К ТЕОРИИ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ГОЛОМОРФНЫХ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ

Г. А. Исаев

1. Пусть $A(\lambda)$ — голоморфная в области $\mathscr{D}$ оператор-функция со значениями в пространстве $[\mathscr{H}]$ линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. $A(\lambda)$ называется самосопряженным, если область $\mathscr{D}$ симметрична относительно действительной оси и $[A(\overline{\lambda})]^* = A(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathscr{D}$.

Цель настоящего сообщения — исследование одного класса самосопряженных голоморфных оператор-функций, намеченное нами в заметке [1]. Этот класс представляет собой далеко идущее обобщение сильно демпфированного пучка, введенного (в случае $\dim \mathscr{H} < \infty$) в работе американского механика Р. Даффина [2]. Детальное исследование сильно демпфированного пучка было проведено М. Г. Крейном и Г. К. Лангером [3], [4].

Нас интересуют вопросы, связанные с кратной полнотой и базисностью некоторых подсистем собственных элементов оператор-функции $A(\lambda)$. Часть результатов является новыми и в случае полиномиальных пучков, исследованиям которых посвящена недавняя работа А. С. Маркуса, В. И. Мацаева, Г. И. Руссу [5].

2. Резольвентным множеством оператор-функции $A(\lambda)$ называется множество

$$\rho[A(\lambda)] \equiv \{\lambda \in \mathscr{D}\colon \exists\, A^{-1}(\lambda) \in [\mathscr{H}]\}.$$

Спектром оператор-функции $A(\lambda)$ называется множество $\sigma[A(\lambda)] = \mathscr{D}\setminus\rho[A(\lambda)]$. Точка $\lambda_0 \in \mathscr{D}$ называется собственным числом $A(\lambda)$, если $\ker A(\lambda_0) \not\equiv \{0\}$, при этом каждый вектор $\varphi \in \ker A(\lambda_0)\setminus\{0\}$ называется собственным элементом оператор-функции $A(\lambda)$, отвечающим собственному числу λ_0.

Займемся вспомогательными построениями, часть из которых представляет, по-видимому, и самостоятельный интерес.

Числовым образом оператор-функции $A(\lambda)$ назовем множество

$$W[A(\lambda)] \equiv \{\lambda \in \mathscr{D}\colon \exists\, \varphi \in \mathscr{H},\quad \|\varphi\| = 1,\quad (A(\lambda)\varphi, \varphi) = 0\}.$$

Лемма 1. *Пусть $A(\lambda)$ — голоморфная оператор-функция, обладающая свойством*

$$\lim_{s\to\infty} (A^{(m)}(\beta)\varphi_s, \varphi_s) \neq 0,$$

где m — некоторое целое неотрицательное число, β — комплексное, вообще говоря, число и $\{\varphi_s\}$ — произвольная последовательность векторов из единичной сферы пространства $\mathscr{H}$. Тогда

$$\sigma[A(\lambda)] \subset \overline{W[A(\lambda)]}.$$

Определение. Целую самосопряженную оператор-функцию $A(\lambda)$ назовем гиперболической, если все корни целой (скалярной) функции $(A(\lambda)\varphi, \varphi)$ вещественны и различны для всех $\varphi \in \mathscr{H}$, $\|\varphi\| = 1$.

В дальнейшем изучаются гиперболические оператор-функции $A(\lambda)$, обладающие свойством $A(0) = I$. С помощью леммы 1 более общие классы можно привести к таким оператор-функциям.

Корни функции $(A(\lambda)\varphi, \varphi)$ можно считать функционалами, определенными на единичной сфере пространства $\mathscr{H}$. Области значений этих функционалов назовем, по аналогии работы [5], спектральными зонами гиперболической оператор-функции $A(\lambda)$.

Лемма 2. *Спектральные зоны гиперболической оператор-функции не пересекаются между собой.*

3. Пусть $k+2$ число спектральных зон Δ_s $(s = 0, 1, \ldots, k+1)$ расположены подряд; для определенности предположим, что эти зоны расстановлены в порядке возрастания индекса s. Спектральные зоны $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ назовем отделенными от других, если $\overline{\Delta}_0 \cap \overline{\Delta}_1 = \overline{\Delta}_k \cap \overline{\Delta}_{k+1} = \varnothing$.

Введем некоторые обозначения. Пусть $[\alpha_s, \beta_s] \equiv \overline{\Delta_s}$ и $\gamma \equiv (\alpha_1 + \beta_k)/2$. В случае отделенности зон $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ от остальных можно определить положительное число r, удовлетворяющее условиям $\beta_0 < \gamma - r < \alpha_1$ и $\beta_k < \gamma + r < \alpha_{k+1}$, и последовательность $\{r_s\}$

$$r_s = \begin{cases} |\alpha_s - \gamma + r|, & \text{если} \quad \alpha_s < \alpha_1, \\ |\beta_s - \gamma - r|, & \text{если} \quad \beta_s > \beta_k. \end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть порядок гиперболической оператор-функции $A(\lambda)$ меньше единицы и $A(\lambda)$ имеет отделенные от других k спектральных зон $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$. Если*

$$\sum_s \frac{|\alpha_s - \beta_s|}{r_s} < \infty, \tag{1}$$

то $A(\lambda)$ допускает k-полиномиальную факторизацию относительно этих зон, т. е. имеет место представление $A(\lambda) = A_2(\lambda) \cdot A_1(\lambda)$ со свойствами:

а) $A_2(\lambda)$ — *обратимая для всех $\lambda \in : \bigcup_{s=1}^{k} \overline{\Delta}_s$ целая оператор-функция и*

б) $A_1(\lambda)$ — *полиномиальный пучок порядка k, причем $\sigma[A_1(\lambda)] \subset \bigcup_{s=1}^{k} \overline{\Delta}_s$.*

4. Перейдем к вопросам полноты и базисности. Следует отметить, что теорема 3 независимо от нас установлена и в работе М. Б. Оразова и Г. В. Радзиевского (личное сообщение).

Теорема 2. *Пусть спектральная зона Δ_1 гиперболической оператор-функции $A(\lambda)$ порядка меньше единицы отделена от других и выполняется соотношение* (1). *Если при некотором $\omega \in \Delta_1$ оператор $A(\omega)$ является вполне непрерывным, то множество $\sigma[A(\lambda)] \cap \overline{\Delta}_1$ состоит из собственных чисел конечной кратности и их предельной точки ω, более того, соответствующие собственные элементы оператор-функции $A(\lambda)$ образуют базис Рисса в $\mathcal{H}$.*

Теорема 3. *Пусть подряд расположенные спектральные зоны $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ гиперболического полиномиального пучка $A(\lambda)$ отделены от других. Если при некоторых $\omega_s \in \overline{\Delta}_s$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$ операторы $A(\omega_s)$ являются вполне непрерывными операторами, то множество $\sigma[A(\lambda)] \cap [\bigcup_{s=1}^{k} \overline{\Delta}_s]$ состоит из собственных чисел конечной кратности пучка $A(\lambda)$ и их предельных точек ω_s $(s = 1, 2, \ldots, k)$; более того, соответствующие собственные элементы образуют k-кратно полную систему в $\mathcal{H}$, если только* $\ker A(\omega_m) = \{0\}$ *для некоторого $m = 1, 2, \ldots, k$.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. А. Исаев, О некоторых пучках операторов, близких к самосопряженным, Тезисы научн. конф. асп. АН Азерб. ССР, Баку, 1973, 10—11.

[2] R. Duffin, A minimax theory for overdamped networks, J. Rational Mech. and Analisis 4:2 (1955), 221—233.

[3] М. Г. Крейн, Г. К. Лангер, О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов, Труды Международного симпозиума по применению теории функций комплексного переменного в механике сплошной среды, М., 1965, 283—322.

[4] H. Langer, Über stark gedampfte Scharen im Hilbertraum, J. of Math. and Mech. 17:7 (1968), 685—706.

[5] А. С. Маркус, В. И. Мацаев, Г. И. Руссу, О некоторых обобщениях теории сильно демпфированных пучков на случай любого порядка, Acta Sci. Math. 34 (1973).

Поступило в Правление общества 4 октября 1973 г.