2} = 0 \quad (7.6.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2C_{13}^D}{C_{33}^D} \frac{u}{r} = 0 \quad (7.6.9a)$$

sərhəd məsələsini həll etmək lazımdır.

(7.6.9)-un birinci tənliyi Bessel tənliyindən ancaq ikinci həddin qarşısındakı 2 vuruğu ilə fərqlənir. Ona görə də onun ümumi həllini belə yazı bilərik.

$$u = \frac{1}{\sqrt{kr}} (C_1 J_\nu(kr) + C_2 N_\nu(kr)) \quad (7.6.10)$$

Burada $\nu = \sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{4}}$. C_1 və C_2 inteqral sabitləridir.

Mexaniki rezonans tezliklərində ($u \rightarrow \infty$) C_1 və C_2 sonsuzluğa çevrilirlər. Ona görə də yerdəyişmələrin bu rezonans tezliyində paylanma qanununu tapmaq üçün u yerdəyişməsini xarici səth u_2 yerdəyişməsinə nəzərən normallaşdırmaq məqsəddəyigündür. Onda yerdəyişmələrin paylanma qanununu aşağıdakı münasibətdən tapmaq olar

$$\frac{u}{u_2} = \left(\frac{r_2}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{J_\nu(kr) + \frac{C_2}{C_1} N_\nu(kr)}{J_\nu(kr_2) + \frac{C_2}{C_1} N_\nu(kr_2)} \quad (7.6.11)$$

Belə ki, burada rezonans tezliklərində C_1 və C_2 eyni tərtibdən sonsuz böyüyən olduqlarından $\frac{C_2}{C_1}$ nisbəti sonludur.

Tezlik tənliyini almaq üçün (7.6.10) həllini (7.6.9a) sərhəd şərtində yazmaq:

$$\frac{u}{r} = \frac{1}{r\sqrt{kr}} (C_1 J_\nu(kr) + C_2 N_\nu(kr)) \quad (7.6.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{1}{2r\sqrt{kr}} [C_1 J_\nu(kr) + C_2 N_\nu(kr)] + \\ &+ \frac{k}{\sqrt{kr}} \left[C_1 \left(J_{\nu-1}(kr) - \frac{\nu}{kr} J_\nu(kr) \right) + C_2 \left(N_{\nu-1}(kr) - \frac{\nu}{kr} N_\nu(kr) \right) \right] = \\ &= C_1 \left[\frac{k}{\sqrt{kr}} J_{\nu-1}(kr) - \frac{1+2\nu}{2r\sqrt{kr}} J_\nu(kr) \right] + \\ &+ C_2 \left[\frac{k}{\sqrt{kr}} N_{\nu-1}(kr) - \frac{1+2\nu}{2r\sqrt{kr}} N_\nu(kr) \right] \end{aligned} \quad (7.6.13)$$

(7.6.12) və (7.6.13)-ü (7.6.10)-da yazmaq:

$$\begin{aligned} &C_1 [kr_1 J_{\nu-1}(kr_1) - \gamma J_\nu(kr_1)] + \\ &+ C_2 [kr_1 N_{\nu-1}(kr_1) - \gamma N_\nu(kr_1)] = 0 \\ &C_1 [kr_2 J_{\nu-1}(kr_2) - \gamma J_\nu(kr_2)] + \\ &+ C_2 [kr_2 N_{\nu-1}(kr_2) - \gamma N_\nu(kr_2)] = 0 \end{aligned} \quad (7.6.14)$$

(7.6.14)-ün sıfırdan fərqli həlli olması üçün $kr_2=x$ desək aşağıdakı bərabərlik doğru olmalıdır:

$$\frac{xJ_{v-1}(x) - \gamma J_v(x)}{xN_{v-1}(kr_1) - \gamma N_v(kr_1)} = \frac{\left(\frac{r_1}{r_2} x\right) J_{v-1}\left(\frac{r_1}{r_2} x\right) - \gamma J_v\left(\frac{r_1}{r_2} x\right)}{\left(\frac{r_1}{r_2} x\right) N_{v-1}\left(\frac{r_1}{r_2} x\right) - \gamma N_v\left(\frac{r_1}{r_2} x\right)} \quad (7.6.15)$$

(7.6.13) – (7.6.15) ifadəsində

$$\gamma = v + 0,5 - 2 \frac{C_{13}^D}{C_{33}^D}$$

işarə olunub. (7.6.15) tənliyinin x_n köklərini tapdıqdan sonra (əvvəl EHM-də ədədi üsulla) mexaniki rezonansın tezliklərini

$$f_n = \frac{x_n}{2\pi r_2} \left(\frac{C_{33}^D}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.6.16)$$

münasibətindən təyin etmək olar.

$n=0$ tərtibi rezonans yerdəyişmələrinin dairəvi (çevrə boyunca) paylanmalarına uyğundur. $n \geq 1$ olduqdakı tezlikləri isə qalınlıq istiqamətindəki rəqsi yerdəyişmələrə uyğundur. Rezonatorun elektrik xarakteristikalarını tapmaq üçün (7.6.9), (7.6.10) qeyri-bircins sərhəd məsələsini həll etmək lazımdır.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$$\bar{u} = -\frac{\pi h_{13} D_0 k}{C_{33}^D \sqrt{kr}} \times \quad (7.6.17)$$

$$\times \left[N_v(kr) \int \sqrt{kr} J_v(kr) k dr - J_v(kr) \int \sqrt{kr} N_v(kr) k dr \right]$$

(7.6.9) tənliyinin xüsusi həllidir. Onda (7.6.9)-un ümumi həllini belə yazı bilərik:

$$u = \frac{1}{\sqrt{kr}} [C_1 J_v(kr) + C_2 N_v(kr)] - \quad (7.6.18)$$

$$- \frac{\pi h_{13} D_0 k}{C_{33}^D \sqrt{kr}} \left[N_v(kr) \int \sqrt{kr} J_v(kr) k dr - J_v(kr) \int \sqrt{kr} N_v(kr) k dr \right]$$

Nəzərə alsaq ki, rezonatorun keçən elektrik cərəyanı

$$I = j\omega Q = j\omega \int D_s ds = j\omega 4\pi D_0 \quad (7.6.19)$$

düsturu ilə tapılır, onda rezonatorun elektrik impedansı üçün aşağıdakı ifadəni alarıq

$$z = \frac{1}{j\omega C_0} \left[1 - \frac{h_{33}(u_2 - u_1)}{\beta_{33}^S(r_2 - r_1)D_0} - \frac{2h_{31}r_1r_2}{\beta_{33}^S(r_2 - r_1)D_0} \int \frac{u}{r} dr \right] \quad (7.6.20)$$

haradakı $C_0 = \frac{4\pi r_1 r_2}{\beta_3^S(r_2 - r_1)}$ «sıxılmış» nümunənin tutumudur.

(7.6.16) və (7.6.20) ifadələrinin (7.6.8') bərabərliyi ilə birgə təhlili zamanı görmək olar ki, elektrik rezonansı şərti ($z=\infty$) u_2 və u_1 yerdəyişmələrinin sonsuzluğa çevrilmələrinə uyğundur, yəni mexaniki rezonans şərti ilə üst-üstə düşür. Beləliklə, tapdığımız tezlik tənliyi həm də antirezonans tezliyini tapmaq imkanı verir.

Nazik divarlı kürələr üçün (yəni sferik örtüklər üçün) elektrik müqavimətinin ifadəsini bir qədər sadələşdirmək olar. Belə sadələşdirmə uyğun olaraq aşağıdakı ifadələrə gətirir.

$$z = \frac{1}{j\omega C_p} \left[1 - K_p^2 \frac{f_{a_v}^2}{f_{a_v}^2 - f^2} \right] \quad (7.6.21)$$

$$z = \frac{1}{j\omega C_p} \left[1 - K_\tau^2 \frac{\operatorname{tg} \frac{kd}{2}}{\frac{kd}{2}} \right] \quad (7.6.22)$$

Burada C_p və C_τ effektiv dielektrik nüfuzluluqlarına uyğun tutumlardır, $\varepsilon_p = \varepsilon_{33}^T(1 - K_p^2)$ və $\varepsilon_\tau = \varepsilon_{33}^T(1 - K_\tau^2)$, f_{a_v} - sıfır tərtibli modanın antirezonans tezliyidir və (7.6.16) və yaxud

$$f_{a_v} = \frac{1}{2\pi r} \left[\frac{2}{\rho s_{11}^D(1 - \sigma_D)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

ifadəsindən tapılır, d – örtüyün divarının qalınlığıdır, $K_p^2 = K_{31} \left(\frac{2}{1-\sigma} \right)$, $K_\tau^2 = h_{33} \left(C_{33}^D \beta_{33}^S \right)^{\frac{1}{2}}$ - elektromexaniki əlaqə əmsallarıdır.

(7.6.21), (7.6.22) ifadələrindən $z=0$ şərti ilə elektromexaniki əlaqə əmsalları üçün aşağıdakı düsturları almaq olar

$$K_p^2 = \frac{f_{a_0}^2 - f_{p_0}^2}{f_{a_0}^2}; \quad K_\tau^2 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{f_{a_1} - f_{p_1}}{f_{a_1}} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \frac{f_{a_1} - f_{p_1}}{f_{a_1}} \right)$$

belə ki, f_p – elektrik rezonansının tezliyidir.

Qeyd etmək lazımdır ki, qalın divarlı kürə üçün alınmış münasibətlər əksər hallarda hələqənin radial rəqsləri üçün [95] tapılmış münasibətlərə analogidirlər. Belə oxşarlıq formallıq deyil, qalınlıq rezonansları arasında ümumi qanunauyğunluğun olmasını göstərir.

§7.7. Qalın divarlı pyezokeramik kürənin radial elektroelastik rəqsləri [93]

Radial polyarlaşmış pyezokeramik kürənin radial rəqsləri zamanı sıfırdan fərqli $u_r(r, t)$ yerdəyişməsi, elektrik sahəsinin potensialı $\varphi(r, t)$ və gərginlik tenzorunun komponentləri σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, $=\sigma_{\varphi\varphi}$, habelə elektrik induksiya aşağıdakı diferensial tənlikləri ödəyirlər.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= \rho \ddot{u}_r \\ \frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{2D_r}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (7.7.1)$$

haradaki gərginlik və elektrik induksiya vektorlarının komponentləri yerdəyişmələr və elektrik sahəsinin potensialı ilə belə ifadə olunurlar

$$\sigma_r = C_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2C_{13} \frac{u_r}{r} + e_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (7.7.2)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = C_{13} \frac{\partial u_r}{\partial r} + (C_{23} + C_{33}) \frac{u_r}{r} + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

$$D_r = e_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2e_{31} \frac{u_r}{r} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (7.7.3)$$

Burada C_{ij} – elastiklik modulları, e_{ij} – pyzeoelastiklik sabitləri, ε_{ij} – dielektrik nüfuzluluğu əmsallarıdır.

Harmonik $f(r, t) = \text{Re} f(r) e^{-i\omega t}$ rəqsləri zamanı adı çəkilən maddi sabitlər kompleks ədədlər ola bilərlər, bu halda onların xəyali komponentləri pyzokeramikada enerji səpgisini (dissipasiyanı) təyin edirlər.

Əvvəlcə (7.7.3) tənliyindən tapırıq [2, 3]

$$D_r = \frac{R^2}{r^2} D_0(t) \sqrt{c_a \varepsilon_0} \quad (7.7.4)$$

Lakin biz burada başqa cür hərəkət edəcəyik. (7.7.2) (7.7.3) sisteminin həllini

$$\begin{aligned} u(r, t) &= \text{Re } v(r) e^{-i\omega t} \\ \varphi(r, t) &= h \sqrt{c_a \varepsilon_0^{-1}} \text{Re } \phi(r) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (7.7.5)$$

şəklində axtaracağıq. (7.7.5)-i (7.7.1)-də yazsaq sistem dəyişənlərinə ayrılır və aşağıdakı adi diferensial tənliklər sisteminə gəlir:

$$\begin{aligned} C_{11} v'' + 2C_{11} \frac{v}{r} + \left[\rho \omega^2 + 2 \frac{C_{13} - C_{23} - C_{33}}{r} \right] u + \sqrt{c_a \varepsilon_0^{-1}} e_{11} \phi'' + \\ + \frac{2(e_{11} - e_{31})}{r} \sqrt{c_a \varepsilon_0^{-1}} \phi' = 0 \end{aligned} \quad (7.7.6)$$

$$e_{11} v'' + 2e_{31} \frac{1}{r} v' + 2(e_{11} + e_{31}) \frac{v}{r^2} - \varepsilon_{11} \sqrt{c_a \varepsilon_0^{-1}} \phi'' - 2\varepsilon_{11} \sqrt{c_a \varepsilon_0^{-1}} \frac{\phi'}{2} = 0$$

$x = \frac{r-R}{h}$ yeni x dəyişənini daxil edib $\varepsilon = \frac{h}{r}$ desək

$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon}{h(1+\varepsilon x)}$ alarıq. Burada r – kürə divarının qalınlığının

yarısı, R – onun ortalıq səthinin radiusudur. Bundan sonra (7.7.6) sistemini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$C_{11}\bar{v}'' + \frac{2C_{11}\varepsilon}{h(1+\varepsilon x)}\bar{v}' + \left[\Omega^2 - \frac{2(C_{33} + C_{23} - C_{13})}{h^2} \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon x)^2} \right] \bar{v} +$$

$$+ e_{11}\sqrt{c_a\varepsilon_0^{-1}}\phi'' + \frac{2(e_{11} - e_{31})\varepsilon}{h(1+\varepsilon x)}\sqrt{c_a\varepsilon_0^{-1}}\phi' = 0 \quad (7.7.7)$$

$$e_{11}\bar{v}'' + \frac{2(e_{11} - e_{31})\varepsilon}{h(1+\varepsilon x)}\bar{v}' + 2e_{31}\frac{\varepsilon^2}{h^2(1+\varepsilon x)^2}\bar{v} -$$

$$- \varepsilon_{11}\sqrt{c_a\varepsilon_0^{-1}}\left[\phi'' - \frac{2\varepsilon}{h(1+\varepsilon x)}\phi' \right] = 0$$

c_a kəmiyyətinin ölçüsü nm^{-2} , ε_0 – vakuumin dielektrik sabitidir

$$\bar{v} = v(x) \quad \bar{\phi} = \phi(x) \quad (7.7.8)$$

(7.7.7) sisteminin hər iki tərəfini $\varepsilon_0 h^2 (1+\varepsilon x)^2$ -na vursaq alarıq:

$$C_{11}\varepsilon_0 h^2 (1+\varepsilon x)^2 \bar{v}'' + 2C_{11}\varepsilon_0 h(1+\varepsilon x)\bar{v}' +$$

$$+ \left[h^2 \varepsilon_0 (1+\varepsilon x)^2 \Omega^2 - 2(C_{33} + C_{23} - C_{13})\varepsilon^2 \right] \bar{v} + \quad (7.7.9)$$

$$+ e_{11}\sqrt{Ca\varepsilon_0^{-1}}h^2(1+\varepsilon x)^2 \bar{\phi}'' + 2(e_{11} + e_{31})h\varepsilon_0(1+\varepsilon x)\sqrt{Ca\varepsilon_0^{-1}}\bar{\phi}' = 0$$

$$e_{11}h^2\varepsilon_0(1+\varepsilon x)^2 \bar{v}'' + 2(e_{11} - e_{31})\varepsilon_0 h(1+\varepsilon x)\bar{v}' +$$

$$+ 2e_{31}\varepsilon_0\varepsilon^2\bar{v}' - \varepsilon_{11}\sqrt{Ca\varepsilon_0^{-1}}\left[h^2(1+\varepsilon x)^2 \bar{\phi}'' - 2\varepsilon h(1+\varepsilon x)\bar{\phi}' \right] = 0$$

İndi $v(x)$ və $\phi(x)$ funksiyalarını $(-1, 1)$ aralığında

$$\upsilon(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \quad \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n \quad (7.7.10)$$

qüvvət sıraları şəklində axtaraq. Onda (7.7.10)-u (7.7.9)-da yazıb x -in eyni üstlü qüvvətlərinin əmsallarını bərabərləşdirsək A_n və B_n sabitləri üçün aşağıdakı rekurent münasibətləri alarıq:

$$\begin{aligned} & (n+2)(n+1)C_{11}A_{n+2} + 2(n+1)^2C_{11}\varepsilon A_{n+1} + \\ & + [\Omega^2 - (n+1)n\varepsilon C_{11} + 2(C_{33} + C_{23} - C_{13})\varepsilon^2]A_n + \quad (7.7.11) \\ & + \Omega^2(2\varepsilon A_{n-1} + \varepsilon^2 A_{n-2}) + (n+2)(n+1)e_{11}A_{n+2} + 2(n+1) \times \\ & \times (ne_{11} + e_{11} - e_{31})\varepsilon B_{n+1} + n(ne_{11} + e_{11} - 2e_{31})\varepsilon^2 B_n = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (n+2)(n+1)e_{11}A_{n+2} + 2(n+1)(ne_{11} + e_{11} + e_{31})\varepsilon A_{n+1} + \\ & + (n+1)(ne_{11} + 2e_{31})\varepsilon^2 A_n - (n+2)(n+1)\varepsilon_{11}B_{n+2} - \\ & - 2(n+1)^2\varepsilon_{11}B_{n+1} - n(n+1)\varepsilon_{11}\varepsilon^2 B_n = 0 \end{aligned}$$

(7.7.10) sıralarında x -in mənfi üstlü qüvvətləri və deməli onların mənfi indeksli əmsalları iştirak etmirlər. Ona görə də $A_{-1} = A_{-2} = B_{-1} = B_{-2} \equiv 0$ götürülür. (7.7.1) münasibətlərindən A və B əmsallarından indeksi 2-də böyük olanları indeksi 2-dən kiçik olan əmsallarla ifadə etmək olar. Onda A_0, A_1, B_0, B_1 əmsallarını sərbəhd şərtlərindən tapmaq lazım gəlir. (7.7.5) ifadələrini və (7.7.10) sıralarını σ_r və D_r -in ifadələrinə daxil etmək onları aşağıdakı şəkllə salır

$$\sigma_r = \frac{Ca}{1 + \varepsilon x} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)C_{11}A_{n+1} + (nC_{11} + 2C_{13})\varepsilon A_n + \quad (7.7.12)$$

$$+ (n+1)e_{11}B_{n+1} + ne_{11}\varepsilon B_n] x^n e^{-i\omega t}$$

$$D_r = \frac{\sqrt{Ca\varepsilon_0}}{1 + \varepsilon x} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)e_{11}A_{n+1} + (ne_{11} + 2C_{13})\varepsilon A_n -$$

$$- (n+1)e_{11}B_{n+1} + ne_{11}\varepsilon B_n] x^n e^{-i\omega t}$$

$r=R_0\pm h$ sferik səthləri elektrodlaşdırılmış olduqda (7.7.1)-in dəqiq həllinə uyğun tezlik tənliyinin ədədi təhlili çətin olur [91,92]. Elektrodlaşdırılmış $r = R_0 \pm h$ səthlərində

$$\sigma_r(R_0 \pm h, t) = 0 \quad (7.7.13)$$

və bu səthlərə

$$\varphi(R_0 \pm h, t) = \pm \varphi_0 \cos \omega t \quad (7.7.14)$$

qanunu ilə potensiallar fərqi verilir.

Biz bu şərtləri onlarla ekvivalent olan aşağıdakı şərtlərlə əvəz edə bilərik.

$$\frac{1}{2} [\sigma_r(+1, t) \pm \sigma_r(-1, t)] = 0 \quad (7.7.15)$$

$$\frac{1}{2} [\varphi(+1, t) \pm \varphi(-1, t)] = \frac{1}{2} (\varphi_0 \mp \varphi_0) \cos \omega t$$

(7.7.4), (7.7.10) ayrılışları və (7.7.12)-yə əsasən bu şərtlər aşağıdakı göstərəcəyimiz cəbri cəmlərin sıfırlığına gətirilir,

belə ki, cəmləmə zamanı əmələ gələn $C_a \left(\frac{1}{1+\varepsilon} \pm \frac{(-1)^n}{1+\varepsilon} \right)$ vuru-

ğu eyniyyətlə sıfıra bərabər olmadığından, n -in həm cüt və həm də tək qiymətlərində aşağıdakı cəbri cəmlər sıfıra bərabər olmalıdır.

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(2n+1)C_{11}A_{2n+1} + (2nC_{11} + 2C_{13})\varepsilon A_{2n} + (2n+1)e_{11}B_{2n+1} + 2ne_{11}\varepsilon B_{2n}] = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(2n+2)C_{11}A_{2n+2} + (2nC_{12} + C_{11} + 2C_{13})\varepsilon A_{2n+1} + (2n+2)C_{11}B_{2n+2} + (2n+1)e_{11}\varepsilon B_{2n+1}] = 0 \quad (7.7.16)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} = h^{-1} \sqrt{C_a^{-1} \varepsilon_0} \varphi_0$$

(7.7.1) münasibətlərindən indeksi 2-dən böyük olan əmsalları indeksi 2-dən kiçik olan indekslərlə ifadə edib (7.7.16)-ya daxil etsək dörd xətti cəbri tənliyin sistemini alırıq:

$$\begin{aligned} m_{11}A_0 + m_{15}A_1 + m_{18}B_1 &= 0 \\ m_{41}A_0 + m_{45}A_1 + m_{48}B_1 &= 0 \\ m_{81}A_0 + m_{85}A_1 + m_{88}B_1 &= h^{-1}\sqrt{\varepsilon_0 C_a^{-1}}\varphi_0 \\ m_{51}A_0 + m_{55}A_1 + m_{58} + B_0 &= 0 \end{aligned} \quad (7.7.17)$$

Buradakı $m_{\alpha\beta}$ sabitləri ($\alpha=1,4,8$; $\beta=1,5,8$) (7.7.11) münasibətlərindən yuxarı indeksli sabitləri aşağı indeksli sabitlərlə ifadə etdikdə öz-özünə formalaşırlar. $\varphi_0=0$ götürüb birinci üç tənliyin sıfırdan fərqli həllinin mövcudluğu şərtindən (sistemin determinantının sıfıra bərabər olması şərtindən) məxsusi rəqslər üçün aşağıdakı tezlik tənliyini alırıq:

$$\det\{m_{\alpha\beta}(c_{ik}, e_{ik}, \varepsilon_{ii}, \varepsilon, \omega^2)\} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{15} & m_{18} \\ m_{41} & m_{45} & m_{48} \\ m_{81} & m_{85} & m_{88} \end{vmatrix} = 0 \quad (7.7.18)$$

(7.7.18) tənliyini həll edib məxsusi rəqsin rezonans tezliyi ω_r -i tapır, sonra isə ona uyğun rəqs formasını isə (7.7.17) tənliyini həll etməklə tapırıq. Enerji çeviricisinin effektivliyini qiymətləndirmək üçün K_d – elektromexaniki əlaqə əmsalına əsasən Mezonun aşağıdakı düsturundan

$$K_d^2 \frac{\bar{\omega}_2^2 - \omega_2^2}{\bar{\omega}_2^2} \quad \omega_r = \omega_a \sqrt{1 - K_a^2} \quad (7.7.19)$$

antirezonans tezliyini tapırıq. Antirezonans tezliyinin təyin olunduğu, keçiriciliyin sıfıra bərabər olması şərti

$$4\pi i \omega (R \pm h)^2 D(R \pm h) e^{-i\omega t} = 0 \quad (7.7.20)$$

bərabərliyinin ödənilməsini tələb edir. Buradan isə görünür ki, antirezonans tezliyi ω_a elə elektrodlaşdırılmamış kürənin

$$\sigma_r(\pm 1, t) = 0 \quad D(\pm 1, t) = 0 \quad (7.7.21)$$

sərhəd şərtlərini ödəyən məxsus rəqslərinin rezonans tezliyinə bərabərdir. (7.7.21) şərtlərini onlarla ekvivalent olan

$$\frac{1}{2} [\sigma_r(+1, t) \pm \sigma_r(-1, t)] = 0 \quad (7.7.22)$$

$$\frac{1}{2} [D_r(+1, t) \pm D_r(-1, t)] = 0$$

şərtləri ilə əvəz etsək (7.7.12)-yə əsasən (7.7.22)-ni aşağıdakı cəbri cəmlərin sıfıra bərabər olmasına gətiririk.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+1)C_{11}A_{2n+1} + (2nC_{11} + 2C_{13})\varepsilon A_{2n} + \\ & \quad + (2n+1)e_{11}B_{2n+1} + 2ne_{11}\varepsilon B_{2n}] = 0 \\ & \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+2)C_{11}A_{2n+2} + (2nC_{12} + C_{11} + 2C_{13})\varepsilon A_{2n+1} + \\ & \quad + (2n+2)\varepsilon_{11}B_{2n+2} + (2n+1)\varepsilon_{11}\varepsilon B_{2n+1}] = 0 \\ & \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+1)e_{11}A_{2n+1} + (2ne_{11} + 2e_{13})\varepsilon A_{2n} - \\ & \quad - (2n+1)\varepsilon_{11}B_{2n+1} - 2n\varepsilon_{11}\varepsilon B_{2n}] = 0 \\ & \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+2)e_{11}A_{2n+2} + (2ne_1 + e_{11} + 2e_{13})\varepsilon A_{2n+1} - \\ & \quad - (2n+2)e_{11}B_{2n+2} - (2n+1)\varepsilon_{11}B_{2n+1}] = 0 \end{aligned} \quad (7.7.23)$$

Yenə də bundan əvvəlki kimi hərəkət edərək (7.7.11)-dən indeksi ikidən böyük olan əmsalları 0; 1 indeksli əmsallarla ifadə elib (7.7.23)-də yazaraq B_0 -in daxil olmadığı (B_0 (7.7.11) və (7.7.23)-ə daxil deyil) dörd tənlikdən ibarət cəbri tənliklər sistemi alınır:

$$\bar{m}_{\alpha 1}A_0 + m_{\alpha 5}A_1 + m_{\alpha 8}B_1 = 0 \quad \alpha = 1, 4, 5, 8 \quad (7.7.24)$$

Bu sistemin sonuncu iki tənliyi xətti asılıdır. Buna inanmaq üçün (7.7.14) cəmlərindən sonuncu ikisini toplayıb (7.7.7) asılılığından istifadə etmək kifayətdir. Ona görə də bu sistemdə dördüncü qeyri-bircins tənliyi nəzərə almadan birinci üç bircins tənliklər sisteminin determinantını sıfıra bərabər etməklə elektrodlaşdırılmış kürə üçün tezlik tənliyi alırıq

$$\det\{m_{\alpha\beta}(e_{ik}, c_{ik}, \varepsilon_{ii}, \varepsilon, \omega_r)\} = 0 \quad (\alpha = 1,4,8, \beta = 1,5,8) \quad (7.7.25)$$

Buradan (7.7.22) sərhəd şərtləri daxilində elektrodlaşdırılmış pryozokeramik kürə üçün rezonans tezliklərini təyin edirik. Onda həm də antirezonsans tezliklərini alırıq.

İndi (7.7.10) sıralarında cəmi üç hədlə kifayətlənməklə

$$u(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 \quad \phi(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 \quad (7.7.26)$$

ω_r və ω_a tezliklərini təyin edək.

Bu yaxınlaşmada ω_r rezonans tezliyi üçün tezlik tənliyindən tapırıq:

$$\omega_r^2 = 2\varepsilon \left(C_{33} + C_{23} - \frac{2C_{13}^2}{C_{11}} \right) \quad (7.7.27)$$

(7.7.25) tezlik tənliyindən isə tapırıq:

$$\omega_r^2 = 2\varepsilon^2 \left(C_{33} + C_{23} + 2 \frac{C_{11}e_{31}^2 - 2C_{13}e_{11}e_{31} - \varepsilon_{11}C_{13}^2}{C_{11}e_{11} + e_{11}^2} \right) \quad (7.7.28)$$

Qeyd etməliyik ki ω_r tezliyi materialın pyezoelektrik və dielektrik xassələrindən asılı olub, kürənin elastik rəqslərinin rezonans tezliyi ilə üst-üstə düşür. Antirezonsans tezliyi ω_a , ω_r -

də elektroelastiklik analogiyası vasitəsi ilə C_{ik} -ni $C_{ik} + \frac{e_{i1}e_{k1}}{\varepsilon_{11}}$

ilə əvəz etməkdə alına bilər. ω_r^2 və ω_a^2 kəmiyyətlərinin ifadələrini elektromexaniki əlaqə əmsalının ifadəsində yazmaqla alırıq:

$$K_d^2 = 1 - \left(C_{33} + C_{23} - 2 \frac{C_{13}^2}{C_{11}} \right) \times \left(C_{33} + C_{23} + 2 \frac{C_{11}e_{31}^2 - 2C_{13}e_{11}e_{31} - \varepsilon_{11}C_{13}^2}{C_{11}e_{11} + e_{11}^2} \right)^{-1} \quad (7.7.29)$$

Yüksək tərtibli tezlikləri tapmaq üçün (7.7.10) sıralarında daha çox hədlər saxlamaq lazımdır.

§7.8. Radial polyarlaşmış qalın divarlı pyezokeramik kürənin oxasimmetrik rəqsləri [95]

Daxili və xarici səthlərinin radiusları uyğun olaraq R_0-h və R_0+h olan qalın divarlı kürəyə r, θ, φ sferik koordinat sisteminə baxaq. Onda onun oxasimmetrik rəqslərinin tənliyi və uyğun elektrostatika tənlikləri baxdığımız sistemdə belə yazılar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (2\sigma_r - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta) &= \rho \ddot{u}_r \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} [(\sigma_r - \sigma_{\theta\theta}) \operatorname{ctg} \theta + 3\sigma_{r\theta}] &= \rho \ddot{u}_\theta \\ \frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{2}{r} D_r + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} D_\theta \operatorname{ctg} \theta &= 0 \end{aligned} \quad (7.8.1)$$

Bu sistemə aşağıdakı həndəsi münasibətləri də qoşaq:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right); \\ e_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} (u_\theta \operatorname{ctg} \theta + u_r); \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - u_\theta \right) \end{aligned} \quad (7.8.2)$$

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad E_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad (7.8.3)$$

Yuxarıda göstərilən münasibətlərə radial polyarlaşmış pye-zokeramikanın müvafiq hal tənliklərini də əlavə etməklə [6 mm sinfi] qapalı sistem alırıq:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= C_{11}\varepsilon_{rr} + C_{13}(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\theta\theta}) - \pi_{11}E_r \\
 \sigma_{\theta\theta} &= C_{13}\varepsilon_{rr} + C_{33}\varepsilon_{\varphi\varphi} + C_{23}\varepsilon_{\theta\theta} - \pi_{31}E_r \\
 \sigma_{\varphi\varphi} &= C_{13}\varepsilon_{rr} + C_{23}\varepsilon_{\varphi\varphi} + C_{33}\varepsilon_{\theta\theta} - \pi_{31}E_r \\
 \sigma_{r\theta} &= 2C_{55}\varepsilon_{r\theta} - \pi_{53}E_\theta \\
 D_r &= \pi_{11}\varepsilon_{rr} + \pi_{31}(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\theta\theta}) + \varepsilon_{11}E_r \\
 D_z &= 2\pi_{53}\varepsilon_{r\theta} + \varepsilon_{53}E_\theta
 \end{aligned} \tag{7.8.4}$$

Burada C_{ij}^E - elastikli kmodulları, ε_{ij}^E - dielektrik nüfuzluluğu tenzorunun komponentləridir. C_{ij} və ε_{ij} -lər üzərindəki yuxarı E və ε indeksləri yazılmırlar. $r = R_0 \pm h$ səthlərində aşağıdakı bircinsli sərhəd şərtləri qoyulur:

$$\sigma_{rr}(R_0 \pm h, \theta) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(R_0 \pm h, \theta) = 0, \quad \varphi(R_0 \pm h, \theta) = 0 \tag{7.8.5}$$

(7.8.1)–(7.8.4) tənliklərinin həllərini aşağıdakı şəkildə axtaraq:

$$\begin{aligned}
 u_r(r, \theta) &= \bar{u}_k P_k(\cos \theta) \quad u_\theta(r, \theta) = \bar{w}(r) \frac{d}{d\theta} P_k(\cos \theta) \\
 \varphi(r, \theta) &= \sqrt{\frac{C_a}{\varepsilon_0}} \bar{\phi}(r) P_k(\cos \theta)
 \end{aligned} \tag{7.8.6}$$

Burada C_a – ölçüsü elastiklik sabitlərinin ölçüsü ilə eyni olan sabit, ε_0 – vakuumun dielektrik nüfuzluluğudur. $P_k(\cos \theta)$

$$\frac{d^2 P_k(\cos \theta)}{d\theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{dP_k(\cos \theta)}{d\theta} = k(k+1)P_k(\cos \theta) \tag{7.8.7}$$

şərtini ödəyən Lejandr funksiyasıdır.

(7.8.6)-nı (7.8.2) – (7.8.4) tənliklərində yazmaqla və aşağıdakı bərabərliyin doğruluğunu nəzərə almaqla

$$\begin{aligned}
& C_{23} \left[\frac{d^3 P_k(\cos \theta)}{d\theta^3} - ctg^2 \theta \frac{dP_k(\cos \theta)}{d\theta} + ctg \theta \frac{d^2 P_k(\cos \theta)}{d\theta^2} \right] - \\
& - C_{33} \frac{dP_k(\cos \theta)}{d\theta} = C_{23} \left[\frac{d^3 P_k(\cos \theta)}{d\theta^3} - (1 + ctg^2 \theta) \frac{dP_k(\cos \theta)}{d\theta} + \right. \\
& \left. + ctg \theta \frac{d^2 P_k(\cos \theta)}{d\theta^2} \right] + C_{23} \frac{dP_k(\cos \theta)}{d\theta} - C_{33} \frac{dP_k(\cos \theta)}{d\theta} = \\
& = C_{23} \frac{d}{d\theta} \left[\frac{d^2 P_k(\cos \theta)}{d\theta^2} + ctg \theta \frac{dP_k(\cos \theta)}{d\theta} \right] + (C_{23} - C_{33}) \frac{dP_k(\cos \theta)}{d\theta} = \\
& = C_{23} k(k+1) \frac{dP_k(\cos \theta)}{d\theta} + (C_{23} - C_{33}) \frac{dP_k(\cos \theta)}{d\theta} = \\
& = [C_{23} k(k+1) + C_{23} - C_{33}] \frac{dP_k(\cos \theta)}{d\theta} \quad (7.8.8)
\end{aligned}$$

aşağıdakı adi diferensial tənliklər sisteminə gəlirik

$$\begin{aligned}
& a_1 \left[\bar{u}_k'' + \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon x} \bar{u}_k' \right] + \left[\Omega^2 - \frac{a_2 \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon x)^2} \right] u_k + \frac{\varepsilon a_3}{1 + \varepsilon x} \bar{w}_k' + \\
& + \frac{a_4 \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon x)^2} \bar{w}_k + a_5 \bar{\phi}_k'' + \frac{\varepsilon a_6}{1 + \varepsilon x} \bar{\phi}_k' + \frac{\varepsilon^2 a_7}{(1 + \varepsilon x)^2} \bar{\phi}_k = 0 \\
& b_1 \left[\bar{w}_k'' + \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon x} \bar{w}_k' \right] + \left[\Omega^2 - \frac{b_2 \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon x)^2} \right] \bar{w}_k + \frac{\varepsilon b_3}{1 + \varepsilon x} \bar{u}_k' + \\
& + \frac{b_4 \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon x)^2} \bar{u}_k + \frac{\varepsilon b_5}{1 + \varepsilon x} \bar{\phi}_k' + \frac{\varepsilon^2 b_6}{(1 + \varepsilon x)^2} \bar{\phi}_k = 0 \quad (7.8.9)
\end{aligned}$$

$$c_1 \left[\bar{\phi}_k'' + \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon x} \bar{\phi}_k' \right] - \frac{\varepsilon^2 c_2}{(1+\varepsilon x)^2} \bar{\phi}_k + \frac{\varepsilon c_3}{1+\varepsilon x} \bar{w}_k' + \\ + \frac{c_4 \varepsilon^2}{(1+\varepsilon x)^2} \bar{w}_k + c_5 \bar{u}_k'' + \frac{\varepsilon c_6}{1+\varepsilon x} \bar{u}_k' + \frac{\varepsilon^2 c_7}{(1+\varepsilon x)^2} \bar{u}_k = 0$$

(-1, 1) aralığında sərhəd şərtləri ($x=\pm 1$) aşağıdakı şəkllə düşürlər:

$$\mu_{11}(1+\varepsilon x)\bar{w}_k' + \varepsilon \mu_{13}[2\bar{u}_k - k(k+1)\bar{w}_k] + \varepsilon_{11}(1+\varepsilon x)\bar{\phi}_k' = 0 \\ \mu_{55}[(1+\varepsilon x)\bar{w}_k' + \varepsilon(\bar{u}_k - \bar{w}_k)] + \varepsilon \varepsilon_{33}\bar{\phi}_k = 0 \quad (7.8.10)$$

(7.8.9), (7.8.10) bərabərliklərində belə işarələr daxil edilib:

$$x = \frac{r - R_0}{h}; u_k(r) = \bar{u}_k(x); w_k(r) = \bar{w}_k(x); \phi_k(r) = \bar{\phi}_k(x)$$

$$\Omega = \omega h \sqrt{\rho C_a^{-1}}; \varepsilon = \frac{h}{R_0}; \mu_{ij} = C_{ij} C_a^{-1}; \varepsilon_{ij} = \pi_{ij} (\varepsilon_0 C_a)^{-1}$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} \varepsilon_0^{-1}; a_1 = \mu_{11}; a_2 = 2(\mu_{33} + \mu_{23} - \mu_{13}) + k(k+1)\mu_{55}$$

$$a_3 = -k(k+1)(\mu_{13} + \mu_{55}); a_4 = -k(k+1)\varepsilon_{53}; b_1 = \mu_{55}$$

$$b_2 = (k^2 + k - 1)\mu_{33} + \mu_{23} + 2\mu_{55}; b_3 = \mu_{13} + \mu_{55};$$

$$b_4 = \mu_{33} + \mu_{23} + 2\mu_{55}; b_5 = \varepsilon_{31} + \varepsilon_{53}; b_6 = 2\varepsilon_{53};$$

$$c_1 = -\varepsilon_{11}; c_2 = -k(k+1)\varepsilon_{33}; c_3 = -k(k+1)(\varepsilon_{31} + \varepsilon_{53});$$

$$c_4 = -k(k+1)(\varepsilon_{31} - \varepsilon_{53}); c_5 = \varepsilon_{11}; c_6 = 2(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{53});$$

(7.8.11)

(7.8.9) sisteminin əmsalları (-1,1) aralığında analitik funksiyalardır və deməli sistemin həlli də analitik funksiyalar olmalıdır. Bu işə imkan verir ki, həlləri

$$\bar{u}_k = \sum_{n=0}^{\infty} A_n X^n \quad \bar{w}_k = \sum_{n=0}^{\infty} B_n X^n \quad \bar{\phi}_k = \sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n \quad (7.8.12)$$

qüvvət sıraları şəklində axtaraq. (7.8.12)-ni yığcam şəkildə belə də yazmaq olar:

$$\{\bar{u}_k, \bar{w}_k, \bar{\phi}_k\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n, B_n, C_n\} X^n$$

(7.8.12)-ni (7.8.9) sistemində yazıb, x -in eyni dərəcəli qüvvətlərinin əmsallarını bərabərləşdirsək A_n, B_n, C_n əmsalları arasındakı indeksləri ikidən az olmayan əmsalları ikidən kiçik indeksli əmsallarla ifadə etməyə imkan verən rekurrent münasibətlərə gəlirik:

$$\begin{aligned} & a_1(n+2)(n+1)A_{n+2} + (n+2)(n+1)a_5C_{n+2} = -2(n+1)^2\epsilon a_1A_{n+1} + \\ & + \left\{ \epsilon^2[a_2 - (n+1)na_1]A_n - \epsilon\Omega^2[2A_{n-1} + \epsilon A_{n-2}] - \right. \\ & \quad - (n+1)\epsilon a_3C_{n+1} - \epsilon^2(na_3 + a_4)C_n - (n+1)\epsilon(2na_5 + a_6)B_{n+1} - \\ & \quad \left. - \epsilon^2\{n[(n-1)a_5 + a_6] + a_7\}C_n \right. \\ & (n+2)(n+1)b_1B_{n+2} = -2(n+1)^2\epsilon b_1B_{n+1} + \\ & + \left\{ \epsilon^2[b_2 - (n+1)nb_1] - \Omega^2 \right\} B_n - \epsilon\Omega^2(2B_{n-1} + \epsilon B_{n-2}) - \\ & - (n+1)\epsilon b_3A_{n+1} - \epsilon^2(nb_3 + b_4)A_n - \\ & - (n+1)\epsilon b_5C_{n+1} - \epsilon^2(nb_5 + b_6)C_n \\ & (n+2)(n+1)c_1C_{n+2} + (n+2)(n+1)c_5A_{n+2} = \\ & = -2(n+1)^2\epsilon c_1C_{n+1} + \epsilon^2[c_2 - n(n+1)c_1]C_n - (n+1)\epsilon c_3B_{n+1} - \\ & - \epsilon^2(nc_3 + c_4)B_n - (n+1)\epsilon(2nc_5 + c_6)A_{n+1} - \\ & - \left\{ \epsilon^2[n(n-1)c_5 + c_6] + c_7 \right\} A_n \end{aligned} \quad (7.8.13)$$

İndeksleri ikidən kiçik olan əmsalların sərbəstliyi sərhəd şərtlərinin ödənilməsini təmin edir.

Belə ki, (7.8.3)-ü (7.8.10)-a daxil etməklə alırıq:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left[(2n+1)\mu_{11}A_{2n+1} + 2(n\mu_{11} + \mu_{13})\epsilon A_{2n} - k(k+1)\epsilon\mu_{13}B_{2n} + \right. \\ & \quad \left. + (2n+1)\epsilon_{11}C_{2n+1} + 2n\epsilon\epsilon_{11}C_{2n} \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.8.14)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+2)\mu_{11}A_{2n+2} + [(2n+1)\mu_{11} + 2\mu_{13}]\varepsilon A_{2n+1} - \\
& - k(k+1)\varepsilon\mu_{13}B_{2n+1} + (2n+1)\varkappa_{11}C_{2n+2} + (2n+1)\varepsilon\varkappa_{11}C_{2n+1}] = 0 \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \{\mu_{55}[\varepsilon A_{2n} + (2n+1)B_{2n+1} + (2n-1)\varepsilon B_{2n}] + \varepsilon\varkappa_{53}C_{2n}\} = 0 \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \{\mu_{55}[\varepsilon A_{2n+1} + 2(n+1)B_{2n+2} + 2n\varepsilon B_{2n+1}] + \varepsilon\varkappa_{53}C_{2n+1}\} = 0 \\
& \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} = 0 \quad \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+1} = 0
\end{aligned}$$

Bundan qabaqkı paraqraflarda olduğu kimi hərəkət etməklə (7.8.13) və (7.8.14) altı bircins cəbri tənlikdən ibarət sistemə gətirilir.

$$\sum_{q=1}^6 m_{pq}(\mu_{ij}, \varkappa_{ij}, \varepsilon_{ij}, \varepsilon, k, \Omega)X_q = 0 \quad q = \overline{1,6} \quad (7.8.15)$$

Bu sistemin determinantını sıfıra bərabər tutmaqla məxsusi rəqslər üçün tezlik tənliyi alırıq

$$\det\{m_{pq}(\mu_{ij}, \varkappa_{ij}, \varepsilon_{ij}, \varepsilon, k, \Omega)\} = 0 \quad (7.8.16)$$

Xüsusi halda $\varepsilon=0$ olduqda (bu çox-çox nazik divarlı sferik örtük deməkdir) başlangıç məsələ (7.8.8) (7.8.9) iki birindən asılı olmyan məsələlərə yəni:

$$\text{a) } \mu_{33} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \Omega^2 u_k + \varkappa_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0 \quad (7.8.17)$$

$$\left[\mu_{33} \frac{\partial u}{\partial r} + \varkappa_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]_{x=\pm 1} = 0 \quad (7.8.18)$$

$$\text{b) } \mu_{55} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \Omega^2 u_\theta = 0 \quad (7.8.19)$$

$$\left. \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right|_{x=\pm 1} = 0 \quad (7.8.20)$$

bircinsli sərhəd məsələlərinə ayrılır.

(7.8.19) (7.8.20) spektral məsələləri bağlı olmayan (φ potensialından asılı olmayan) sürüşmə rəqslərini xarakterizə etdiyi halda (7.8.17) – (7.8.18) spektral məsələsi pyezokeramik layın qalınlıq istiqamətindəki elektroelastik rəqslərini xarakterizə edir. Bu iki spektral məsələlərdən tapılan tezlikləri uyğun olaraq $U(n)$ və $W(n)$ ilə işarə edək (burada n tezliyin tərtib nömrəsidir).

(7.8.17) (7.8.18) məsələsini həll edib tezliklər üçün tapırıq

$$U(2n + 2) = 5,46417\dots 18,42845 \dots \quad (n=0,1\dots)$$

(7.8.19), (7.8.20) məsələsindən isə tapırıq:

$$W(n + 1) = \frac{\pi n}{2} \sqrt{\mu_{55}} \quad (n=0,1\dots)$$

Bundan sonra (7.8.16) tənliyinin həllinin təhlilini ədədi yolla yerinə yetirmək olar.

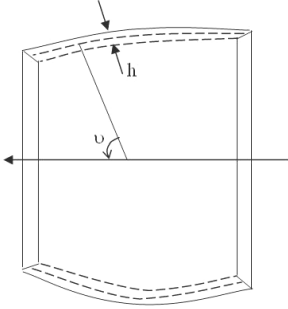
§7.9. Pyezokeramik fırlanma örtükləri üçün elektroelastiklik münasibətləri [87]

Nazik fırlama örtükləri şəklində olan pyezokeramik elementlər bir çox texniki qurğularda enerjiyə aşağı tezlikli elektromexaniki çeviriciləri qismində öz tətbiqlərini tapırlar. Belə çevirici elementlərin işinin effektivliyi (o cümlədən fırlanma örtüklərinin) və bir sıra ədədi xarakteristikaları elektroelastikliyin bağlı sərhəd məsələlərindən tapılan faktorlarla təyin olunurlar. Bu məsələlər isə üçölçülü qoyuluşda olduqca mürəkkəbdirlər [10,97, 98]. Elektroelastikliyin sərhəd məsələlərinin dəqiq həlli ancaq məhdud sinif üçün [96, 97, 98, 100] məlumdur və bu sinif sırf elastiklik nəzəriyyəsi ilə müqayisədə olduqca dar bir sinifdir.

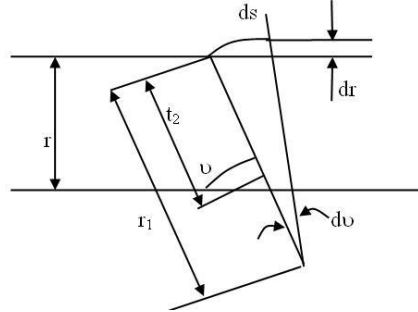
Elektroelastikliyin tətbiqi məsələlərinin təbii həll yolu tipik elementlər üçün təqribi nəzəriyyənin işlənməsindən ibarətdir. Bu zaman elektroelastiklik sahələrinin özlərini necə aparmalarına nəzərən müxtəlif cür sadələşdirici fərziyyələrdən istifadə olunur. Elektroelastikliyin üçölçülü münasibətlərində bu və ya digər sadələşdirmənin yol verilə bilməsi bəzi hallarda analitik üsullar və yaxud təcrübə göstəriciləri ilə müqayisə üsulu ilə təyin olunur. Nazik divarlı pyezoelementlər üçün ədəbiyyata [82, 96] istinad etsək bağlı sahənin mexaniki komponentləri üçün Kirxhof-Lyav fərziyyəsinin doğruluğu təsdiqlənir. Elektrik komponentləri üçün analoji tip hipotezlərin ifadəsi ədəbiyyata [101-105] əsasən mövcud deyil. Bununla belə açıq pyezokeramik sferik örtüyün oxasimmetrik rəqslərinə baxılan [100]-ün göstəriciləri elektrik dəyişənləri haqqında Kirxhof-Lyav fərziyyəsinə adekvat bir hipotez söyləməyə imkan verir. Burada elektroelastikliyin bağlı (elektrik sahəsinin potensialından asılı) tənliklərinin həlli nazik örtüklər nəzəriyyəsinin klassik münasibətlərinin mexaniki dəyişənlər üçün doğruluğu, bağlı sahənin elektrik dəyişənləri üçün üçölçülü tənliklərinin dəqiq çıxarılmasına əsasən qurulmuşdur. Nəticədə müəyyən edilmişdir ki, elektrik sahəsinin Kirxhof-Lyav hipotezinə uyğun özünü aparması elektrik sahə vektorunun normal komponentinin xətti qanunla dəyişməsi və elektrik induksiyası vektorunun normal komponentinin qalınlıqdan asılı olmaması ilə xarakterizə olunur. Kirxhof-Lyav hipotezini tamamlayan bu nəticələr aşağıda qalınlıq istiqamətində polyarlaşmış pyezokeramik fırlanma örtükləri üçün elektroelastiklik münasibətlərinin alınmasının əsasında dururlar.

¹⁰. Ortalığ səthə normal istiqamətində müntəzəm polyarlaşmış sabit h qalınlıqlı (şəkil 7.9.1) ixtiyari pyezokeramik fırlanma öyrünə baxaq. Ortalığ səthin nöqtələrinin vəziyyətini S – meridional koordinat (S – meridianın hər hansı başlanğıc P_0 nöqtəsindən ölçülən uzunluğudur) və dairəvi φ koordinatı (φ - baxılan cari və başlanğıc meridianların müstəviləri arasındakı

bucaqdır) ilə xarakterizə edəcəyik. z – koordinatı nöqtənin ortalıq səthdən məsafəsini göstərir. $\varphi = \text{const}$ meridianı və $S = \text{const}$ paraleli ortalıq səthin baş əyrilikli xətləridir. r_1 və r_2 ilə uyğun olaraq meridianın və paralelin baş əyrilik radiusları, r ilə isə fırlanma oxuna perpendikulyar müstəvidəki paralelin radiusu işarə olunur.



Şəkil 7.9.1.



Şəkil 7.9.2.

Ortalıq səthin normalı ilə fırlanma oxu arasındakı bucağa ν desək (şəkil 7.9.2) yazıla bilər:

$$r_2 = \frac{r}{\sin \nu} \quad (7.9.1)$$

Kirxhof-Lyav hipotezinə uyğun olaraq ortalıq səthdən z məsafəsində yerləşən nöqtənin yerdəyişməsi [106]-nın düsturları ilə oxasimmetrik deformasiyada belə ifadə olunur

$$u^{(z)} = u(s) + z\beta(s) \quad w^{(z)} = w(s) \quad (7.9.2)$$

Burada u və w uyğun olaraq ortalıq səthin nöqtəsinin yerdəyişmə vektorünün meridional və dairəvi komponentləri, β - ortalıq səthə normalın dönmə bucağıdır

$$\beta = \frac{u}{r_1} - \frac{dw}{ds} \quad (7.9.3)$$

Örtüyün meridional və dairəvi deformasiyaları belə ifadə olunurlar

$$\varepsilon_s = \varepsilon_s^{(0)} + z\alpha_s \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\varphi^{(0)} + z\alpha_\varphi \quad (7.9.4)$$

Belə ki, ortalıq səthin deformasiyaları

$$\varepsilon_s^{(0)} = \frac{du}{ds} + \frac{w}{r_1} \quad \varepsilon_\varphi^{(0)} = \frac{1}{r_2}(\text{uctgv} + w) \quad (7.9.5)$$

düsturları ilə tapılırlar, baş əyriliklərin dəyişmələri üçün isə

$$\alpha_s = \frac{d}{ds} \left(\frac{u}{r_1} \right) - \frac{d^2 w}{ds^2}; \quad \alpha_\varphi = \left(\frac{u}{r_1} - \frac{dw}{ds} \right) \frac{\text{ctgv}}{r_2} \quad (7.9.6)$$

bərabərlikləri doğrudur. (7.9.2) – (7.9.6) ilə oxasimetrik deformasiya olunan fırlanma örtüyünün kinematik tənlikləri ifadə olunublar.

2⁰. Nazik pyezokeramik fırlanma örtükləri nəzəriyyəsinin sadələşdirilmiş fiziki münasibətlərini almaq üçün keramika üçün [83,98] üçölçülü pyzeoeffekt tənliklərinə müraciət edək. Seçilmiş üçortoqonal s, φ, z koordinat sistemində pyzeoeffekt tənlikləri qalınlıq istiqamətində polyarlaşma halı üçün belə yazıla bilər

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= s_{13}^E \sigma_{zz} + s_{11}^E \sigma_{ss} + s_{12}^E \sigma_{\varphi\varphi} + d_{31} E_z \\ \varepsilon_\varphi &= s_{13}^E \sigma_{\pi\pi} + s_{12}^E \sigma_{ss} + s_{11}^E \sigma_{\varphi\varphi} + d_{31} E_z \\ \varepsilon_z &= s_{33}^E \sigma_{\pi\pi} + s_{13}^E (\sigma_{ss} + \sigma_{\varphi\varphi}) + d_{33} E_z \\ \varepsilon_{sz} &= s_{44}^E \sigma_{sz} + d_{15} E_s \\ D_s &= \varepsilon_{11}^T E_s + d_{15} \sigma_{sz} \\ D_z &= \varepsilon_{33}^T E_z + d_{31} (\sigma_{ss} + \sigma_{\varphi\varphi}) + d_{33} \sigma_{zz} \end{aligned} \quad (7.9.7)$$

Burada s_{ij}^E ($i, j = \overline{1,3}$) – materialın elastiklik sabitləridir (sabit, sıfır bərabər gərginlikli elektrik sahəsində ölçülülər), d_{31} , d_{33} , d_{15} – pyezomodullar, ε_{11}^T , ε_{33}^T – sıfır bərabər mexaniki gərginlik şəraitində ölçülən dielektrik müfuzluluğu, σ_{ss} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz} , σ_{sz} –

mexaniki gərginlik tenzorunun komponentləridirlər, E_s , E_z və D_s , D_z – uyğun olaraq elektrik sahəsi vektoru \vec{E} -nin və elektrik induksiyası vektoru \vec{D} -nin meredional və normal komponentləridir.

Nazik örtüklər üçün hipotezlərə uyğun olaraq (7.9.7) münasibətlərində $s_{zz}=0$ qəbul edib və Kirxhof-Lyav hipotezinin dəqiqliyi çərçivəsində (7.9.2) və (7.9.3) münasibətlərinə əsasən $\varepsilon_{sz} = 0$ yazıb onları sadələşdirək. Nəticədə (7.9.7)-nin üçüncü və dördüncü tənliklərindən alırıq:

$$\begin{aligned} s_{zz} &= s_{13}^E (\sigma_{ss} + \sigma_{\varphi\varphi}) + d_{33} E_z \\ \sigma_{ss} &= -\frac{d_{15}^E}{s_{44}^E} E_z \end{aligned} \quad (7.9.8)$$

(7.9.7)-nin σ_{ss} və $\sigma_{\varphi\varphi}$ - gərginliklərinə nəzərən həll olunmuş birinci iki tənliyi aşağıdakı şəkllə düşürlər.

$$\begin{aligned} \sigma_{ss} &= \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu)} \left[(\varepsilon_{ss} + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi}) - (1+\nu)d_{31} E_r \right] \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu)} \left[(\nu\varepsilon_{ss} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) - (1+\nu)d_{31} E_r \right] \end{aligned} \quad (7.9.9)$$

Burada $\nu = \nu^E = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E}$ - örtüyün materialının Poisson əmsalıdır

(7.9.7) sisteminin sonuncu iki tənliyi edilən sadələşdirmələrə əsasən aşağıdakı şəkllə düşürlər:

$$\begin{aligned} D_s &= \varepsilon_{11}^T E_s - \frac{d_{15}^2}{s_{44}^E} E_s = \varepsilon_{11}^T (1 - K_{15}^2) E_s \quad (7.9.10) \\ D_z &= \varepsilon_{33}^T E_z + d_{31} (\sigma_{ss} + \sigma_{\varphi\varphi}) = \\ &= \varepsilon_{33}^T (1 - K_p^2) E_z + \frac{d_{31}}{s_{11}^E(1-\nu)} (\varepsilon_{ss} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) \end{aligned}$$

Burada K_{15}^2 və K_p^2 - elektromexaniki əlaqənin sürüşmə və planar əmsallarıdır.

$$K_{15}^2 = \frac{d_{15}^2}{s_{44}^E \epsilon_{11}^T}; \quad K_p^2 = \frac{2}{1 - \nu} \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T} \quad (7.9.11)$$

İndi də elektrik sahəsi üçün hipotezlərə müraciət edək. Yuxarıda qeyd edilmişdi ki, [92]-un nəticələrinə əsasən elektrik sahəsinin gərginlik vektoru və induksiya vektorunun normal komponentləri üçün aşağıdakı təqribi bərabərlik doğrudur.

$$E_z = E_z^{(0)}(s) + zE_z^{(1)}(s) \quad D_s = D_z^{(0)}(s) \quad (7.9.12)$$

Qeyd edək ki, D_z -in ayrılışında xətti toplanan olmamasının fiziki izahı var. Onun məgzi bundan ibarətdir ki, sırf əyilmə deformasiyası nə elementin səthində yerləri dəyişdirilmiş yüklərin əmələ gəlməsinə, nə də bu elektrodlar arasında potensiallar fərqiəin əmələ gəlməsinə gətirmir. Eləcə də, sırf əyilmə deformasiyası xarici elektrik sahəsi hesabına baş verə bilməz. (7.9.12)-ni və (7.9.4)-ü (7.9.10)-un ikinci bərabərliyində yazsaq alarıq:

$$D_z = \epsilon_{33}^T (1 - K_p^2) E_z^{(0)} + \frac{d_{31}}{s_{11}^E (1 - \nu)} (\epsilon_{ss}^{(0)} + \epsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}) + z \left[\epsilon_{33}^T (1 - K_p^2) E_z^{(1)} + \frac{d_{31}}{s_{11}^E (1 - \nu)} (\alpha_s + \alpha_\varphi) \right] \quad (7.9.13)$$

Bu bərabərlik doğru olması üçün ((7.9.12)-yə müraciət et) sağ tərəfdə z -in əmsalı eyniyyətlə sıfır olmalıdır.

Beləliklə, elektrik sahəsi üçün xətti düzəlişin ifadəsi belə olmalıdır:

$$E_z^{(1)} = -\frac{1}{2d_{31}} \frac{K_p^2}{1 - K_p^2} (\alpha_s + \alpha_\varphi) \quad (7.9.14)$$

(7.9.12) ayrılışı və (7.9.14) bərabərliyi (7.9.9) və (7.9.10) tənliklərinin sonrakı sadələşdirmələrinə yol açır:

$$\sigma_{ss} = \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu^2)} \left\{ [\varepsilon_{ss}^{(0)} + \nu \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}] - (1+\nu)d_{31}E_z^{(0)} \right\} + \frac{z}{s_{11}^E(1-\nu^2)} \left[\left(1 + \frac{1+\nu}{2} \frac{K_p^2}{1-K_p^2} \right) (\alpha_s + \alpha_\varphi) - (1-\nu)\alpha_\varphi \right] \quad (7.9.15)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu^2)} \left\{ [\nu \varepsilon_{ss}^{(0)} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}] - (1+\nu)d_{31}E_z^{(0)} \right\} + \frac{z}{s_{11}^E(1-\nu^2)} \left[\left(1 + \frac{1+\nu}{2} \frac{K_p^2}{1-K_p^2} \right) (\alpha_s + \alpha_\varphi) - (1-\nu)\alpha_s \right]$$

$$D_s = \varepsilon_{11}^T(1-K_{15}^2)E_s$$

$$D_z = \varepsilon_{33}^T(1-K_p^2)E_z^{(0)} + \frac{d_{31}}{s_{11}^E(1-\nu^2)}(\varepsilon_{ss}^{(0)} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)})$$

Nazik örtüklər nəzəriyyəsində lövhələr nəzəriyyəsində olduğu kimi fiziki münasibətlər integral xarakteristikaları, yəni qüvvələr və momentlər [105]-in düsturları ilə daxil edirlər.

$$N_s = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ss} dz; \quad N_\varphi = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\varphi\varphi} dz; \quad Q_s = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{sz} dz \quad (7.9.16)$$

$$M_s = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{sr} z dz; \quad M_\varphi = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\varphi\varphi} z dz$$

$$\begin{aligned} N_s &= D_N \left\{ [\varepsilon_{ss}^{(0)} + \nu \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}] - (1+\nu)d_{31}E_z^{(0)} \right\} \\ N_\varphi &= D_N \left\{ [\nu \varepsilon_{ss}^{(0)} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}] - (1+\nu)d_{31}E_z^{(0)} \right\} \\ M_s &= D_M (\alpha_s - \bar{\nu}\alpha_\varphi) \quad M_\varphi = D_M (\bar{\nu}\alpha_s + \alpha_\varphi) \end{aligned} \quad (7.9.17)$$

Örtüyün dartılma sərtliyi D_N və əyilmə sərtliyi D_M aşağıdakı düsturlarla tapılırlar:

$$D_N = \frac{h}{s_{11}^E(1-\bar{\nu}^2)}; D_M = \frac{h^3}{12s_{11}^E(1-\bar{\nu}^2)} \left(1 + \frac{1-\bar{\nu}}{2} \frac{K_p^2}{1-K_p^2} \right) \quad (7.9.18)$$

$\bar{\nu}$ ilə isə gətirilmiş Puasson əmsalı işarə olunub:

$$\bar{\nu} = \frac{\nu + 0,5(1-\nu)K_p^2}{1 - 0,5(1-\nu)K_p^2} \quad (7.9.19)$$

Beləliklə, (7.9.17) münasibətləri sırf elastik izotrop fırlanma örtükləri üçün analoji münasibətlərdən qalınlıq istiqamətində elektrik sahəsi ilə bağlı toplananların olması ilə və həm də əyilmə sərtliyinin ifadəsinin dəyişməsi və habelə Puasson əmsalının gətirilmiş əmsalla əvəz olunması ilə fərqlənirlər.

3⁰. Nazik pyezokeramik fırlanma örtüklərindəki bağlı elektroelastik prosesləri ifadə edən münasibətlərin tam sistemini yuxarıda göstərilmiş kinematik və fiziki asılılıqlar örtüklərin dinamikasının tənlikləri və məcburi elektrostatika tənlikləri ilə tamamlamaqla alacağıq. Örtük elementinin qüvvə və momentlərlə ifadə olunmuş hərəkət tənlikləri aşağıdakı kimidirlər [105]

$$\begin{aligned} \frac{d(rN_s)}{ds} - N_\varphi \cos \nu + \frac{rQ_s}{r_1} + r q_s &= r h \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{d(rM_s)}{ds} - M_\varphi \cos \nu - rQ_s &= 0 \\ \frac{d(rQ_s)}{ds} - N_\varphi \sin \nu + \frac{rN_s}{r_1} + r q_z &= r h \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (7.9.20)$$

Burada ρ - pyezokeramik materialın sıxlığı, q_s və q_z – xarici qüvvələrin komponentləri; t – zaman koordinatıdır.

Pyezokeramika üçün məcburi elektrostatika tənlikləri belə yazılır

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad (7.9.21)$$

Elektrik sahəsinin \vec{E} gərginlik vektoru əvəzində φ elektrostatik potensial daxil etsək

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi \quad (7.9.22)$$

(7.9.21) tənliyi eyniyyətlə ödənilir və elektrostatik sahənin təhlili üçün aşağıdakı sistemi alırıq:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad \vec{E} = \operatorname{grad} \varphi \quad (7.9.23)$$

Üçölçülü halda \vec{E} və \vec{D} vektorları arasında əlaqə pyezo-effekt tənliklərinin axıncı iki münasibəti ilə müəyyən edilir. (7.9.17) fiziki münasibətlərin çıxarılmasında elektrik sahə vektorunun normal komponentləri üçün (7.9.12) təqribi münasibətlərdən istifadə etdik. Ona görə də (7.9.23) hipotezlərinin ziddiyyətsizliyi və (7.9.23) tənliklərinin ödənilməsi üçün onların dəqiqlik dərəcəsinin isbat olunması zəruridir.

Örtüyün koordinat oxları üzərinə proyeksiyalarda (7.9.21) tənlikləri [103] belə yazılırlar

$$\operatorname{div} \vec{D} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial s} (rD_s) + \frac{\partial}{\partial z} (rD_z) \right] = 0 \quad (7.9.24)$$

$$E_s = -\frac{\partial \varphi}{\partial s}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

E_z üçün (7.9.12) ayrılışından istifadə edərək z -ə görə inteqrallama yolu ilə asanlıqla tapırıq.

$$\varphi = -\varphi_0(s) - zE_z^{(0)}(s) - \frac{1}{2}z^2E_z^{(1)}(s) \quad (7.9.25)$$

Burada $\varphi_0(s)$ – hər hansı ixtiyari funksiyadır.

Potensialın verilmiş ifadəsinə görə elektrik sahəsinin E_s komponentini tapmaq olar.

$$E_s = -\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial s} + z \frac{dE_z^{(0)}}{ds} + \frac{z^2}{2} \frac{dE_z^{(1)}}{ds} \quad (7.9.26)$$

E_s -i bilərək (7.9.10)-un birinci düsturuna görə D_s -in ayrılışını tapırıq:

$$D_s = \varepsilon_{11}^T (1 - K_{15}^2) \left[\frac{d\varphi_0}{ds} + z \frac{dE_z^{(0)}}{ds} + \frac{z^2}{2} \frac{dE_z^{(1)}}{ds} \right] \quad (7.9.27)$$

D_s -in bu ifadəsini (7.9.24)-ün birinci tənliyinə daxil etsək elektrik induksiyaının normal komponentinin ayrılışını alırıq:

$$D_z = D_z^{(0)} - \varepsilon_{11}^T (1 - K_{15}^2) \frac{1}{r} \frac{d}{ds} \left[z\varphi_0 + \frac{1}{2} z^2 E_z^{(0)} + \frac{1}{6} z^3 E_z^{(1)} \right] \quad (7.9.28)$$

(7.9.30)-nin (7.9.12) düsturu ilə müqayisəsindən, yuxarıda qeyd olunan D_z -in ayrılışında qalınlıq boyunca xətti toplanan olmamasını nəzərə almaqla $\varphi_0(s)$ funksiyasını tapmaq üçün

$$\frac{1}{r} \frac{d}{ds} \left(r \frac{\partial \varphi_0}{\partial s} \right) = 0 \quad (7.9.29)$$

tənliyini alırıq, buradan da

$$\varphi_0(s) = C_1 \int \frac{1}{r} ds + C \quad (7.9.29')$$

harada ki, C_1 və C_2 – ixtiyari sabitlərdir və sərhəd şərtlərindən tapılırlar.

Edilən təhlil göstərir ki, (7.9.12) hipotezləri ziddiyyətsizdirlər və elektrik sahəsinin təyinindəki xəta ikinci və daha yüksək tərtibdən kiçik toplananlarla xarakterizə olunur.

4⁰. Yuxarıda deyilənlərlə pyezokeramik fırlanma örtükləri üçün oxasimmetrik nəzəriyyənin bütün zəruri münasibətləri təyin olunurlar. Bu zaman meydana çıxır ki, əgər bağlı sahənin (potensialdan asılı) mexaniki komponentləri üçün axtarılan sərbəst dəyişənlər qismində ortalıq səthin nöqtələrinin yerdəyişmələri olan u və w -ni götürsək, onlar üçün (7.9.5), (7.9.6), (7.9.17) və (7.9.20) tənlikləri öz şəkillərinə görə nazik örtüklərin sırf elastik nəzəriyyəsinin tənlikləri ilə üst-üstə düşürlər. Sahələrin bağlılığı onlarda elektrik sahəsinin E_z daxil olan toplananın olmasında və əyilmə sərtliyindəki elektromexaniki

əlaqə əmsallarından asılı düzəlişdə biruzə verir. Örtükdə elektrik sahəsi elektrik potensialının (7.9.25) ayrılışı və (7.9.29) bərabərliyi ilə təyin olunur. Konkret məsələlərin həllində göstərilən münasibətləri mexaniki və elektrik xarakterli sərhəd şərtləri ilə tamamlamaq lazımdır. Mexaniki sərhəd şərtləri örtüklər nəzəriyyəsinin [106] sərhəd məsələlərinin məlum quruluşundan heç nə ilə fərqlənmir. Elektrik sərhəd şərtləri örtüyün səthlərində elektrodların yerləşməsi və yüklənmələrindən asılıdır. Məsələn, əgər elektrodlar səthi tamamilə örtülərsə $\left(z = \pm \frac{h}{2}\right)$ və aktiv elektrik yüklənməsi elektrodlarda V_a -a

bərabər potensiallar fərqi kimi verilərsə, $s=0$, $s=s_0$ səthləri elektrik yüklərindən azaddırsa, onda sərhəd şərtləri aşağıdakı şəkildə yazıla bilər:

$$\varphi|_{z=\frac{h}{2}} = -\varphi|_{z=-\frac{h}{2}} = V_0 \quad D_s|_{s=0,s} = 0 \quad (7.9.30)$$

(7.9.25) ayrılışının köməyi ilə birinci sərhəd şərtini ödədərek tapırıq:

$$E_z^{(0)} = -\frac{V_0}{n} \quad (7.9.31)$$

Aşkardır ki, bu zaman

$$\frac{dE_z^{(0)}}{ds} = 0$$

(7.9.309) sərhəd şərtindən və (7.9.27), (7.9.20) bərabərliklərindən çıxır ki, $\varphi_0 = \text{const}$, çünki, potensialın sabit qiyməti elektrik sahəsinin gərginliyinə təsir etmir, ona görə $\varphi_0 = 0$ qəbul etmək olar.

Beləliklə, D_s üçün sərhəd şərti örtüyün qalınlığı boyunca kvadratik toplanan dəqiqliyi ilə ödənilir.

(7.9.17) bərabərliklərindən və (7.9.31) həllindən alındığı kimi elektrik yüklənməsinin təsvir olunan üsulu üçün pyezokeramik fırlanma örtüklərinin hərəkət tənlikləri mexaniki və elektrik dəyişmələrinə nəzərən iki sərbəst tənliklər sisteminə

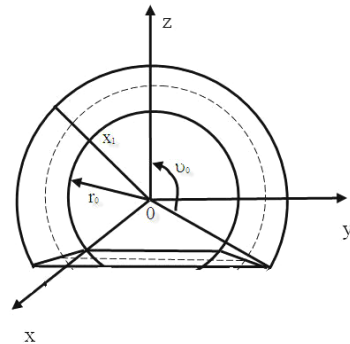
ayrılır. Elektrik yüklənməsinin başqa halları və elektrodların başqa cür yerləşmələri üçün (məsələn kəsilən elektrodlar) passiv rejimdə bağlı hərəkət tənliklərinin belə ayrılması mümkün olmaya da bilər. Lakin hətta bu hallarda əgər örtüklər nəzəriyyəsinin sırf elastik hal üçün uyğun sərhəd məsələsinin həlli məlumdursa, işlənmiş nəzəriyyə elektroelastikliyin bağlı sərhəd məsələlərinin həllini nisbətən sadə şəkildə tapmağa imkan verir.

§7.10. Nazik pyezokeramik sferik örtüyün oxasimmetrik rəqsləri [99]

Kirxhof-Lyav hipotezinə əsaslanan nazik elastik örtüklərin rəqslərinin klassik nəzəriyyəsi, nazik pyezokeramik örtüklərdə baş verən dinamik hadisələrin təhlilində də müvəffəqiyyətlə tətbiq oluna bilər. Pyezokeramik materiallardan hazırlanmış örtüklərin deformasiya olunmalarının xarakterik xüsusiyyəti, mexaniki deformasiyalarla elektrik sahəsi arasındakı əlaqənin mövcudluğundadır.

Bu paraqrafda pyezokeramik açıq sferik örtüyün oxasimmetrik rəqslərini öyrənəcədik (şəkil 7.10.1).

Fərz edək ki, elektrodlar o qədər nazikdirlər ki, hesablamalarda onların kütlə və sərtliklərini nəzərə almamaq olar. Örtüyün qabaqcadan polyarlaşmasının sırf radial istiqamətli olması qəbul olunur. Rəqslərin həyacanı elektrodlara zamana görə harmonik dəyişən elektrik üsulu ilə



Şəkil 7.10.1.

$$\varphi|_{r=r_1 r_2} = \pm V_0 e^{i\omega t}, \quad (7.10.1)$$

yəni harmonik dəyişən elektrik potensialları fərqi vermək yolu ilə yerinə yetirilir. Pyezokeramik örtüklərin rəqslərinin təqribi nəzəriyyəsinə qurarkən elektrələstikliyin sferik fəza koordinat sistemində yazılmış tənliklərinə istinad edəcəyik. Bu zaman onlarda mexaniki gərginliklər üçün Kirxof-Lyav hipotezinə uyğun sadələşdirmələr edəcəyik.

Başlanğıcda radial istiqamətdə elektrostatik φ potensialının özünü necə aparması haqda heç bir sadələşdirici hipotez irəli sürülmür. Potensialın qalınlıq boyu Kirxhof-Lyav hipotezinə uyğun özünü necə aparması haqqında təqribi analitik asılılıq üçölçülü sərhəd məsələsinin həllindən sonrakı ifadədən tapılır. Bu zaman hesab edilir ki, örtüyün qalınlığının onun radiusuna nisbəti kiçikdir və yük meridian boyunca tədricən dəyişir. Örtüyün rəqsinin tezliyinin onun qalınlıq istiqamətindəki rəqsinin tezliyindən aşağı olması qəbul olunur. Elektroelastikliyin sferik r, θ, φ koordinat sistemində radial polyarlaşmış keramika üçün oxasimetrik hal tənlikləri [81, 99, 106] aşağıdakı şəkildə yazılırlar:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= C_{33}^E \varepsilon_r + C_{13}^E (\varepsilon_\varphi + \varepsilon_\theta) - e_{33} E_r \\
 \sigma_{\theta\theta} &= C_{13}^E \varepsilon_r + C_{11}^E \varepsilon_\theta + C_{12}^E \varepsilon_\varphi - e_{13} E_r \\
 \sigma_{\varphi\varphi} &= C_{13}^E \varepsilon_r + C_{12}^E \varepsilon_\theta + C_{11}^E \varepsilon_\varphi - e_{13} E_r \\
 \sigma_{r\theta} &= C_{44}^E \varepsilon_{r\theta} - e_{15} E_\theta \\
 D_r &= \varepsilon_{33}^E E_r + \varepsilon_{33}^E \varepsilon_r + e_{13} (\varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi) \\
 D_\theta &= \varepsilon_{11}^E E_\theta + e_{15} \varepsilon_{r\theta}
 \end{aligned} \tag{7.10.2}$$

Burada σ_{ij} və ε_{ij} – uyğun olaraq gərginlik və deformasiya tenzorlarının komponentləri, D_r, D_θ və E_r, E_θ elektrik induksiya vektoru \vec{D} -nin və elektrik sahəsinin gərginliyi vektoru \vec{E} -nin komponentləri, C_{ij} – elastiklik modulları (sıfır gərginlikli elektrik sahəsində ölçülülər), e_{ij} – pyezomodullar, ε_{11}^s

və ε_{33}^s - materialın deformasiyasız ölçülmüş dielektrik nüfuzluluqlarıdır.

Elektrik sahəsinin gərginlik vektoru elektrostatik potensialla aşağıdakı kimi əlaqələnilir:

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}; \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \quad (7.10.3)$$

Nazik divarlı örtüklərdən danışarkən (7.10.2) münasibətlərinin sadələşdirilməsini V.V.Novojilova [54] istinadən

$$\sigma_r \equiv 0 \quad (7.10.4)$$

qəbul edərək, yerinə yetirəcəyik. Onda (7.10.2)-nin birinci tənliyindən alırıq:

$$\varepsilon_r = -\frac{C_{13}^E}{C_{33}^E} (\varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi) + \frac{e_{33}}{C_{33}^E} E_r \quad (7.10.5)$$

Sferik koordinat sistemində deformasiya və yerdəyişmələr arasında əlaqəni müəyyən edən Koşi münasibətləri [105] belədir:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right); \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} (u_r + u_\theta \operatorname{ctg} \theta) \quad (7.10.6)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}$$

Belə ki, u_r və u_θ - yerdəyişmə vektorunun radial r və meridional θ - koordinatları üzrə komponentləridir. Kirxhof-Lyav hipotezini qəbul edərək yerdəyişmə vektorunun komponentləri üçün aşağıdakı ifadələrə gəlirik.

$$u_r = w(\theta, t) \quad u_\theta = v(\theta, t) + z\beta(\theta, t) \quad (7.10.7)$$

Harada ki, $z = r - r_c$, $\beta = \frac{1}{r_c} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$, $r_c = \frac{r_e + r_2}{2}$ - örtüyün

ortalıq səthinin radiusudur, t - zaman koordinatı, v və w -

təyin olunacaq naməlum funksiyalardır. (7.10.7)-ni (7.10.6)-da yazdıqdan sonra sıfırdan fərqli deformasiyalar üçün alırıq:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{1 + \frac{z}{r_c}} \left[\frac{1}{r_c} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) + \frac{r}{r_c^2} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (7.10.8)$$

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{1 + \frac{z}{r_c}} \left[\frac{1}{r_c} (v \operatorname{ctg} \theta + w) + \frac{z}{r_c^2} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \operatorname{ctg} \theta \right]$$

(7.10.3) – (7.10.7) münasibətlərinə əsasən (7.10.2) hal tənlilikləri aşağıdakı şəkllə düşürlər:

$$\sigma_{\theta\theta} = c_1 \varepsilon_{\theta} + c_2 \varepsilon_{\varphi} + e \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \sigma_{\varphi\varphi} = c_2 \varepsilon_{\theta} + c_1 \varepsilon_{\varphi} + e \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (7.10.9)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{e_{15}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$$

$$D_r = e(\varepsilon_{\theta} + \varepsilon_{\varphi}) - \varepsilon_s \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad D_{\theta} = -\frac{\varepsilon_{11}^s}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$$

Belə ki, burada:

$$c_1 = C_{11}^E \left(1 - \frac{C_{13}^E C_{13}^E}{C_{11}^E C_{33}^E} \right) \quad c_2 = C_{12}^E \left[1 + \frac{(C_{13}^E)^2}{C_{12}^E C_{33}^E} \right]$$

$$e = e_{1311}^E \left(1 - \frac{e_{33}^E e_{13}^E}{e_{13}^E e_{33}^E} \right) \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}^S \left[1 + \frac{(C_{13}^E)^2}{\varepsilon_{33}^S C_{33}^E} \right] \quad (7.10.10)$$

(7.10.9)-a daxil olan ε_{θ} və ε_{φ} deformasiyaları (7.10.8) düsturları ilə ifadə olunurlar.

Gərginlik vəziyyətinin inteqral xarakteristikaları – qüvvələr N_{θ} , N_{φ} , momentlər M_{θ} , M_{φ} və kəsici qüvvə Q_{θ} - aşağıdakı düsturlarla [105] hesablanırlar

$$N_{\theta} = \int_{-h}^h \sigma_{\theta\theta} \left(1 + \frac{z}{r_c}\right) dz = \frac{2h}{r_c} c_1 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) + v(\text{vctg}\theta + w) \right] + N_e$$

$$N_{\varphi} = \int_{-h}^h \sigma_{\varphi\varphi} \left(1 + \frac{z}{r_c}\right) dz = \frac{2h}{r_c} c_1 \left[v \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) + (v \text{ctg}\theta + w) \right] + N_e$$

$$M_{\theta} = \int_{-h}^h \sigma_{r\theta} \left(1 + \frac{z}{r_c}\right) z dz = \frac{2}{3} \frac{h^3}{r_c^2} c_1 \times \\ \times \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + v \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \text{ctg}\theta \right] + M_e$$

$$M_{\varphi} = \int_{-h}^h \sigma_{r\theta} \left(1 + \frac{z}{r_c}\right) z dz = \frac{2}{3} \frac{h^3}{r_c^2} c_1 \times \\ \times \left[v \frac{\partial}{\partial \theta} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \text{ctg}\theta \right] + M_e$$

$$Q_{\theta} = \int_{-h}^h \sigma_{r\theta} \left(1 + \frac{z}{r_c}\right) dz \quad (7.10.11)$$

Burada

$$N_e = e(\varphi^+ - \varphi^-) + \frac{eh}{r_c} \left(\varphi^+ + \varphi^- - \frac{1}{h} \int_{-h}^h \varphi dz \right) \quad (7.10.12)$$

$$M_e = \left(\varphi^+ - \varphi^- - \frac{1}{h} \int_{-h}^h \varphi dz \right) - \frac{eh^2}{r_c} \left(\varphi^+ + \varphi^- - \frac{2}{h^2} \int_{-h}^h \varphi z dz \right)$$

$h = r_2 - r_c = r_c - r_1$, φ^+ , φ^- örtüyün xarici ($z=h$) və daxili ($z=-h$) səthlərindəki potensialların qiymətləridir, $\nu = \frac{c_2}{c_1}$ - Puasson əmsalıdır.

Həllədiçi tənlikləri çıxarmaq üçün qüvvə və momentlərə sferik örtüyün hərəkət tənliklərini [105] ödətmək lazımdır. Onda alırıq:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta Q_\theta) - (N_\theta - N_\varphi) + r_c \rho_z &= 2\rho r_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + (N_\theta - N_\varphi) \operatorname{ctg} \theta - Q_\theta + r_c \rho_\theta &= 2\rho r_c \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (7.10.13) \\ Q_\theta &= \frac{1}{r_c} \left[\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + (M_\theta - M_\varphi) \operatorname{ctg} \theta \right] \end{aligned}$$

ρ - pyezokeramik materialın sıxlığı, ρ_z , ρ_θ - səthə təsirin komponentləridir.

Yuxarıda göstərilən münasibətləri dielektriklər üçün elektrostatika tənlikləri [82, 98] ilə tamamlasaq

$$\operatorname{div} \bar{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta D_\theta) = 0 \quad (7.10.14)$$

pyezokeramik nazik sferik örtüyün bağlı elektrostatik rəqslərini ifadə edən tənliklərin tam sistemini tapırıq. Sərbəst dəyişənlər qismində v , w yerdəyişmələrini və elektrostatik φ potensialını götürsək (7.10.11), (7.10.13) (7.10.9) və (7.10.14)-ə əsasən alırıq:

$$\begin{aligned}
& \frac{\hbar^2}{3}(\nabla + 1 - \nu)(\nabla \nu - \nabla^2 \mathbf{w}) - (1 + \nu)(\nabla \nu + 2\mathbf{w}) + \frac{\mathbf{r}_c}{2\hbar c} \mathbf{P}_z = \\
& = \frac{\rho \mathbf{r}_c^2}{c_1} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} - \frac{e}{2c_1} (\nabla^2 - 2) \left(\varphi^+ - \varphi^- - \frac{1}{\hbar} \int_{-\hbar}^{\hbar} \varphi \mathbf{d}z \right) + \quad (7.10.15) \\
& + \frac{e}{\hbar c_1} \nabla^2 \int_{-\hbar}^{\hbar} \varphi \bar{z} \mathbf{d}z - \frac{e}{2\hbar c_1} (\bar{\hbar}^2 \nabla^2 - 2) (\varphi^+ + \varphi^-) \\
& - \frac{\bar{\hbar}^2}{3} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 + 1 - \nu) \mathbf{w} + \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla \nu + (1 - \nu) \nu + (1 + \nu) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \theta} + \\
& + \frac{\mathbf{r}_c}{2\hbar c_1} \rho_\theta = \frac{\rho \mathbf{r}_c^2}{c_1} \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} - \frac{e}{2\hbar c_1} \frac{\partial}{\partial \theta} (\varphi^+ - \varphi^-) - \\
& - \frac{e}{c_1} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\varphi^+ + \varphi^- - \frac{1}{\hbar} \int_{-\hbar}^{\hbar} \varphi \mathbf{d}\bar{z} - \frac{1}{\hbar} \int_{-\hbar}^{\hbar} \varphi \bar{z} \mathbf{d}z \right) \\
& \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{r}}} \left(\bar{\mathbf{r}}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\mathbf{r}}} \right) + \frac{\varepsilon_{11}^S}{\varepsilon_3} \nabla^2 \varphi = \frac{e}{\varepsilon_3} (\nabla^2 + 2) \mathbf{w} + 2\bar{\mathbf{r}} (\nabla \nu - \nabla^2 \mathbf{w})
\end{aligned}$$

harada ki,

$$\begin{aligned}
\nabla &= \frac{\partial(\dots)}{\partial \theta} + \text{ctg} \theta (\dots) & \nabla^2 &= \frac{\partial^2(\dots)}{\partial \theta^2} + \text{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\
\bar{\mathbf{h}} &= \frac{\mathbf{h}}{r_c} & \bar{\mathbf{z}} &= \frac{\mathbf{z}}{r_c} & \bar{\mathbf{r}} &= \frac{\mathbf{r}}{r_c}
\end{aligned} \quad (7.10.16)$$

ω dairəvi tezlikli qərarlaşmış rəqsələr üçün (7.10.15) sisteminin həllini aşağıdakı şəkildə axtaraq:

$$\begin{aligned}
\nu(\theta, t) &= e^{i\omega t} \nu_\lambda \mathbf{P}_\lambda(\cos \theta) \\
\mathbf{w}(\theta, t) &= e^{i\omega t} [\mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_\lambda \mathbf{R}_\lambda(\cos \theta)] \\
\varphi(\bar{\mathbf{r}}, \theta, t) &= e^{i\omega t} [\varphi_0(\bar{\mathbf{r}}) + \varphi_\lambda(r) \mathbf{P}_\lambda(\cos \theta)]
\end{aligned} \quad (7.10.17)$$

Burada $P_\lambda(\cos\theta)$ aşağıdakı münasibətləri ödəyən Lejandr funksiyalarıdır

$$\nabla^2 P_\lambda(\cos\theta) = \mu P_\lambda(\cos\theta) \quad \nabla P_\lambda^{(1)}(\cos\theta) = -\mu P_\lambda(\cos\theta)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 P_\lambda(\cos\theta) = \mu^2 P_\lambda(\cos\theta) \quad \nabla^2 \nabla P_\lambda^{(1)}(\cos\theta) = -\mu^2 P_\lambda(\cos\theta)$$

$$\mu = \lambda(\lambda + 1) \quad (7.10.18)$$

(7.10.17) ayrılışını (7.10.15)-in üçüncü tənliyində yazıb (7.10.17) bərabərliklərini və (7.10.1) sərhəd şərtlərini nəzərə alsaq radial $\varphi_0(\bar{r})$ və $\varphi_\lambda(\bar{r})$ funksiyaları üçün sərhəd məsələsi alarıq:

$$\frac{d}{d\bar{r}} \left(\bar{r}^2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \bar{r}} \right) = 2 \frac{e}{\varepsilon_3} w_0 \quad \varphi_0(\bar{r}_0) = V_0 \quad \varphi_0(\bar{r}_1) = V_0 \quad (7.10.19)$$

$$\frac{d}{d\bar{r}} \left(\bar{r}^2 \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \bar{r}} \right) - \frac{\varepsilon_{11}^s}{\varepsilon_3} \mu \varphi_\lambda = \frac{e}{\varepsilon_3} [(2 - \mu)w_\lambda + 2\bar{r}\mu(w_\lambda - v_\lambda)]$$

$$\varphi_\lambda(\bar{r}_\lambda) = 0 \quad \varphi_\lambda(\bar{r}_2) = 0 \quad (7.10.20)$$

Bu məsələlərin həllərinin tapılması elementardır. Nəticədə potensial üçün radial funksiyalar verilmiş elektrostatik potensiallar fərqi V_0 və meridional koordinat xətti boyunca yerdəyişmələrin ayrılışının naməlum əmsalları ilə yəni w_0 , w_λ və v_λ ilə ifadə olunurlar.

Həllərin uyğun düsturları sadə olsalar da kifayət qədər geniş yazı həcminə malikdirlər. Bu səbəbdən onları yazmırıq. Örtüyün nisbi qalınlığının kiçikliyi nəzərə alsaq və dəqiq həlli \bar{z} -in dərəcələrinə görə sıraya ayırısaq \bar{z}^2 dəqiqliyi ilə taparıq:

$$\varphi_0(\bar{r}) = - \left[V_0 \frac{\bar{z}}{\bar{h}} + \frac{V_0}{\bar{h}} (\bar{h}^2 - \bar{z}^2) + \frac{e}{\varepsilon_3} w_0 (\bar{h}^2 - \bar{z}^2) \right] \quad (7.10.21)$$

$$\varphi_\lambda(\bar{r}) = - \frac{e}{\varepsilon_3} \left[\frac{2 + \mu}{2} w_\lambda - \mu v_\lambda \right] (\bar{h}^2 - \bar{z}^2)$$

Naməlum w_0 , v_λ və v_λ kəmiyyətlərini tapmaq üçün (7.10.17) ayrılışını (7.10.15)-in birinci iki tənliyində yazmaq lazımdır (bu zaman həyəcan elektrik vasitəsi ilə verildiyindən $P_z = P_\theta = 0$ götürülür) və bundan sonra (7.10.18), (7.10.21) bərabərliklərindən istifadə etmək lazımdır. Onda \bar{h}^2 tərtibli hədləri vahidlə müqayisədə nəzərə almayıb naməlum w_0 funksiyasını

$$w_0 = \frac{2V_0}{\bar{h}} \frac{e}{c_1} \frac{1}{2(1-v) - \gamma^2} \quad (7.10.22)$$

şəklində tapırıq, v_λ ilə w_λ məchulları üçün isə aşağıdakı cəbri tənliklər sistemini alırıq:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\bar{h}^2}{3}(1+\delta)\mu^2 - \frac{\bar{h}^2}{3}(1-v-4\delta)\mu + 2(1+v) - \gamma^2 \right] w_\lambda - \\ & \quad - \left[\frac{\bar{h}^2}{3}(1+2\delta)\mu^2 - (1+v)\mu \right] v_\lambda = 0 \\ & - \left[\frac{\bar{h}^2}{3}(1+2\delta)\mu + 1+v \right] w_\lambda + \left[\mu - (1-v+\gamma)^2 \right] v_\lambda = 0 \end{aligned} \quad (7.10.23)$$

burada $\gamma^2 = \frac{\rho\omega^2 r_0^2}{c_1}$; $\delta = \frac{c^2}{c_1 \epsilon_3}$.

(7.10.23) sisteminin həllinin varlığının zəruri şərti onun detertnantının sıfıra bərabər olmasıdır.

Determinantın açılışının nəticəsi olaraq Lejandr funksiya-larının tərtibini təyin edən μ parametrləri üçün kub tənlik tapırıq:

$$\begin{aligned} & \mu^3 - \frac{4 + (1+3v)\delta + (1-\delta)\gamma^2}{1+\delta} \mu^2 + 3 \frac{1-v^2 - \gamma^2}{\bar{h}^2(1+\delta)} \mu - \\ & - 3 \frac{2(1-v^2) + (1+3v)\gamma^2 - \gamma^4}{\bar{h}^2(1+\delta)} = 0 \end{aligned} \quad (7.10.24)$$

Bu tənliyin köklərinə μ_i ($i=1,2,3$) deyib (7.10.23)-ün ikinci tənliyindən

$$\frac{v_{\lambda_j}}{w_{\lambda_j}} = \frac{\bar{h}(1+2\delta)\mu_j + 3(1+v)}{3[\mu_j - (1+v+\gamma^2)]} \quad (7.10.25)$$

nisbətini alırıq və (7.10.15) bağlı sistemin yekun həlli aşağıdakı kimi yazılır:

$$\begin{aligned} v &= e^{i\omega t} \frac{eV_0}{\bar{h}c_1} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 \frac{v_{\lambda_j}}{w_{\lambda_j}} P_{\lambda_j}^{(1)}(\cos \theta) \\ w &= e^{i\omega t} \frac{eV_0}{\bar{h}c_1} \left[\frac{2}{2(1+v)-\gamma^2} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 L_j R_{\lambda_j}(\cos \theta) \right] \\ \varphi &= -e^{i\omega t} 2V_0 \left[\frac{\bar{z}}{2\bar{h}} + \frac{\bar{h}^2 - \bar{z}^2}{2\bar{h}} + \delta \frac{\bar{h}^2 - \bar{z}^2}{\bar{h}} \frac{1}{2(1+v)-\gamma^2} - \right. \\ &\quad \left. - \delta \frac{\bar{h}^2 - \bar{z}^2}{4\bar{h}} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 L_j \left(2\mu_j \frac{v_{\lambda_j}}{w_{\lambda_j}} P_{\lambda_j}(\cos \theta) \right) \right] \end{aligned} \quad (7.10.26)$$

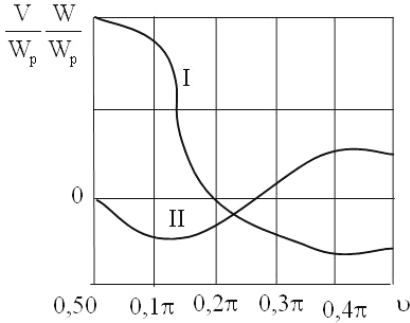
Üç ixtiyari integral sabitləri L_j ($j=1,2,3$) örtüyün qıraqlarında $v=v_0$ sərhəd şərtindən tapılır. Hesabat PZİ-11 materialından hazırlanmış yarımsfera üçün yerinə yetirilmişdir. Onun kənarları $\left(\theta = \frac{\pi}{2} \right)$ yükdən azaddır, nisbi qalınlığı $\frac{2h}{r_c} = 0,05$.

Birinci rezonans tezliyinə yaxın olan $\gamma=0,83$ tezliyi üçün w (müstəvidən kənara çıxma) inhirafının, v - meridional yerdəyişmələrin və ortalıq səth üzərində elektrostatik potensial funksiyası φ -nin qiymətləri hesablanıb.

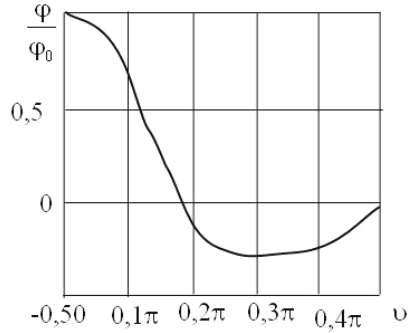
Bu kəmiyyətlərin nisbi qiymətinin dəyişmə qrafikləri şəkil 7.10.2-də göstərilib. Orada I əyrisi $\frac{w}{w_p}$ nisbətinə II əyrisi isə

$\frac{v}{w_p}$ nisbətlərinə uyğundurlar.

Şəkil 7.10.3 $\frac{\varphi}{\varphi_0}$ nisbətində cavab verir, həm də w_p və φ_p w əyilməsinin (müstəvidən çıxmanın) və örtüyün polyusunda ($\nu=0$) φ potensialının qiymətləridir.



Şəkil 7.10.2.



Şəkil 7.10.3.

Birinci ölçüsüz γ rezonans tezliyinin qiymətlərinə və örtüyün meridional istiqamətdə yerdəyişmənin özünü aparmasının xarakterinə görə [102]-nin nəticələri ilə yaxşı üst-üstə düşmə müşahidə olunur.

ӘДӘБИҮҮАТ

1. Аквивис М.А., Гольдберг В.В. – Тензорное исчисление. М. «Наука», 1959.
2. Ананьева А.А. – Керамические приемники звука. М. «Наука», 1961.
3. Богданов С.В., Вуль Б.М., Тимонин А.М. – О связи между диэлектрическими, пьезоэлектрическими и упругими свойствами поликристаллического керамики и монокристалла – Изв. АН СССР сер. Фаз. тех. н. XXI, №3, 1952.
4. Бондарев В.Л. – Основы минералогии и кристаллографии. М. «Высшая школа», 1972.
5. Бондаренко В.С., Веневцев Ю.Н., Ждаков Г.С., Стемберг Н.С., Чкалова В.В. – Новая пьезокерамика. Сб. докл. Всесоюз. науч. тех. конференции по применению ультразвука в промышленности. ЦИНТИ электрической промышленности и приборостроение. М. 1960.
6. Бородин В.З. – Влияние одностороннего давления на процессе поляризации в сегнетокерамике. Изв. АН СССР сер. физ. тех. н. т. XXIV, №10 .М.1960.
7. Бронникова Е.Г., Ставицкий Н.М. – Промышленные пьезокерамики и их применения в радиотехническое производство. Б.Т.И. МРП вып. 3 1956.
8. Борисейко В.Л. – Связанные электроупругие колебания толстостенной пьезокерамической сферы в сжимаемой жидкости. В кн. «Тепловые напряжения в элементах конструкций». Вып. 12. Киев 1972.
9. Борисейко В.Л., Улитко А.Ф – Связанные электроупругие колебания толстостенной пьезокерамической сферы. В кн. «Тепловые напряжения в элементах конструкций». Вып. 11. Киев 1971.
10. Борисейко В.Л., Улитко А.Ф – Электроупругие колебания толстостенной пьезокерамической сферы. В кн.

- «Тепловые напряжения в элементах конструкций». Вып. 11. Киев 1974, с,86-89.
11. Беклемишев Д.В. – Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М. «Наука». 1984.
 12. Борисенко А.И, Тарапов И.Е. – Векторный анализ и начала тензорного исчисления. Харьков, Из-во ХГУ. «Высшая школа», 1978.
 13. Веневцев Ю.Н., Жданов Г.С., Соловьев С.П., Зубьев Ю.А. – Кристаллография. Вып. 3. 1958. стр. 473.
 14. Веневцев Ю.Н., Жданов Г.С., Соловьев С.П., Зубьев Ю.А. – Кристаллография. Вып. 1-6. 1958. стр. 751.
 15. Веневцев Ю.Н. – Сегнетомагнетика. –М. «Наука», 1982.
 16. Вуль Б.М. – Вещество с высокой и сверх высокой диэлектрической проницаемости. «Электричество», 1946 №3.
 17. Вуль Б.М., Верещагин Д.Ф. – Зависимость диэлектрической проницаемости титаната бария от давления. ДАН СССР 1945, стр. 9-48.
 18. Вуль Б.М., Гольдман И.М. – Диэлектрическая проницаемость титаната бария от напряженности в переменном токе. ДАН СССР 1945, т. 49, №3.
 19. Вовкодов И.П. – Радиальные колебания тонкой пьезо-керамической пластинки. В кн. «Тепловые напряжения в элементах конструкций». Вып. 15, Киев 1975.
 20. Глозман И.А. – Пьезокерамические материалы в электронной технике. «Энергия» 1965.
 21. Глозман И.А. – Пьезокерамика. «Энергия» 1967.
 22. Глозман И.А. – Пьезокерамические ультразвуковые излучатели. «Машиностр.промыш-ость» 1968.
 23. Глозман И.А. и др. – Способ получения пьезокерамических материалов. Авт.св. №194157. Бюл. Изоб. 1967, №8.
 24. Грибовский П.О. – Керамические твердые схемы. М. «Энергия». 1971.

25. Гумилевский С.А., Луговский Т.Л., Киршон В.М. – Кристаллография и минерология (уч.пособ). М. «Выс.школа», 1972.
26. Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. – Линейная алгебра и многомерная геометрия. М. «Наука», 1970.
27. Желудев И.С. – Электрические кристаллы. М. «Наука», 1969.
28. Желудев И.С. – Основы сегнетоэлектричества. М. «Атомиздат». 1973.
29. Желудев И.С. – Физика кристаллических диэлектриков. М. «Наука». 1968.
30. Зальманг Г. – Физико-химические основы керамики. Госиздат. 1959.
31. Зайцев В.И. Пасынков и др. – Диэлектрические свойства поляризованной керамики в сильных переменных электрических полях. Изв. АН. СССР. Сер. ф.т Т, т. 14, 1967, №11, стр. 1357.
32. Ильин Г.С. – Керамические пьезоэлементы. Ленинградский дом науч.-тех. пропаганды. Серия «Электрические методы в обработках металлов. Вып. 2 1963.
33. Кенгери У.Д. – Введение в керамику. Из.-во лит. по строительству, 1964.
34. Ковальев В.А. – Основные уравнения механики сплошной среды. 2 в. Горький, 1979.
35. Кулиев Ю.Н., Максудов Ф.Г., Гаджиев В.Д., Мотин Л.Е. – Основы колебаний однослойных и многослойных пьезокерамических преобразователей. Баку. Изво «Элм», 1982.
36. Кулиев Ю.Н., Подобед В.С., Чегис И.Л. – Расчет пьезокерамических трансформаторов кольцевого и дискового типа и их эквивалентных схем. Материалы семинара «Пьезо и сегнетоэлектрики». Киев. 1971.
37. Кулиев Ю.Н., Подобед В.С. – Симметричные колебания кольцевых пластинок из пьезокерамического материала. Материалы VII Всесоюз. Акустич. Конф. Л. 1971.

38. Кулиев Ю.Н., Подобед В.С. – Об изгибных колебаниях слоистых преобразователей. Материалы VII Всесоюз. Акустич. Конф. Л. 197.
39. Кулиев Ю.Н., Конопкин В.Ф. – Некоторые вопросы расчета сейсмических пьезоприемников дискового типа. В сб. «Вопросы механики и прикладной математики». Ростов, 1975.
40. Курчатов И.В. – Сегнетоэлектрики. М. «Машгиз», 1963.
41. Курчатов И.В. – Избранные труды (в 3-х томах). Т.1. М. «Наука», 1982.
42. Кудрявцев Л.Д. – Краткий курс математического анализа. М. «Наука». 1989.
43. Кэди У. – Пьезоэлектричество и его практическое применение. Из-во ИЛ. 1969.
44. Лавриненко В.В. – Модель пьезоэлектрика. Труды семинара МДНТП, Киев, 1969.
45. Лазуткин В.Н. – Резонансные частоты пьезокерамических колец с радиальной поляризацией. Докл. На IV Всесоюз. Акустич. Конф.. Л. 1968.
46. Лазуткин В.Н., Махайлов А.И. – Многоконтурные эквивалентные схемы и коэффициенты электромеханической связи пьезорезонаторов. Материалы семинара «Пьезо и сегнетоматериалы и их применение». М. МДНТИ, 1972.
47. Лазуткин В.Н., Цыганов Ю.В. – К вопросу о радиальных колебаниях пьезокерамических дисков конечной толщины. Докл. Всесоюз. Акустич. Конф. Л. 1968.
48. Ляв А. – Математическая теория упругости. М. ОНТИ. 1935.
49. Мак-Коннел Н. Дж. – Введение в тензорный анализ. М. Госиздат Ф.Т.Л. 1963.
50. Мухелишвили Н.И. – Некоторые основные задачи математической теории упругости. М. «Наука». 1966.
51. Мəммədov X. Kalsium silikatların və hidrosilikatların kristalokimyası. Azər.SSR EA Kimya İnstitutu, 1965.

52. Мэзон У. – Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в электроакустике. Из-во. И.Л. 1962.
53. Новацкий В. – Теория упругости М. «Мир», 1975.
54. Новожилов В.В. – Теория упругости. Л. «Сифроиз», 1939.
55. Талацкий А. М – Техническая керамика. Госэнергоиздт., 1959.
56. Положий Г.Н. – Уравнение математической физики. М. «Выс. школа», 1964.
57. Плужников В.М., Семенов В.С. – Пьезокерамические твердые схемы. –М., «Энергии», 1971.
58. Попов Г.М. Шафрановский – Кристаллофария керамика. М. «Сов. рад.», 1971.
59. Рашевский – Риманова геометрия и тензорный анализ. М. «Госмехиздат», 1953.
60. Смажевская Е.Г., Фельдма Н.Б. – Пьезокерамическая керамика. М. «Сов.рад.», 1971.
61. Соболев – Уравнения математической физики. М. «Наука», 1966.
62. Смуров А.А. – Электромеханика высокого напряжения и передача энергии. Госнаучтех. Изаднии. 1932.
63. Тихонов А.Н., Самарский А.А. – Уравнения математической физики. Госиздат ТТЛ. М. «Главиздат», 1953.
64. Тимошенко С.П. – Теория упругости. М. ОНТИ, 1937.
65. Улитко А.Ф. – К теории колебания пьезокерамических тел. В сб. «Тепловые напряжения в элементах конструкций». Вып. 15, Киев, 1976.
66. Фисенко Е.Г. и др. – Поляризация пьезокерамики. Из-во Ростов. Ун-тема. 1968.
67. Фисенко Е.Г. – Семейство перовскит и сегнетоэлектричество. М. «Наука». 1972.
68. Фисенко Е.Г. – Физика кристаллических диэлектриков. М. «Наука», 1968.
69. Фойгт У. – Справочник по кристаллографии. Берлин. 1910.

70. Харкович А.А. – «Преобразователи». М. «Машгаз». 1948.
71. Шубников А.В. – Возбуждение изгибных колебаний металлических пластин с помощью полукристаллического титаната бария. ЖТФ. Т XXIV. В. 80, 1954, стр. 1467-1478.
72. Шубников А.В. – У истоков кристаллографии. М. «Наука». 1972.
73. Шубников А.В. – Проблемы кристаллографии. «Наука». 1968.
74. Шубников А.В. – Проблемы современной кристаллографии. «Наука». 1975.
75. Шубников А.В. – Основы кристаллографии. М-Л. 1940.
76. Шубников А.В. – Избранные труды по кристаллографии. «Наука». 1975.
77. Шубников А.В. – Колебания текстурных пьезокерамических пластинок из сегнетовой соли. Ж.Т.Ф. – 21. 962. 1951.
78. Шубников А.В. – Пьезокерамические текстуры. М-Л. 1946.
79. Шубников А.В. – Зарождение и рост кристаллов. М. «Наука». 1969.
80. Шубников А.В., Флинт Е.Е., Бокий Г.Б. – Основы кристаллографии. Из-во. АН СССР. 1990.
81. Лазуткин В.Н., Цыганов Ю.В. – Аксиально-симметричные колебания и электрический импеданс пьезокерамических колец с радиальной поляризацией. Акустический журнал. 1971. том 17. №3.
82. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. – Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях. В кн. «Физическая акустика». Под ред. Мэзона У. 1 ч. А.М. «Мир». 1966.
83. Гутин Л.Я. – Магнитостикционные излучатели и приемники. Ж. техн.физ. 1945. 15. 924.

84. Рудницкий С.И., Шарапов В.М., Шульга Н.А. – Колебания дискового бумерфного преобразателя типа метала – пьезокерамик. Прикл.механика. 1990. т. 26. №10.
85. Рудницкий С.И., Болкисев А.М., Шульга Н.А. – О применимости прикладных теорий колебаний пьезо-керамических оболочек. Прикл. Механика. 1986. т. 22, №9, 117-120.
86. Григолюк Э.И. – О выборе исходной поверхности в теории неоднородных оболочек. Изв. АН СССР. Отд.тех. наук. 1956, №8. с. 120-121.
87. Борисейко В.А., Гриченко В.Т., Улитко А.Ф. – Соотношение электроупругости для пьезокерамических оболочек вращения. Прикл. Мех. 1976. т. 12, №2. с. 26-33.
88. Mindlin R.D. High frequency vibrations of piezoelectric crystal plates. Int J. Solids and Struct. 1972 – 8. N7. p. 895-906.
89. Болкисев А.М., Ефимова Т.Л., Шульга Н.А. – Колебания пьезокерамического полого цилиндра при механическом нагружении. Прик. Мех. 1985. т. 21. №9.
90. Годунов И.К. – И численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнения. Успехи мат. наук. 1961. т.16.№3,стр.71.
91. Лоза И.А. – Распространение неосесимметричных волн в полом пьезокерамическом цилиндре с радиальной поляризацией. Прикл. мех. 1985. т. 21. №1.
92. Лазуткин В.И. – Колебания полого пьезокерамического шара – Акус. Журн. 1971. т. 17, №4.
93. Шульга Н.А. – Радиальные электроупругие колебания пьезокерамического полого шара. Прикл. мех. 1990. т. 26, №8.
94. Лазуткин В.И. – Резонансные частоты пьезокерамических колец с радиальной поляризацией. Докл. Всес. Акустической Конф. г. 3-7, М. 1968.

95. Лоза И.А., Шульга Н.А. – Осесимметричные колебания полого шара при радиальной поляризации. Прикл. мех. 1984. т. 20, №2.
96. Коломиец Г.А., Улитко А.Ф. – Некоторые граничные задачи электроупругих колебаний пьезокерамических тел. Тр. VI Всесоюз. Акустич. Конф. М. «Наука», 1968. стр. 27-29.
97. Коломиец Г.А., Улитко А.Ф. – Связанные электроупругие колебания пьезокерамических тел. В кн. Тепловые напряжения в элементах конструкции. Киев. 1969. в. 8. стр. 15-24.
98. Борисейко В.Л., Улитко А.Ф. – Связанные электроупругие колебания толстостенной пьезокерамической сферы в сжимаемой жидкости. В кн. «Тепловые напряжения в элементах конструкций». Киев 1972, Вып. 12, счтр. 111-115.
99. Борисейко В.Л., Улитко А.Ф. – Осесимметричные колебания тонкой пьезокерамической сферической оболочки. Прикл.мех. 1974. т. 10, №10, стр. 3-10.
100. Коломиец Г.А., Улитко А.Ф. – Связанные электроупругие колебания пьезокерамических тел. В кн. Тепловые напряжения в элементах конструкций. Киев 1969. в. 8, стр. 15-24.
101. Коломиец Г.А., Улитко А.Ф. – Связанные электроупругие колебания толстостенных пьезокерамических цилиндров. В кн. Тепловые напряжения в элементах конструкций. Киев 1969. в. 9. стр. 5-13.
102. Drumheller D.S., Kalnins A. – Dynamic shell theory for ferroelectric ceramics – IASA, 1970. 47. N5, p. 1343-1353.
103. Haskins I.F. Welsh I.L. – Vibrations of ferroelectric cylindrical shell with transverse isotropy – IASA. 1957, 29, p. 729-734.
104. Martin G.E. – Vibrations of longitudinally polarisex ferroelectric cylindrical tubes – IASA 1963, 35, p. 510-520.

105. К.И.Гахраманов, Г.Г.Сафаров. Устойчивост пластического течения в полосе при сжатии со сдвигом. Изв. АН Азерб. ССР. Сер. ФТМН, №4, Баку 1970.
106. К.И.Гахраманов, Г.Г.Сафаров и др. Исследование виброзащитного свойства жидкого основания. Изв. АН Азерб. ССР. Сер. ФТМН №4, Баку, 1970.
107. К.И.Гахраманов, Г.Г.Сафаров. Движение гетерогенных смесей в турбулентном пограничном слое. Рукопис. Деп. ВИНТИ №1533-83. деп. 29.03.1983. стр. 19.
108. K.İ.Qəhrəmanov, N.H.Səfərov və b. Mürəkkəb konturlu müxtəlif ellips və çevrələrdən ibarət lövhənin məcburi rəqsləri. Nəzəri və tətbiqi mexanika, №3, Bakı-2008 il.
109. Г.Г.Сафаров. К.И.Гахраманов и др. Распространения малых упругих волн в кривых стержнях. Elmi-əsərlər – Fundamental elmlər. Bakı 2012, №3, cild XI (43).
110. К.И.Гахраманов, Г.Г.Сафаров. Неососимметричные колебания полого цилиндрического биморфа типа пьезокерамика-металл. Elmi əsərlər-Fundamental elmlər. Bakı 2013 il. №1. cild x11(45). səh. 13-19
111. Г.Г.Сафаров. Ососимметричные собственные колебания полого сферического биморфа типа пьезокерамика-металл. Elmi əsərlər-Fundamental elmlər. Bakı. №2, 2013 cild 2 səh. 127-133.
112. Г.Г.Сафаров. О собственных малых колебаниях асимметричного биморфа типа пьезокерамика-металл в виде прямоугольной пластинки защемленными краями. Elmi əsərlər – Fundamental elmlər. Bakı. №2, 2014 cild 2 səh. 77-84.

Hüseyn Heydər oğlu Səfərov
Kamal İsrail oğlu Qəhrəmanov

Müxtəsər kristalloqrafiya və pyezoelastiklik

Mətbəənin direktoru: Fuad HÜSEYN
Texniki redaktor: Kəmalə FƏRHADOVA
Korrektor: Cavid RƏSULZADƏ
Dizayn: Vüqar Nağıyev

Kitab “AfpoliqrAF” mətbəəsində çap olunmuşdur.

Yığılmağa verilmişdir: 22.01.2016

Çapa imzalanmışdır: 22.02.2016

Fiziki çap vərəqi: 24

Formatı: 60×90 $1/16$

Tiraj: 200