Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2008. Том 49, № 6

УДК 517.984.46

ФОРМУЛА СЛЕДА ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Н. М. Асланова

Аннотация. Получена формула регуляризованного следа для операторного уравнения Штурма — Лиувилля с граничным условием, зависящим от спектрального параметра.

Ключевые слова: гильбертово пространство, самосопряженный оператор, дискретный спектр, регуляризованный след, ядерный оператор.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Пусть также $L_2 = L_2(H,(0,\pi)) \oplus H$, где $L_2(H,(0,\pi))$ — гильбертово пространство вектор-функций $y(t)$ $(t \in (0,\pi))$, для которых $\int\limits_0^\pi \|y(t)\|_H^2 dt < \infty$. Скалярное произведение для $Y, Z \in L_2$ $(Y = \{y(t), y(\pi)\},\ Z = \{z(t), z(\pi)\})$ определяется как

$$(Y,Z) = \int\limits_0^\pi (y(t), z(t))_H\, dt + (y(\pi), z(\pi))_H.$$

Рассмотрим задачу

$$l[y] = -y'' + Ay + q(t)y = \lambda y, \tag{1}$$

$$y(0) = 0, \tag{2}$$

$$y'(\pi) - \lambda y(\pi) = 0, \tag{3}$$

где A — самосопряженный положительно определенный оператор в H $(A \geq E$, E — тождественный оператор в $H)$, являющийся обратным для вполне непрерывного, $q(t)$ при каждом t — самосопряженный ограниченный оператор в H.

Предположим также, что операторная функция $q(t)$ слабо измерима, $\|q(t)\|$ как функция от t ограничена на $[0,\pi]$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) $q(t)$ имеет вторую слабую производную на отрезке $[0,\pi]$ и $q^{(l)}(t)$, $l = 0,1,2$, при каждом $t \in [0,\pi]$ являются ядерными самосопряженными операторами в H, т. е. $q^{(l)}(t) \in \sigma_1$, $[q^{(l)}(t)]^* = q^{(l)}(t)$;

2) функции $\|q^{(l)}(t)\|_1$, $l = 0,1,2$, ограничены на отрезке $[0,\pi]$;

3) $q'(0) = q'(\pi) = 0$;

4) $\int\limits_0^\pi (q(t)f, f)\, dt = 0$ при любом $f \in H$.

При $q(t) = 0$ уравнение (1) запишется в виде

$$l_0[y] = -y'' + Ay = \lambda y. \tag{1'}$$

С задачами (1′), (2), (3) и (1)–(3) в пространстве L_2 можно связать самосопряженные операторы L_0 и $L = L_0 + Q$ соответственно, где

$$L_0 : \{y(t), y(\pi)\} \to \{l_0[y], y'(\pi)\}, \quad Q : \{y(t), y(\pi)\} \to \{q(t)y(t), 0\}. \tag{4}$$

Как показано в работе [1], операторы L_0 и L имеют дискретный спектр. Пусть $\mu_1 \le \mu_2 \le \dots$ — собственные значения, $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ — соответствующие ортонормированные собственные вектор-функции оператора L_0 и $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$ — собственные значения оператора L.

Обозначим через $\gamma_1 \le \gamma_2 \le \dots$ собственные значения и через $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ ортонормированные собственные элементы оператора A в H.

Известно [1], что если

$$\gamma_j \sim a j^{\alpha} \quad \text{при } j \to \infty \quad (0 < a,\ \alpha > 2), \tag{5}$$

то

$$\lambda_n(L) \sim \mu_n(L_0) \sim d n^{\delta}, \tag{6}$$

где $\delta = \frac{2\alpha}{2+\alpha}$.

Пользуясь этой асимптотикой, так же, как и в [2], можно доказать, что существует последовательность натуральных чисел $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$, для которой справедливо неравенство

$$\mu_k - \mu_{n_m} \ge d\big(k^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} - n_m^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}\big), \quad k = n_m, n_m + 1, \dots. \tag{7}$$

Пусть

$$\mu^{(j)} = \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} \mu_k, \quad \lambda^{(j)} = \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} \lambda_k, \quad j = 1, 2 \dots,$$

где $n_0 = 0$.

Цель этой работы — вычисление суммы ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} (\lambda^{(j)} - \mu^{(j)})$, который называется *регуляризованным следом оператора* L_0. Сумма этого ряда, как будет показано ниже, не зависит от того, каким образом выбрана последовательность $n_1, n_2, \dots$, при котором верно неравенство (7).

Вычислению регуляризованного следа для скалярных дифференциальных операторов, являющегося обобщенным понятия следа матрицы, посвящено много работ. Впервые И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном получена формула для суммы разностей собственных значений двух регулярных операторов Штурма — Лиувилля. Эта работа получила многочисленные продолжения. Здесь приведем ссылки на статьи [3–10], где в различных случаях вычислены регуляризованные следы для скалярных операторов.

Регуляризованные следы операторов в абстрактной постановке рассматривались в [11–15] и др. Для дифференциальных операторов с операторными коэффициентами формулы следов исследованы, например, в [2, 16]. Более подробную библиографию можно найти в обзоре [15].

В настоящей статье рассматривается задача, отличающаяся от задачи в [2] краевым условием, содержащим спектральный параметр.

Пусть R_λ^0 и R_λ — резольвенты операторов L_0 и L. Учитывая асимптотику (6) и неравенство (7) и пользуясь техникой работы [6], можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $\|q(t)\|$ ограничена на отрезке $[0,\pi]$ и выполняется условие* (5). *Тогда при больших m имеет место равенство*

$$\sum_{n=1}^{n_m}(\lambda_n-\mu_n)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=l_m}\operatorname{Sp}\bigl(QR_\lambda^0\bigr)\,d\lambda,$$

где $l_m=\frac{1}{2}(\mu_{n_m+1}+\mu_{n_m})$, μ_{n_m}, $m=1,2,3,\dots,$ — *подпоследовательность, которая удовлетворяет неравенству* (7).

Поскольку QR_λ^0 — ядерный оператор и собственные вектор-функции $\psi_1(x)$, $\psi_2(x),\dots$ оператора L_0 образуют ортонормированный базис в L_2, то при больших значениях m

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}(\lambda^{(j)}-\mu^{(j)})&=\sum_{n-1}^{n_m}(\lambda_n-\mu_n)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=l_m}\operatorname{Sp}\bigl(QR_\lambda^0\bigr)\,d\lambda\\ &=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=l_m}\sum_{n=1}^{\infty}\bigl(QR_\lambda^0\psi_n,\psi_n\bigr)\,d\lambda\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\biggl[(Q\psi_n,\psi_n)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=l_m}\frac{d\lambda}{\lambda-\mu_n}\biggr]=\sum_{n=1}^{n_m}(Q\psi_n,\psi_n).\end{aligned}$$

Скалярное произведение рассматривается в L_2.

Ортонормированные собственные вектор-функции оператора L_0 имеют вид

$$\sqrt{\frac{4x_{j,k}}{2x_{j,k}\pi-\sin 2x_{j,k}\pi+4x_{j,k}\sin^2 x_{j,k}\pi}}\{\sin(x_{j,k}t)\varphi_j,\sin(x_{j,k}\pi)\varphi_j\}\tag{8}$$

($k=\overline{0,\infty}$, $j=\overline{1,\infty}$), где $x_{j,k}$ — корни уравнения (см. [1])

$$\operatorname{ctg} x\pi=\frac{\gamma_j+x^2}{x},\quad x=\sqrt{\lambda-\gamma_j}.\tag{9}$$

Известно, что собственные числа оператора L_0 распадаются на две серии: $\mu_{j,0}\sim\sqrt{\gamma_i}$ при $j\to\infty$, соответствующие мнимым корням уравнения (9), и $\mu_{j,k}=\gamma_j+x_{j,k}^2=\gamma_j+\eta_k$, где $\eta_k\sim k^2$, соответствующие вещественным корням уравнения (9).

Из теоремы 1, учитывая (4) и (8), получаем

$$\sum_{n=1}^{n_m}(Q\psi_n,\psi_n)=\sum_{n=1}^{n_m}\int\limits_0^\pi\frac{4x_{j_n,k_n}}{2x_{j_n,k_n}\pi-\sin 2x_{j_n,k_n}\pi+4x_{j_n,k_n}\sin^2 x_{j_n,k_n}\pi}\times\sin^2 x_{j_n,k_n}t(q(t)\varphi_{j_n},\varphi_{j_n})\,dt.$$

Обозначим $f_j(t)=(q(t)\varphi_j,\varphi_j)$. Из условия $\int\limits_0^\pi(q(t)\varphi_j,\varphi_j)\,dt=0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{n_m}(Q\psi_n,\psi_n)=-\sum_{n=1}^{n_m}\int\limits_0^\pi\frac{4x_{j_n,k_n}}{2x_{j_n,k_n}\pi-\sin 2x_{j_n,k_n}\pi+4x_{j_n,k_n}\sin^2 x_{j_n,k_n}\pi}\times\cos 2x_{j_n,k_n}t(q(t)\varphi_{j_n},\varphi_{j_n})\,dt.$$

Теорема 2. *Пусть выполняется условие* (5). *Если операторная функция $q(t)$ удовлетворяет условиям* 1–4 , *то справедлива формула*

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}(\lambda^{(j)}-\mu^{(j)})=-\frac{\operatorname{Sp}q(\pi)+\operatorname{Sp}q(0)}{4}.$$

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма. *Если операторная функция* $q(t)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1, *то*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{4x_{j.k}}{2x_{j.k}\pi-\sin 2x_{j.k}\pi+4x_{j.k}\sin^2 x_{j.k}\pi}\int_0^{\pi}\cos(2x_{j,k}t)f_j(t)\,dt\right|<\infty. \qquad (10)$$

Доказательство. Интегрируя дважды по частям и используя условие 3 для операторной функции $q(t)$, получаем

$$\int_0^{\pi}\cos(2x_{j,k}t)f_j(t)\,dt=\frac{1}{2x_{j,k}}\sin(2x_{j,k}t)f_j(t)|_0^{\pi}-\cdot\frac{1}{2x_{j,k}}\int_0^{\pi}\sin(2x_{j,k}t)f_j'(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2x_{j,k}}\sin(2x_{j,k}\pi)f_j(\pi)-\frac{1}{(2x_{j,k})^2}\int_0^{\pi}\cos(2x_{j,k}t)f''(t)\,dt. \qquad (10')$$

С учетом асимптотики $x_{j,k}\sim k+\frac{k}{\gamma_j+k^2}$ из последнего выражения вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{4x_{j.k}}{2x_{j.k}\pi-\sin 2x_{j.k}\pi+4x_{j.k}\sin^2 x_{j.k}\pi}\int_0^{\pi}\cos(2x_{j,k}t)f_j(t)\,dt\right|$$

$$=\mathrm{const}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)\left(O\left(\frac{1}{k^2}\right)f_j(\pi)+\int_0^{\pi}\frac{1}{(2x_{j,k})^2}\cos(2x_{j,k}t)f_j''(t)\,dt\right)\right|$$

$$\le \mathrm{const}\sum_{j=1}^{\infty}\left(|(q(\pi)\varphi_j,\varphi_j)|+\int_0^{\pi}|(q(t)\varphi_j,\varphi_j)|\,dt\right). \qquad (11)$$

По условию 2 $\|q^{(l)}(t)\|_1<\mathrm{const}$ $(l=0,1,2)$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty}|(q(t)\varphi_j,\varphi_j)|\le\|q^{(l)}(t)\|_1<\mathrm{const}\,.$$

По теореме Лебега знак суммы по j в неравенстве (11) можно внести под знак интеграла, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{4x_{j.k}}{2x_{j.k}\pi-\sin 2x_{j.k}\pi+4x_{j.k}\sin^2 x_{j.k}\pi}\int_0^{\pi}\cos(2x_{j,k}t)f_j(t)\,dt\right|<\infty. \qquad (12)$$

Рассмотрим внутренний ряд в (10) при $k=0$:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{4x_{j,0}}{2x_{j,0}\pi-\sin 2x_{j,0}\pi+4x_{j,0}\sin^2 x_{j,0}\pi}\cos(2x_{j,0}t)f_j(t)\,dt, \qquad (13)$$

соответствующий мнимому корню уравнения (9).

Из асимптотики $x_{j,0}\sim\sqrt{\gamma_j}-\frac{1}{2}$ $(j\to\infty)$ имеем (по условию (5) $\gamma_j\sim aj^{\alpha}$, $\alpha>2$)

$$\frac{4x_{j,0}}{2x_{j,0}\pi-\sin 2x_{j,0}\pi+4x_{j,0}\sin^2 x_{j,0}\pi}=\frac{2}{1-\frac{\sin 2x_{j,0}\pi}{2x_{j,0}}+2\sin^2 x_{j,0}\pi}$$

$$<\frac{2}{1-\frac{\sin 2x_{j,0}\pi}{2x_{j,0}}}=2+O\left(\frac{1}{x_{j,0}}\right). \qquad (14)$$

Так как $q(t) \in \sigma_1$, пользуясь (10′) при $k = 0$ и оценками

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^{\frac{\alpha}{2}}} |f_j(\pi)| \le \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{N} |f_j(\pi)|^2\right)^{1/2},$$

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^{\alpha}} \int_0^{\pi} |f_j(t)|\, dt \le \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^{2\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{N} \left(\int_0^{\pi} |f_j(t)|\, dt\right)^2\right)^{1/2}$$

$$\le \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^{2\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\sum_{j=1}^{N} \int_0^{\pi} |f(t)|\, dt\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{15}$$

в (13) получим

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{2x_{j,0}\pi - \sin 2x_{j,0}\pi + 4x_{j,0}\sin^2 x_{j,0}\pi}{4x_{j,0}} \cos 2x_{j,0} t f_j(t)\, dt\right| < \infty. \tag{16}$$

Из (12) и (16) вытекает справедливость (10).

Вернемся к доказательству теоремы 1. Ранее было получено, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^{(j)} - \mu^{(j)}) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{n_m} \int_0^{\pi} \frac{4x_{j_n,.k_n}}{2x_{j_n,.k_n}\pi - \sin 2x_{j_n,.k_n}\pi + 4x_{j_n,.k_n}}$$

$$\times \sin^2 x_{j_n,.k_n}\pi \sin^2 x_{j_n,k_n} t (q(t)\varphi_{j_n}, \varphi_{j_n})\, dt$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{4x_{j,k}}{2x_{j,k}\pi - \sin 2x_{j,k}\pi + 4x_{j,k}\sin^2 x_{j,k}\pi} \sin^2 x_{j,k} t f_j(t)\, dt. \tag{17}$$

Вычислим сумму повторного ряда, стоящего в правой части равенства (17). Сначала вычислим значение суммы ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4x_{j,k}}{2x_{j,k}\pi - \sin 2x_{j,k}\pi + 4x_{j,k}\sin^2 x_{j,k}\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 x_{j,k} t f_j(t)\, dt$$

$$= -\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{2x_{j,k}}{2x_{j,k}\pi - \sin 2x_{j,k}\pi + 4x_{j,k}\sin^2 x_{j,k}\pi} \int_0^{\pi} \cos 2x_{j,k} t f_j(t)\, dt. \tag{18}$$

Для каждого фиксированного j при $N \to \infty$ исследуем асимптотическое поведение функции

$$T_N(t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{2x_{j,k}}{-2x_{j,k}\pi + \sin 2x_{j,k}\pi - 4x_{j,k}\sin^2 x_{j,k}\pi} \cos 2x_{j,k} t.$$

Чтобы вывести формулу для $T_N(t)$, выразим m-й член суммы $T_N(t)$ в виде вычета в точке $x_{j,k}$ некоторой функции комплексного переменного z, имеющей полюсы в точках $x_{j,0}, x_{j,1}, \ldots, x_{j,N}$. Рассмотрим следующую комплексную функцию:

$$g(z) = \frac{z\cos 2zt}{(z\operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \gamma_j)\sin^2 z\pi}. \tag{19}$$

Так как $q(t) \in \sigma_1$, пользуясь (10′) при $k = 0$ и оценками

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^{\frac{\alpha}{2}}} |f_j(\pi)| \le \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{N} |f_j(\pi)|^2\right)^{1/2},$$

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^{\alpha}} \int_0^{\pi} |f_j(t)|\,dt \le \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^{2\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{N} \left(\int_0^{\pi} |f_j(t)|\,dt\right)^2\right)^{1/2}$$

$$\le \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^{2\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\sum_{j=1}^{N} \int_0^{\pi} |f(t)|\,dt\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{15}$$

в (13) получим

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{2x_{j,0}\pi - \sin 2x_{j,0}\pi + 4x_{j,0}\sin^2 x_{j,0}\pi}{4x_{j,0}} \cos 2x_{j,0}t f_j(t)\,dt\right| < \infty. \tag{16}$$

Из (12) и (16) вытекает справедливость (10).

Вернемся к доказательству теоремы 1. Ранее было получено, что

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda^{(j)} - \mu^{(j)}) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{n_m} \int_0^{\pi} \frac{4x_{j_n,.k_n}}{2x_{j_n,.k_n}\pi - \sin 2x_{j_n,.k_n}\pi + 4x_{j_n,.k_n}}$$

$$\times \sin^2 x_{j_n,.k_n}\pi \sin^2 x_{j_n,k_n} t(q(t)\varphi_{j_n}, \varphi_{j_n})\,dt$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{4x_{j,k}}{2x_{j,k}\pi - \sin 2x_{j,k}\pi + 4x_{j,k}\sin^2 x_{j,k}\pi} \sin^2 x_{j,k} t f_j(t)\,dt. \tag{17}$$

Вычислим сумму повторного ряда, стоящего в правой части равенства (17). Сначала вычислим значение суммы ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4x_{j,k}}{2x_{j,k}\pi - \sin 2x_{j,k}\pi + 4x_{j,k}\sin^2 x_{j,k}\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 x_{j,k} t f_j(t)\,dt$$

$$= -\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{2x_{j,k}}{2x_{j,k}\pi - \sin 2x_{j,k}\pi + 4x_{j,k}\sin^2 x_{j,k}\pi} \int_0^{\pi} \cos 2x_{j,k} t f_j(t)\,dt. \tag{18}$$

Для каждого фиксированного j при $N \to \infty$ исследуем асимптотическое поведение функции

$$T_N(t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{2x_{j,k}}{-2x_{j,k}\pi + \sin 2x_{j,k}\pi - 4x_{j,k}\sin^2 x_{j,k}\pi} \cos 2x_{j,k} t.$$

Чтобы вывести формулу для $T_N(t)$, выразим m-й член суммы $T_N(t)$ в виде вычета в точке $x_{j,k}$ некоторой функции комплексного переменного z, имеющей полюсы в точках $x_{j,0}, x_{j,1}, \dots, x_{j,N}$. Рассмотрим следующую комплексную функцию:

$$g(z) = \frac{z\cos 2zt}{(z\operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \gamma_j)\sin^2 z\pi}. \tag{19}$$

Она имеет простые полюсы в точках $x_{j,k}$ и k. Вычет в точке $x_{j,k}$ будет равен

$$\operatorname*{res}_{z=x_{j,k}} g(z) = \frac{x_{j,k}\cos 2x_{j,k}t}{\left(\operatorname{ctg} x_{j,k}\pi - \frac{x_{j,k}\pi}{\sin^2 x_{j,k}\pi} - 2x_{j,k}\right)\sin^2 x_{j,k}\pi}$$

$$= \frac{x_{j,k}\cos 2x_{j,k}t}{\frac{1}{2}\sin 2x_{j,k}\pi - x_{j,k}\pi - 2x_{j,k}\sin^2 2x_{j,k}\pi} = \frac{2x_{j,k}\cos 2x_{j,k}t}{\sin 2x_{j,k}\pi - 2x_{j,k}\pi - 4x_{j,k}\sin^2 2x_{j,k}\pi},$$

а в точке k

$$\operatorname*{res}_{z=k} g(z) = \frac{k\cos 2kt}{k(-1)^k\pi(-1)^k} = \frac{\cos 2kt}{\pi}.$$

В качестве контура интегрирования возьмем прямоугольник с вершинами в $\pm iB, A_N \pm iB$, который обходит точку $ix_{j,0}$ справа, а точки $-ix_{j,0}$ и 0 — слева. При каждом фиксированном j имеем $B > x_{j,0}$. Впоследствии B стремится в бесконечность, а $A_N = N + \frac{1}{2}$. При таком выборе A_N будет $x_{j,N} < A_N < x_{j,N+1}$.

Функция (18) является нечетной функцией от z, поэтому интеграл вдоль части контура, находящейся на мнимой оси, а также по полуокружностям с центрами в точках $\pm x_{j,0}$, обращается в нуль.

Если $z = u + iv$, то при больших v и при $u \geq 0$ (17) будет иметь порядок $O\left(\frac{1}{e^{2|v|(\pi - x)}|v|}\right)$, и для заданного значения A_N интегралы, взятые вдоль верхней и нижней сторон контура, стремятся к нулю при $B \to \infty$.

Таким образом, мы получаем следующую формулу:

$$T_N(t) = -S_N(t) + \frac{1}{2\pi i}\lim_{B\to\infty}\int\limits_{A_N - iB}^{A_N + iB} \frac{z\cos 2zt}{(z\operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \gamma_j)\sin^2 z\pi}\,dz$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\lim_{r\to 0}\int\limits_{\substack{|z|=r,\\ -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}}} \frac{z\cos 2zt}{(z\operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \gamma_j)\sin^2 zt}\,dz,$$

где $S_N(t) = \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{\cos 2kt}{\pi}$.

При $N \to \infty$

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{B\to\infty}\int\limits_{A_N - iB}^{A_N + iB} \frac{z\cos 2zt}{(z\operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \gamma_j)\sin^2 z\pi} \sim \frac{1}{\pi i}\int\limits_{A_N - i\infty}^{A_N + i\infty} \frac{\cos 2zt}{\sin 2z\pi - 2z\sin^2 z\pi}\,dz$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2N+1)t\operatorname{ch} 2tv - i\sin(2N+1)t}{-i\operatorname{sh} 2v\pi - 2(A_N + iv)(1 + \operatorname{ch} 2v\pi)} i\,dv$$

$$= \frac{1}{\pi}\cos(2N+1)t\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} 2tv}{-i\operatorname{sh} 2v\pi - 2(A_N + iv)(1 + \operatorname{ch} 2v\pi)}\,dv$$

$$+ \frac{1}{i\pi}\sin(2N+1)t\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} 2tv}{\frac{1}{i}\operatorname{sh} 2v\pi - 2(A_N + iv)(1 + \operatorname{ch} 2v\pi)}\,dv.$$

Обозначим интегралы в правой части последнего соотношения через I_{1N}, I_{2N} соответственно. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{B\to\infty}\int\limits_{A_N - iB}^{A_N + iB} \frac{z\cos 2zt}{(z\operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \gamma_j)\sin^2 z\pi}\,dz = I_{1N} + I_{2N} + \psi(A_N t), \qquad (20)$$

где

$$\psi(A_N t) = O\left(\lim_{B\to\infty}\int\limits_{A_N-iB}^{A_N+iB}\frac{\cos 2zt}{z^3\sin^2 z\pi}\,dz\right). \tag{20$'$}$$

Оценим I_{1N}:

$$|I_{1N}| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{A_N^2+v^2}}\left|\frac{\operatorname{ch} 2tv}{\frac{\operatorname{sh} 2v\pi}{2i(A_N+iv)}-(1+\operatorname{ch} 2v\pi)}\right|dv$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{A_N^2+v^2}}\frac{\operatorname{ch} 2tv}{\left|\left|\frac{\operatorname{sh} 2v\pi}{2i(A_N+iv)}\right|-(1+\operatorname{ch} 2v\pi)\right|}\,dv$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{A_N^2+v^2}}\frac{\operatorname{ch} 2tv}{\left|\left|\frac{\operatorname{sh} 2v\pi}{2(A_N^2+v^2)}\right|-(1+\operatorname{ch} 2v\pi)\right|}\,dv$$

$$\le \frac{1}{2A_N\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{ch} 2tv}{\left|\frac{|\operatorname{sh} 2v\pi|}{2}-(1+\operatorname{ch} 2v\pi)\right|}\,dv$$

$$\le \frac{1}{2A_N\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{ch} 2tv}{\left|\frac{1+\operatorname{ch} 2v\pi}{2}-(1+\operatorname{ch} 2v\pi)\right|}\,dv < \frac{1}{A_N\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{ch} 2tv}{1+\operatorname{ch} 2v\pi}\,dv$$

$$= \frac{2}{A_N\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{ch} 2tv}{1+\operatorname{ch} 2v\pi}\,dv = \frac{\text{const}}{A_N\cos\frac{x}{2}}. \tag{20$''$}$$

Подобная оценка получается и для I_{2N}. Можно также показать, что

$$\lim_{N\to\infty}\psi(A_N t) = 0. \tag{21}$$

Итак,

$$\int\limits_0^\pi T_N(t)f_j(t)\,dt = -\int\limits_0^\pi S_N(t)f_j(t)\,dt$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\pi f_j(t)\int\limits_{A_N-i\infty}^{A_N+\infty}\frac{z\cos 2zt}{(z\operatorname{ctg} z\pi - z^2-\mu_j)\sin^2 z\pi}\,dzdt$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\lim_{r\to 0}\int\limits_0^\pi f_j(t)\int\limits_{\substack{|z|=r,\\ -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}}}\frac{z\cos 2zt}{(z\operatorname{ctg} z\pi - z^2-\mu_j)\sin^2 z\pi}\,dzdt. \tag{22}$$

Пользуясь условием 4 для третьего члена правой части равенства (21), имеем

$$\int\limits_0^\pi f_j(t)\int\limits_{\substack{|z|=r\\ -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}}}\frac{z\cos 2zt}{(z\operatorname{ctg} z\pi - z^2-\mu_j)\sin^2 z\pi}\,dzdt$$

$$= \int_0^\pi f_j(t) \int\limits_{\substack{|z|=r,\\ -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}}} \frac{z(\cos 2zt - 1)}{(z \operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \mu_j)\sin^2 z\pi}\, dzdt$$

$$= \int_0^\pi f_j(t) \int\limits_{\substack{|z|=r,\\ -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}}} \frac{-2z\sin^2 zt}{(z \operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \mu_j)\sin^2 z\pi}\, dzdt.$$

Отсюда при $r \to 0$

$$\int_0^\pi f_j(t) \int\limits_{\substack{|z|=r,\\ -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}}} \frac{-2z\sin^2 zt}{(z \operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \gamma_j)\sin^2 z\pi}\, dzdt$$

$$\sim \int_0^\pi f_j(t) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2re^{i\varphi}(re^{i\varphi}t)^2}{\gamma_j(re^{i\varphi}\pi)^2}\, d\varphi dt = \int_0^\pi -\frac{2t^2}{\gamma_j\pi^2} f_j(t) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} re^{i\varphi}\, d\varphi dt, \quad (23)$$

$$\lim_{r\to 0} \int_0^\pi -\frac{2t^2}{\gamma_j\pi^2} f_j(t) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} re^{i\varphi}\, d\varphi dt = 0. \quad (24)$$

Из (22)–(24) получаем

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^\pi T_N(t) f_j(t)\, dt = -\lim_{N\to\infty} \int_0^\pi S_N(t) f_j(t)\, dt$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \lim_{N\to\infty} \int_0^\pi f_j(t) \int_{A_N - i\infty}^{A_N + i\infty} \frac{z\cos 2zt}{(z \operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \gamma_j)\sin^2 z\pi}\, dzdt. \quad (25)$$

Учитывая оценки для I_{1N} и I_{2N}, а также (20), приходим к неравенству

$$\lim_{N\to\infty} \left| \int_0^\pi f_j(t) \int_{A_N - i\infty}^{A_N + i\infty} \frac{z\cos 2zt}{(z \operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \gamma_j)\sin^2 z\pi}\, dzdt \right|$$

$$\le \lim_{N\to\infty} \left| \int_0^\pi \frac{\text{const}}{A_N} \frac{1}{\cos\frac{t}{2}} f_j(t)\, dt \right| + \lim_{N\to\infty} \left| \int_0^\pi \psi(A_N t) f_j(t)\, dt \right|. \quad (26)$$

При выполнении для $f_j(t)$ условия $\int\limits_{\pi-\delta}^{\pi} \frac{f_j(t)}{\pi - t} < \infty$ $(\delta > 0)$ имеем

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\text{const}}{A_N} \int_0^\pi \frac{f_j(t)}{\cos\frac{t}{2}}\, dt = 0. \quad (27)$$

Поэтому, используя (20), (26), (27) в (25), получим

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^\pi T_N(t) f_j(t)\, dt = -\lim_{N\to\infty} \int_0^\pi S_N(t) f_j(t)\, dt$$

$$= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^\infty \int_0^\pi f_j(t)\cos 2kt\, dt = -\frac{f_j(\pi) + f_j(0)}{4}. \quad (28)$$

Из (17) и (28) окончательно следует, что

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda^{(j)}-\mu^{(j)})=-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{f_j(\pi)+f_j(0)}{4}=-\frac{\mathrm{Sp}\,q(\pi)+\mathrm{Sp}\,q(0)}{4}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыбак М. А.* Об асимптотическом распределении собственных значений некоторых граничных задач для операторного уравнения Штурма — Лиувилля // Укр. мат. журн. 1980. Т. 32, № 2. С. 248–252.
2. *Максудов Ф. Г., Байрамоглы М., Адыгезалов А. А.* О регуляризованном следе оператора Штурма — Лиувилля на конечном отрезке с неограниченным операторным коэффициентом // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 4. С. 795–799.
3. *Гельфанд И. М., Левитан Б. М.* Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88, № 4. С. 593–596.
4. *Дикий Л. А.* Об одной формуле Гельфанда — Левитана // Успехи мат. наук. 1953. Т. 8, № 2. С. 119–123.
5. *Гасымов М. Г.* О сумме разностей собственных значений двух самосопряженных операторов // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150, № 6. С. 1201–1205.
6. *Лидский В. Б. Садовничий В. А.* Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176, № 2. С. 259–262.
7. *Гусейнов Г. Ш., Левитан Б. М.* О формулах следов для оператора Штурма — Лиувилля // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. 1978. № 1. С. 40–49.
8. *Садовничий В. А.* О следах обыкновенных дифференциальных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 179–188.
9. *Печенцов А. С.* Регуляризованные следы дифференциальных операторов. Метод Лидского — Садовничего // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 4. С. 490–497.
10. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Формула следа для операторов Штурма — Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки. 2001. Т. 69, № 3. С. 427–442.
11. *Любшикин В. А., Подольский В. Е.* О суммируемости регуляризованных следов дифференциальных операторов // Мат. заметки. 1993. Т. 54, № 2. С. 33–38.
12. *Садовничий В. А., Любшикин В. А.* Формулы следов и теория возмущений // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 5. С. 1064–1066.
13. *Дубровский В. В.* Абстрактные формулы регуляризованных следов эллиптические гладких дифференциальных операторов, заданных на компактных многообразиях // Диференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 12. С. 2164–2166.
14. *Садовничий В. А., Подольский В. Е.* Следы операторов с относительно компактным возмущением // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 2. С. 129–152.
15. *Садовничий В. А., Подольский В. Е.* Следы операторов // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, № 5. С. 89–156.
16. *Халилова Р. З.* Регуляризация следа операторного уравнения Штурма — Лиувилля // Функц. анализ, теория функций и их приложения. 1976. № 3. С. 154–161.

Статья поступила 19 мая 2007 г., окончательный вариант — 7 мая 2008 г.

Асланова Нигяр Махар кызы
Институт математики и механики НАН Азербайджана,
ул. Ф. Агаева, 9, Баку AZ 1141, Азербайджан
nigar.aslanova@yahoo.com

Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2008. Том 49, № 6

УДК 517.984

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА НЕГЛАДКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Э. Ф. Ахмерова

Аннотация. Получена асимптотика спектра негладкого возмущения одномерного гармонического осциллятора. Используется аппарат теории возмущений, основанный на асимптотическом представлении части ядра резольвенты невозмущенного оператора в некоторой окрестности каждого из собственных чисел. Аналогичные вопросы будут рассмотрены ниже в подобных ситуациях.

Ключевые слова: гармонический осциллятор, асимптотика спектра, негладкое возмущение.

Рассмотрим оператор $H = H^0 + V$ в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, где $H^0 = -d^2/dx^2 + x^2$, V — оператор умножения на вещественную измеримую убывающую на бесконечности функцию. Как известно (см., например, [1, гл. 5, § 4, с. 326]), спектр оператора H^0 состоит из чисел $2n+1$, а соответствующие нормированные собственные функции суть $\varphi_n(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}/\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где $H_n(x)$ — многочлены Чебышева — Эрмита. Асимптотика собственных чисел возмущенного оператора $H = H^0 + V$ для гладких убывающих на бесконечности функций впервые подробно изучена в [2], где использовано эталонное решение с помощью функций Эйри [3, гл. 11, § 1, с. 377]. Так как $V(x)$ не предполагается гладкой, мы не можем непосредственно применить технику эталонных решений к функции $q(x) = x^2 + V(x)$. В данной работе используем аппарат теории возмущений, основанный на изучении асимптотического представления ядра резольвенты невозмущенного оператора.

Обозначим через λ_n собственные значения оператора H^0, через P_n — соответствующие проекторы на собственные подпространства, а через $R^0(\lambda)$ — резольвенту оператора H^0, $R^0(\lambda) = (H^0 - \lambda)^{-1}$. Согласно [4] если V удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|\lambda-\lambda_n|\le 1/2} \left\| R_n^0(\lambda)V \right\| = 0, \tag{1}$$

где $R_n^0(\lambda) = R^0(\lambda) - (\lambda_n - \lambda)^{-1}P_n$, то спектр оператора $H = H^0 + V$ определяется из уравнения

$$\lambda = \lambda_n + (V\varphi_n, \varphi_n) - (VR_n(\lambda)V\varphi_n, \varphi_n). \tag{2}$$

Здесь $(.,.)$ — скалярное произведение в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, φ_n — нормированный собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_n,

$$R_n(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[R_n^0(\lambda)V\right]^m R_n^0(\lambda). \tag{3}$$