ЧИСЛОВАЯ ОБЛАСТЬ И СПЕКТР СОВМЕСТНЫХ ГОЛОМОРФНЫХ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Г. А. Исаев

1. В настоящее время известны лишь отдельные фрагменты многопараметрической спектральной теории (см. Ф. В. Аткинсон [1], [2]), некоторые идеи и постановки которой восходят к Д. Гильберту [3] и Р. Д. Кармайклу [4]. Следует заметить, что пока не определены инвариантным образом основные понятия, как, например, спектр, корневое подпространство ...

В этой заметке излагается общая концепция к постановке спектральных задач с многими параметрами вокруг понятия спектра.

2. Желая иногда охватывать и случай неограниченных операторов, будем рассматривать замкнутые оператор-функции $A_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, определенные на всюду плотных множествах $\mathscr{D}[A_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)]$ гильбертовых пространств $\mathscr{H}_j$ и голоморфные в области $G \subset \mathbf{C}^n$ в следующем смысле:

1) Области определения $\mathscr{D}[A_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)] \equiv \mathscr{D}_j$ операторов $A_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ не зависят от точек $\lambda \equiv (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

2) Для каждого элемента $x_j \in \mathscr{D}_j$ вектор-функции $A_j(\lambda)x_j$ являются голоморфными от λ в области G $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Заметим, что для ограниченных оператор-функций $A_j(\lambda)$ это определение совпадает с обычным понятием голоморфности по операторной норме.

Обозначим через $[\mathscr{H}_j]$ алгебру всех линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathscr{H}_j$, а через S_j — единичную сферу пространства $\mathscr{H}_j$.

Резольвентным множеством некоторой оператор-функции $A_j(\lambda)$ назовем множество

$$\rho[A_j(\lambda)] = \{\lambda \in G\colon\ \exists A_j^{-1}(\lambda) \in [\mathscr{H}_j]\}.$$

Теперь введем основное

Определение 1. Резольвентным множеством, спектром и числовой областью (или числовым образом) совместных голоморфных оператор-функций $A_j(\lambda)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ назовем соответственно следующие подмножества области $G \subset \mathbf{C}^n$:

$$\rho = \bigcup_{j=1}^{n} \rho[A_j(\lambda)], \quad \sigma = \bigcap_{j=1}^{n} \{G \setminus \rho[A_j(\lambda)]\},$$

$$W = \bigcap_{j=1}^{n} \bigcup_{x_j \in S_j \cap D_j} \{\lambda \in G\colon\ (A_j(\lambda)x_j, x_j) = 0\}.$$

Предложение 1. *Имеют место соотношения*: а) $G = \rho \cup \sigma$; б) $\rho \cap \sigma = \varnothing$; в) ρ — *открытое*, σ — *замкнутое подмножества в* G; г) W *является аналитическим множеством в* G (см. [5]).

3. Для того чтобы совместные голоморфные оператор-функции обладали «правильной» спектральной теорией, нужно требовать некоторое условие «независимости» (или «определенности»).

Определение 2. Оператор-функции $A_j(\lambda)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ называются w-независимыми, соответственно s-независимыми, если для $\forall x_j \in S_j \cap \mathscr{D}_j$ выполняется условие

$$\det\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda_k}(A_j(\lambda)x_j, x_j)\right\} \neq 0,$$

и соответственно

$$\inf_{\substack{x_j \in S_j \cap \mathscr{D}_j \\ \lambda \in G}} \left|\det\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda_k}(A_j(\lambda)x_j, x_j)\right\}\right| > 0.$$

Теорема. *Пусть ограниченные голоморфные оператор-функции* $A_j(\lambda)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *являются* s-*независимыми. Тогда* $\sigma \subset \overline{W}$ (*черта над* W *означает замыкание в* G).

Доказательство этой теоремы основано на вычислении индекса Пуанкаре некоторых гладких циклов (см., например, [6]).

Замечание 1. Условие s-независимости в этой теореме нельзя заменить на w-независимость; в качестве контр-примера достаточно рассмотреть случай $n=1$ и $A_1(\lambda)=A+\lambda B$, где A и B — положительные компактные операторы.

4. Оператор-функции $A_j(\lambda)$ назовем симметрическими, если: 1) область G симметрична относительно R^n (т. е. $\lambda\in G\Rightarrow\overline{\lambda}\in G$) и 2) $[A_j(\lambda)]^*\supset A_j(\overline{\lambda})$. Если вместо 2) требовать $[A_j(\lambda)]^*=A_j(\overline{\lambda})$, то $A_j(\lambda)$ назовем самосопряженными оператор-функциями ($j=1, 2, \ldots$ $\ldots, n$).

Теперь в качестве важного частного случая рассмотрим линейную многопараметрическую спектральную задачу, т. е. совместные голоморфные оператор-функции вида

$$P_j(\lambda)=A_j+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k B_{jk}\qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Предложение 2. *Числовая область W симметричной линейной многопараметрической задачи лежит в R^n,* если только $P_j(\lambda)$ w-независимы.

Предложение 3. *Спектр σ самосопряженной линейной многопараметрической задачи при условии* s-независимости лежит в R^n.

Замечание 2. Для предложения 3 остается справедливым замечание 1 (а также приведенный там контрпример).

Результаты этой заметки после некоторых терминологических изменений распространяются на случай банаховых пространств.

ЛИТЕРАТУРА

[1] F. V. Atkinson, Multiparameter spectral theory, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), 1—27.

[2] F. V. Atkinson, Multiparameter eigenvalue problems, Vol. 1: Matrices, New York, Academic Press, 1972.

[3] D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen Leipzig-Berlin, 1924.

[4] R. D. Carmichael, Boundary value and expansions problems: algebraic basis of the theory, Amer. J. Math. **43** (1921), 69—101.

[5] Р. Ганнинг, Х. Росси, Аналитические функции многих комплексных переменных, М., «Мир», 1969.

[6] Б. В. Шабат, Введение в комплексный анализ, М., «Наука», 1969.

Поступило в Правление общества 10 февраля 1976 г.