МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 13, № 4 (1973), 551—559

УДК 513.88

ЛИНЕЙНАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ

Г. А. Исаев

Найдены достаточные условия для линейной факторизации полиномиальных операторных пучков любого порядка в банаховом пространстве. Эта факторизация порождается решением соответствующего операторного уравнения. Библ. 4 назв.

1. Введение. Пусть $\mathscr{B}$ — банахово пространство, $[\mathscr{B}\to\mathscr{B}]$ — алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathscr{B}$. Рассмотрим полиномиальный операторный пучок

$$L(\lambda)=\lambda^n A_n+\lambda^{n-1}A_{n-1}+\ldots+\lambda A_1+A_0,$$

где A_j ($j=0, 1, \ldots, n$) являются линейными замкнутыми операторами в $\mathscr{B}$.

Введем следующее

Определение 1. Правой линейной факторизацией пучка $L(\lambda)$ будем называть представление вида

$$L(\lambda)=(\lambda^{n-1}A_n+\lambda^{n-2}B_{n-2}+\ldots+\lambda B_1+B_0)(\lambda E-Z), \quad (1.1)$$

где $Z\in[\mathscr{B}\to\mathscr{B}]$, B_j ($j=0, 1, \ldots, n-2$) — некоторые линейные операторы, действующие в $\mathscr{B}$ и точка $\lambda=0$ не является собственным значением пучка

$$L_1(\lambda)\equiv\lambda^{n-1}A_n+\lambda^{n-2}B_{n-2}+\ldots+\lambda B_1+B_0.$$

В данной работе найдены достаточные условия для того, чтобы пучок $L(\lambda)$ допускал правую линейную факторизацию. Эта факторизация пучка $L(\lambda)$ порождается решением соответствующего операторного уравнения

$$A_nZ^n + A_{n-1}Z^{n-1} + \ldots + A_1Z + A_0 = 0 \qquad (1.2)$$

а пространстве $[\mathcal{B} \to \mathcal{B}]$.

Аналогичные вопросы были изучены только для квадратичных операторных пучков в работах [1] — [4]. С помощью полученной факторизации можно исследовать различные вопросы, связанные с полнотой некоторой части и с суммированием рядов Фурье по той же части системы собственных и присоединенных векоторов пучка $L(\lambda)$. Этим вопросам будет посвящена другая работа автора.

2. Формулировка результатов. Рассмотрим пучок $L(\lambda)$ и операторное уравнение (1.2). Предполагаем, что выполняются условия

$$T_j \equiv A_1^{-1}A_j \in [\mathcal{B} \to \mathcal{B}] \qquad (j = 0, 2, 3, \ldots, n).$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть существует натуральное число* m $(2 \leqslant m \leqslant n)$ *такое, что операторы* T_j *удовлетворяют соотношениям*

$$\|T_j\| \cdot \|T_0\|^{j-1} \leqslant \|T_m\| \cdot \|T_0\|^{m-1} < \delta, \qquad (2.1)$$

где δ *наперед заданное положительное число. Тогда операторное уравнение* (1.2) *разрешимо в пространстве* $[\mathcal{B} \to \mathcal{B}]$.

Заметим, что пучок $L(\lambda)$ содержит в себе $n-1$ трехчленных пучков, линейные части которых состоят из одного и того же пучка $\lambda A_1 + A_0$, а именно: $\lambda^n A_n + \lambda A_1 + A_0$, $\lambda^{n-1}A_{n-1} + \lambda A_1 + A_0$, $\ldots$, $\lambda^2 A_2 + \lambda A_1 + A_0$. Когда число m принимает значения от двух до n, получаются $n-1$ условий типа (2.1). Это означает, что существуют $n-1$ достаточных условий для разрешимости операторного уравнения (1.2). Эти условия в свою очередь означают, что «основная роль» принадлежит одному из этих трехчленных пучков.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть операторы* T_j *удовлетворяют условиям* (2.1). *Тогда пучок* $L(\lambda)$ *допускает правую линейную факторизацию* (1.1).

3. Доказательство теоремы 1. Пусть для определенности $m = n$. Рассмотрим вспомогательное операторное уравнение, которое является возмущением простейшего уравнения

$$A_1Z + A_0 = 0$$

и при $\varepsilon = 1$ превращается в уравнение (1.2), т. е.

$$\varepsilon(A_n Z^n + A_{n-1} Z^{n-1} + \ldots + A_2 Z^2) + A_1 Z + A_0 = 0. \quad (3.1)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$Z(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k \cdot \varepsilon^k, \quad (3.2)$$

где ε — положительный параметр.

Подставив выражение (3.2) в уравнение (3.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим соотношения для определения операторов X_k

$$A_1 X_0 + A_0 = 0,$$

$$A_n \sum_{i_1+\ldots+i_n=k} X_{i_1} \cdots X_{i_n} + \ldots + A_2 \sum_{i_1+i_2=k} X_{i_1} X_{i_2} + \\ + A_1 X_{k+1} = 0,$$

$$(k = \overline{0, \infty})$$

или

$$X_0 = -T_0,$$

$$X_{k+1} = -T_n \sum_{i_1+\ldots+i_n=k} X_{i_1} \cdots X_{i_n} - \ldots \\ \ldots - T_2 \sum_{i_1+i_2=k} X_{i_1} \cdot X_{i_2}.$$

Поэтому имеем

$$\| X_{k+1} \| \leqslant \| T_n \| \sum_k \| X_{i_1} \| \cdots \| X_{i_n} \| + \ldots + \| T_2 \| \sum_k \| X_{i_1} \| \cdot \| X_{i_2} \|.$$

Учитывая условие (2.1) из предыдущего неравенства при $m = n$, получим

$$\| X_{k+1} \| \leqslant \| T_n \| \sum_k \| X_{i_1} \| \cdots \| X_{i_n} \| + \\ + \| T_n \| \cdot \| T_0 \| \sum_k \| X_{i_1} \| \cdots \| X_{i_{n-1}} \| + \ldots \\ \ldots + \| T_n \| \cdot \| T_0 \|^{n-2} \sum_k \| X_{i_1} \| \cdot \| X_{i_2} \|.$$

С помощью индукции нетрудно убедиться в том, что имеет место следующая оценка для нормы операторов X_k:

$$\| X_k \| \leqslant \alpha_k \| T_n \|^k \cdot \| T_0 \|^{(n-1)k+1}, \quad (3.3)$$

где числа α_k определяются с помощью рекуррентных соотношений

$$\alpha_0 = 1, \tag{3.4}$$

$$\alpha_{k+1} = \sum\nolimits_k \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_n} + \sum\nolimits_k \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_{n-1}} + \ldots + \sum\nolimits_k \alpha_{i_1} \cdot \alpha_{i_2},$$

$$(k = \overline{0, \infty}).$$

Пусть ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta^k$ сходится в некоторой малой окрестности нуля и

$$f(\zeta) \equiv \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta^k.$$

Исходя из того, что числа α_k удовлетворяют соотношениям (3.4), нетрудно вывести тот факт, что функция $f(\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$\zeta\,[f^n(\zeta) + f^{n-1}(\zeta) + \ldots + f^2(\zeta)] - f(\zeta) + 1 = 0. \tag{3.5}$$

Наоборот, если функция $f(\zeta)$ удовлетворяет уравнению (3.5), то она является аналитической функцией в некоторой окрестности нуля. Действительно, из (1.5) найдем

$$\zeta(f) = \frac{f-1}{f^2 + \ldots + f^n},$$

которая, очевидно, является аналитической в окрестности $f = 1$, кроме того, $\zeta(1) = 0$ и $\zeta'(1) = 1/(n-1)$. Поэтому существует обратная к $\zeta(f)$ функция $f(\zeta)$, определенная в некоторой окрестности нуля и аналитическая в этой окрестности. Радиус сходимости этого ряда обозначим через δ. Это есть то же самое число, существование которого отмечено в теореме. Так как $f(\zeta)$ является решением уравнения (3.5), то числа α_k совпадают с коэффициентами Тейлора этой функции в окрестности нуля. Тем самым доказана сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta^k$ для $|\zeta| < \delta$.

Докажем, что ряд (3.2) сходится равномерно для $\varepsilon \leqslant 1$:

$$\|Z(\varepsilon)\| \leqslant \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \|X_k\| \cdot \varepsilon^k \leqslant \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \alpha_k \|T_n\|^k \cdot \|T_0\|^{(n-1)k+1} \cdot \varepsilon^k =$$

$$= \|T_0\| \cdot \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \alpha_k (\|T_n\| \cdot \|T_0\|^{n-1} \cdot \varepsilon)^k.$$

Имея в виду условие (2.1), из предыдущего соотношения вытекает равномерная сходимость ряда (3.2) для $\varepsilon \leqslant 1$, Полагая теперь в соотношениях (3.1) и (3.2) $\varepsilon = 1$, находим, что оператор

$$Z(1) \equiv Z = \sum_{k=0}^{\infty} X_k$$

является решением операторного уравнения (1.2) в пространстве $[\mathscr{B} \to \mathscr{B}]$ и притом

$$\| Z \| \leqslant f(\| T_n \| \cdot \| T_0 \|^{n-1}) \cdot \| T_0 \|. \tag{3.6}$$

Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Сначала установим следующее простое предложение:

ЛЕММА 1. *Для того, чтобы имело место разложение* (1.1), *необходимо и достаточно, чтобы оператор* Z *был решением операторного уравнения* (1.2). *При этом операторы* Z *и* B_j ($j = 0, 1, \ldots, n-2$) *связаны между собой следующими соотношениями*:

$$\begin{aligned} &-B_0 Z = A_0, \\ &B_k - B_{k+1} Z = A_{k+1} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-3), \\ &B_{n-2} - A_n Z = A_{n-1}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Необходимость. Если имеет место разложение (1.1), то, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, убедимся, что выполняются соотношения (4.1). Но тогда

$$\begin{aligned} A_0 &= -B_0 Z, \\ A_{k+1} Z^{k+1} &= B_k Z^{k+1} - B_{k+1} Z^{k+2} \quad (k = \overline{0, n-3}), \\ A_{n-1} Z^{n-1} + A_n Z^n &= B_{n-2} Z^{n-1}. \end{aligned}$$

Просуммировав обе части этих равенств, получим, что оператор Z является решением уравнения (1.2).

Достаточность. Пусть существует корень Z операторного уравнения (1.2). Тогда, определяя операторы B_j с помощью равенств

$$\begin{aligned} B_{n-2} &= A_n Z + A_{n-1}, \\ B_k &= B_{k+1} Z + A_{k+1} \quad (k = \overline{n-3, 0}), \end{aligned}$$

убедимся в выполнении первого равенства в соотношениях (4.1). Теперь имеет место разложение (1.1), что проверяется непосредственной подстановкой. Лемма доказана.

Из сопоставления теоремы 1 и леммы 1 получаем разложение (1.1), где операторы Z и B_j ($j = 0, 1, \ldots, n-2$) связаны соотношениями (4.1); при этом оператор $Z \in [\mathscr{B} \to \mathscr{B}]$ и имеет место неравенство (3.6). Остается доказать, что точка $\lambda = 0$ не является собственным значением пучка $L_1(\lambda)$, а это в свою очередь эквивалентно тому, что $\operatorname{Ker} B_0 = \{0\}$, где через $\operatorname{Ker} B_0$ обозначено ядро оператора B_0. Для доказательства последнего утверждения рассмотрим второе равенство из соотношений (4.1):

$$B_0 - B_1 Z = A_1,$$

или

$$B_0 = A_1 (E + A_1^{-1} B_1 Z).$$

Оценим норму оператора $A_1^{-1}B_1Z$, используя последовательно равенства (4.1):

$$\begin{aligned}
\| A_1^{-1} B_1 Z \| &= \| A_1^{-1} (A_2 + B_2 Z) Z \| \leqslant \\
&\leqslant \| A_1^{-1} A_2 Z \| + \| A_1^{-1} (A_3 + B_3 Z) Z^2 \| \leqslant \| A_1^{-1} A_2 Z \| + \\
&+ \| A_1^{-1} A_3 Z^2 \| + \ldots + \| A_1^{-1} A_{n-1} Z^{n-2} \| + \| A_1^{-1} A_n Z^{n-1} \| \leqslant \\
&\leqslant \| T_2 \| \cdot \| Z \| + \| T_3 \| \cdot \| Z \|^2 + \ldots + \| T_n \| \cdot \| Z \|^{n-1}.
\end{aligned}$$

Учитывая неравенство (3.6), условия (2.1) и скалярное уравнение (3.5), можем написать

$$\begin{aligned}
\| A_1^{-1} B_1 Z \| &\leqslant \| T_2 \| \cdot \| T_0 \| \cdot f(\| T_n \| \cdot \| T_0 \|^{n-1}) + \\
&+ \| T_3 \| \cdot \| T_0 \|^2 f^2 (\| T_n \| \cdot \| T_0 \|^{n-1}) + \ldots \\
&\ldots + \| T_n \| \cdot \| T_0 \|^{n-1} f^{n-1} (\| T_n \| \cdot \| T_0 \|^{n-1}) \leqslant \\
&\leqslant \| T_n \| \cdot \| T_0 \|^{n-1} \cdot [f(\| T_n \| \cdot \| T_0 \|^{n-1}) + \ldots + f^{n-1}(\| T_n \| \cdot \| T_0 \|^{n-1})] = \\
&= [f(\| T_n \| \cdot \| T_0 \|^{n-1}) - 1] \cdot [f(\| T_n \| \cdot \| T_0 \|^{n-1})]^{-1} < 1.
\end{aligned}$$

Итак, $\operatorname{Ker} B_0 = \{0\}$. Теорема 2 доказана.

5. Некоторые замечания и дополнения.

а) Введем следующее

Определение 2. Левой линейной факторизацией пучка $L(\lambda)$ назовем представление вида

$$L(\lambda) = (\lambda E - Z')(\lambda^{n-1} A_n + \lambda^{n-2} B'_{n-2} + \ldots + \lambda B'_1 + B'_0),$$

где оба фактора удовлетворяют тем же условиям, что и в определении 1.

Допустим, что операторы $T_j^1 \equiv A_j A_1^{-1} \in [\mathcal{B} \to \mathcal{B}]$ $(j = 0, 2, 3, \ldots, n)$. Рассмотрим операторное уравнение

$$Z^n A_n + Z^{n-1} A_{n-1} + \ldots + Z A_1 + A_0 = 0$$

в пространстве $[\mathcal{B} \to \mathcal{B}]$. Задачи левой линейной факторизации и решения этого операторного уравнения эквивалентны, при этом операторы B_j' выбираются аналогичным образом. Имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Пусть операторы T_j' удовлетворяют условиям* (2.1). *Тогда пучок* $L(\lambda)$ *допускает левую линейную факторизацию.*

Доказательство аналогично доказательствам теорем 1 и 2.

б) Рассмотрим квадратичный операторный пучок

$$L(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C \tag{5.1}$$

и соответствующее операторное уравнение

$$AZ^2 + BZ + C = 0 \tag{5.2}$$

в пространстве $[\mathcal{B} \to \mathcal{B}]$. По теореме 1 достаточным условием для разрешимости этого операторного уравнения является выполнение неравенства

$$\| B^{-1} A \| \cdot \| B^{-1} C \| < \delta,$$

но в этом случае δ легко вычисляется, она равна $^1/_4$. Этот результат впервые был установлен И. В. Горюком [4]. Однако мы передокажем эту теорему более простым методом.

ТЕОРЕМА: *Пусть выполняется неравенство*

$$\| B^{-1} A \| \cdot \| B^{-1} C \| < 1/4. \tag{5.3}$$

Тогда пучок (5.1) *допускает факторизацию*

$$L(\lambda) = (\lambda A - Z_2)(\lambda E - Z_1),$$

причем для λ, *принадлежащих спектру оператора* Z_1,

$$\operatorname{Ker}(\lambda A - Z_2) = \{0\}.$$

Доказательство. Рассмотрим шар

$$\| Z \| \leqslant \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \| B^{-1} A \| \cdot \| B^{-1} C \|}}{2 \| B^{-1} A \|} \tag{5.4}$$

и отображение

$$\mathcal{F}(Z) = Z - B^{-1}(AZ^2 + BZ + C)$$

в пространстве $[\mathcal{B} \to \mathcal{B}]$.

Докажем, что оператор $\mathcal{F}$ отображает этот шар в себя сжатым образом. Действительно,

$$\|\mathcal{F}(Z)\| = \|B^{-1}AZ^2 + B^{-1}C\| \leqslant \|B^{-1}A\| \cdot \|Z\|^2 + \|B^{-1}C\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1 - \sqrt{1 - 4\|B^{-1}A\| \cdot \|B^{-1}C\|}}{2\|B^{-1}A\|}.$$

С другой стороны,

$$\|\mathcal{F}(X) - \mathcal{F}(Y)\| \leqslant \|B^{-1}A\| \cdot \|X^2 - Y^2\| \leqslant$$
$$\leqslant \|B^{-1}A\| \cdot \|X - Y\| (\|X\| + \|Y\|) \leqslant$$
$$\leqslant (1 - \sqrt{1 - 4\|B^{-1}A\| \cdot \|B^{-1}C\|}) \cdot \|X - Y\|.$$

Следовательно, существует неподвижная точка оператора $\mathcal{F}$ в шаре (5.4), другими словами, существует корень Z_1 операторного уравнения (5.2) в этом шаре. Очевидно, что Z_1 есть предел последовательных приближений

$$Z_{n+1} = \mathcal{F}(Z_n) = -B^{-1}A \cdot Z_n^2 - B^{-1}C, \quad Z_0 = 0.$$

Имеет место разложение

$$\lambda^2 A + \lambda B + C = (\lambda A - Z_2)(\lambda E - Z_1),$$

где

$$Z_2 + AZ_1 = -B, \qquad Z_2 Z_1 = C.$$

Так как

$$Z_2 = -B(E + B^{-1}AZ_1)$$

и $\|B^{-1}AZ_1\| \leqslant \frac{1}{2}$, то существует Z_2^{-1} и

$$Z_2^{-1}A = -(E + B^{-1}AZ_1)\, B^{-1}A.$$

Отсюда

$$\|\lambda Z_2^{-1}A\| \leqslant 1 - \sqrt{1 - 4\|B^{-1}A\| \cdot \|B^{-1}C\|},$$

если $|\lambda| \leqslant \|Z_1\|$. Поэтому

$$L(\lambda) = Z_2(\lambda Z_2^{-1}A - E)(\lambda E - Z_1),$$

причем для λ, принадлежащих спектру оператора Z_1, оператор $Z_2\,(\lambda Z_2^{-1}A-E)$ имеет нулевое ядро. Теорема доказана.

Автор благодарит А. Г. Костюченко за постановку задачи.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
30.V.1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Крейн М. Г., Лангер Г. К., К теории квадратичных пучков самосопряженных операторов, Докл. АН СССР, **154**, № 6 (1964), 1258—1261.

[2] Крейн М. Г., Лангер Г. К., О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов, Труды Международного симпозиума по применению теории функций комплексного переменного в механике сплошной среды, М., 1965, 283—322.

[3] Langer H., Über stark gedämpfte Scharen im Hilbertraum, J. of Math. and Mech., **17**, № 7 (1968), 685—706.

[4] Горюк И. В., О факторизации квадратичного операторного пучка, Вестник МГУ, Сер. матем., № 5 (1970), 28—35.