УДК 517.98

О сингулярных многопараметрических дифференциальных операторах. Теоремы разложения

Исаев Г. А.

Введение

1. За последние 10—12 лет многопараметрическая спектральная теория превратилась в новый обширный раздел функционального анализа и математической физики со своими специфическими задачами, методами и проблемами. Ее характерным признаком является многомерность спектрального параметра: исследуются разрешимость и прочие свойства совокупности уравнений в зависимости от содержащегося в каждом из них набора комплексных параметров. В этом общем смысле многопараметрическая спектральная теория охватывает трудно обозримый круг важных и интересных задач и здесь мы не делаем даже попытку обрисовать основные ее контуры, ограничимся лишь ссылкой на краткое введение работы [1].

Интересующий нас в настоящей работе класс многопараметрических спектральных (коротко — МПС) задач тесно связан с попыткой решения краевых задач методом разделения переменных. Для определенности остановимся на задаче о колебании мембран, имеющих различные формы в состоянии покоя. Если мембрана прямоугольная, то соответствующая задача на собственные значения распадается на две краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, каждое из которых содержит по одному спектральному параметру (см., например, [2, с. 391]). Если же мембрана имеет круговую форму, то после введения полярных координат и последующего разделения переменных возникают две одномерные краевые задачи, первая из которых содержит некоторый спектральный параметр μ, а вторая — два спектральных параметра λ и μ (см. [2, с. 393]). Тогда первая задача на собственные значения решается отдельно; далее, подставляя найденные значения μ_k во второе уравнение, решают однопараметрическую спектральную задачу относительно λ. Рассмотрим теперь колебания эллиптической мембраны, не обращая при этом внимания на вид граничных условий. Другими словами, задано уравнение

$$\Delta w(x, y)+k^2 w(x, y)=0, \quad (x, y)\in G, \tag{0.1}$$

в ограниченной области G, граница которой есть эллипс с фокусами в точках $(-c, 0)$ и $(c, 0)$ действительной прямой. В эллиптических координатах

$$x=c\cos\xi\cdot\operatorname{ch}\eta,\quad y=c\sin\xi\cdot\operatorname{sh}\eta,\quad 0\leqslant\xi<\infty,\ -\pi\leqslant\eta\leqslant\pi,$$

уравнение (0.1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}+c^2k^2(\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta)\,w=0,$$

из которого, в свою очередь, полагая $w(\xi,\eta)=u(\xi)v(\eta)$, выводим

$$u''(\xi)+(\lambda\operatorname{ch}^2\xi-\mu)u(\xi)=0,\quad 0\leqslant\xi<\infty,$$

$$v''(\eta)+(-\lambda\cos^2\eta+\mu)v(\eta)=0,\quad -\pi\leqslant\eta\leqslant\pi, \tag{0.2}$$

где $\lambda=c^2k^2$, постоянная μ есть так называемая константа разделения (см., например, [3], [4]). Особенностью уравнений (0.2) является то, что «константы разделения не разделяются» — оба уравнения содержат обе константы λ и μ.

Система уравнений (0.2) является представителем большого круга МПС задач, возникающего в многочисленных задачах математической физики [3], теории высших трансцендентных функций типа функций Ламе, Матье, эллипсоидальных волновых и т. п. (см., например, [4], [5]). К МПС задачам приводит метод разделения переменных, если рассматриваются задачи на собственные значения для уравнений в частных производных вида

$$(L_x+L_y)w(x,y)=\lambda(M_x+M_y)w(x,y),$$

где дифференциальные операции L_x и M_x (соответственно L_y и M_y) содержат только производные по x (соответственно по y) и коэффициенты которых зависят только от x (соответственно от y).

«...Даже если разделение можно осуществить, могут возникнуть осложнения, которые делают решение краевой задачи практически весьма затруднительным. Эти трудности появляются в случаях..., когда нет полного разделения констант разделения» [3, с. 703].

2. Напишем общий операторный вид МПС задачи, обобщающей упомянутый выше класс примеров многопараметрических задач математической физики. Пусть для каждого индекса $j\in\{1,2,\ldots,n\}$ операторы $A_j, B_{j1},\ldots,B_{jn}$ действуют в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_j$ и $P_j(\lambda)=$ $=A_j+\lambda_1B_{j1}+\ldots+\lambda_nB_{jn}$.

Рассмотрим совокупность уравнений

$$P_j(\lambda)x_j=0,\quad x_j\in\mathscr{H}_j,\quad j=1,2,\ldots,n. \tag{0.3}$$

Эти уравнения объединяются в один набор многомерным спектральным параметром $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$.

Определение 0.1. Набор $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ называется собственным значением МПС задачи (0.3), если $\ker P_j(\lambda)\neq\{0\}$, $j=1,2,\ldots,n$.

Через $\mathscr{H}_1\otimes\ldots\otimes\mathscr{H}_n$ обозначим тензорное произведение гильбертовых пространств $\mathscr{H}_1,\ldots,\mathscr{H}_n$. Оно получается пополнением тензорного произведения линейных пространств $\mathscr{H}_1,\ldots,\mathscr{H}_n$ по метрике, порожденной скалярным произведением

$$(x_1\otimes\ldots\otimes x_n,\ y_1\otimes\ldots\otimes y_n)=(x_1,y_1)\ldots(x_n,y_n)$$

(см. [6], [7]).

Определение 0.2. Вектор $x=x_1\otimes\ldots\otimes x_n$ называется собственным элементом МПС задачи (0.3), отвечающим собственному значению λ, если $x_j\in\ker P_j(\lambda)$, $x_j\neq0$, $j=1,2,\ldots,n$. Для «правильности» теории нужно еще считать, что МПС задача находится в каком-то смысле «в общем положении». Предположим, что выполняется следующее условие определенности (независимости):

$$\det\{(B_{jk}x_j,x_j)\}_{j,k=1}^{n}>0 \tag{0.4}$$

для всех $x_j\in\mathscr{D}[P_j(\lambda)]$, $x_j\neq0$, $j=1,2,\ldots,n$.

Опишем на конечномерном уровне общую схему изучения самосопряженных МПС задач (см. [8], [9], а также [10]). Пусть $A_j \equiv B_{j0}$ и B_{jk}, $j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$,— самосопряженные операторы в конечномерных комплексных эвклидовых пространствах $\mathscr{H}_j$, $j=1, 2, \ldots, n$. Введем совокупность операторов $\Delta_0, \ldots, \Delta_n$, действующих в тензорном произведении $\mathscr{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}_n$ по формуле

$$\Delta_s = (-1)^s \sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma B_{1\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes B_{n\sigma(n)},$$

где $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ пробегает множество всех перестановок из чисел $0, 1, \ldots, s-1, s+1, \ldots, n$; ε_σ — сигнатура перестановки σ. Другими словами,

$$\Delta_s = (-1)^s \det \begin{pmatrix} B_{10} & \ldots & \hat{B}_{1s} & \ldots & B_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{n0} & \ldots & \hat{B}_{ns} & \ldots & B_{nn} \end{pmatrix},$$

где при «раскрытии» определителя вместо обычного произведения употребляется тензорное умножение и, кроме того, $(s+1)$-й столбец (со знаком «$\hat{\ }$»), исключается. Нетрудно видеть, что все операторы Δ_s, $s \in \{0, 1, \ldots, n\}$,— самосопряженные, а условие определенности (0.4) в этом случае эквивалентно положительности оператора $\Delta_0 : (\Delta_0 x, x) > 0$ для всех ненулевых $x \in \mathscr{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}_n$.

Взаимосвязь исходной МПС задачи (0.3) и задачи на совместные собственные значения для набора операторов $\Delta_0^{-1}\Delta_1, \ldots, \Delta_0^{-1}\Delta_n$ является основным методом изучения в этом круге вопросов. Отметим следующие три свойства этого набора операторов: 1) Точка $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ является собственным значением МП задачи (0.3) тогда и только тогда, когда λ — совместное собственное значение операторов $\Delta_0^{-1}\Delta_1, \ldots, \Delta_0^{-1}\Delta_n$, т. е. для некоторого ненулевого $x \in \mathscr{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}_n$ имеет место $\Delta_0^{-1}\Delta_j x = \lambda_j x$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 2) Операторы $\Delta_0^{-1}\Delta_1, \ldots, \Delta_0^{-1}\Delta_n$ попарно перестановочны. 3) Эти операторы самосопряженны относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle = (\Delta_0 \cdot, \cdot)$.

Упомянутые свойства в конечном итоге приводят к теореме:

Из собственных элементов самосопряженной конечномерной МП задачи (0.3) *можно образовать* $\langle \cdot, \cdot \rangle$*-ортонормированный базис пространства* $\mathscr{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}_n$.

3. Двупараметрические (спорадически трех- или n-параметрические) задачи типа (0.3) для различных дифференциальных операторов второго порядка обсуждались в конце XIX и в первой четверти XX столетий многими известными математиками. Вопросами полноты собственных функций (задачи Ламе — Клейна) занимались А. С. Диксон, Е. Гильб и Д. Гильберт в 1907—1910 гг.; соответствующие осцилляционные свойства были изучены Ф. Клейном, М. Бохером, И. Ешикава и Р. Ричардсоном (см. [11]—[14], а также [15], [16]). Впервые общая теорема о разложении по собственным функциям МП регулярной задачи типа Штурма — Лиувилля получена в 1969 г. М. Фаерманом [17] в предположении повышенных условий гладкости от коэффициентов. В своей естественной форме теорема о полноте собственных функций регулярных самосопряженных МП дифференциальных операторов является следствием доказанной Ф. Аткинсоном [9] теоремы о МП задачах с дискретным спект-

ром. Ее можно получить также из структурной теоремы для общих самосопряженных МП задач (см. [1], [18]—[20]; такой вывод содержится в [18] для МПС задачи типа Штурма — Лиувилля, он годится и для уравнений высокого порядка). Кстати отметим, что работы [9], [19], [1], [21] могут дать определенное представление об общей МПС теории; в частности, эти работы содержат обобщения вышеприведенных предложений 1)—3) и теоремы о разложении на бесконечномерный случай (причем операторы $A_1, \ldots, A_n$, вообще говоря, не ограничены, а спектр имеет произвольную природу).

4. Настоящее исследование посвящено МПС теории обыкновенных сингулярных дифференциальных операторов, т. е. случаю, когда A_j — линейные дифференциальные операторы, а $B_{j1}, \ldots, B_{jn}$ — операторы умножения на вещественнозначные функции, при этом либо хотя бы один из интервалов изменения независимых переменных бесконечен, либо среди коэффициентов есть функции с неинтегрируемыми особенностями (точная постановка задачи приводится ниже). В 1972 г. П. Дж. Браун [22] доказал теорему о существовании некоторой «спектральной функции» для сингулярных МП уравнений типа Штурма — Лиувилля (A_j — операторы Штурма — Лиувилля) в случае, когда все независимые переменные пробегают интервал $(0, \infty)$. Им же [23] в 1974 г. был поставлен вопрос о доказательстве подобной теоремы для МП операторов Штурма — Лиувилля, заданных на $(-\infty, \infty)$.

В предлагаемой статье установлено равенство Парсеваля для самосопряженных сингулярных МП обыкновенных дифференциальных операторов произвольных порядков с двумя сингулярными концами с помощью некоторой спектральной матрицы и получено разложение по собственным функциям. Основной результат работы (он сформулирован также в заметке автора [24]) в частном случае МП операторов Штурма — Лиувилля дает решение вышеупомянутой задачи П. Дж. Брауна. Следует отметить, что порядки дифференциальных операторов в рассматриваемой нами многопараметрической задаче не обязательно одинаковы, т. е. они никак не согласованы.

Основная идея доказательства существования спектральной матрицы сингулярных МП дифференциальных операторов состоит в детальном исследовании семейства спектральных матричнозначных мер регулярных МП задач с целью обоснования дальнейшего предельного перехода. В однопараметрическом случае этот метод широко использован в работах Б. М. Левитана и Н. Левинсона, см. [25], [26].

В первом параграфе работы обсуждаются вопросы, связанные с равенством Парсеваля для регулярных самосопряженных МП задач. Во втором параграфе изучен вопрос о слабой сходимости матричных мер семейства регулярных задач, сопоставленного основным сингулярным МП уравнениям. Третий параграф посвящен формулировке и доказательству основных результатов о разложении по собственным функциям сингулярных МП обыкновенных дифференциальных операторов произвольных четных порядков. В последнем параграфе содержатся заключительные замечания.

Автор глубоко благодарен рецензенту, сделавшему ряд полезных замечаний; эти замечания позволили уменьшить объем работы и улучшить первоначальное изложение.

§ 1. Равенство Парсеваля для регулярных самосопряженных многопараметрических задач

1. Пусть при каждом значении индекса $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ имеется самосопряженное дифференциальное выражение

$$l_j(y_j) = (-1)^{k_j} (p_{j0}(x_j) y_j^{(k_j)}(x_j))^{(k_j)} + (-1)^{k_j-1} (p_{j1}(x_j) y_j^{(k_j-1)})^{k_j-1} + \ldots$$
$$\ldots + P_{j,k_j}(x_j) y_j(x_j)$$

с вещественными коэффициентами. Функции y_j определены соответственно в интервале (a_j, b_j), $-\infty \leqslant a_j < x_j < b_j \leqslant +\infty$ и

$$p_{js_j} \in C^{(2k_j-s_j)}((a_j, b_j)),\ s_j = 0, 1, \ldots, 2k_j,$$

причем $p_{j0}(x_j) \neq 0$ для всех $x_j \in (a_j, b_j)$. Будем считать, что хотя бы для одного $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ концы интервала (a_j, b_j) сингулярны относительно дифференциального выражения l_j. Далее, пусть $b_{jk}(x_j)$, $k=1, 2, \ldots, n$,— вещественные непрерывные функции в промежутке (a_j, b_j), удовлетворяющие условию

$$B(x) \equiv \det \{b_{jk}(x_j)\}_{j,k=1}^{n} > 0,\ x_j \in (a_j, b_j). \tag{1.1}$$

Рассмотрим сингулярную многопараметрическую задачу

$$l_j(y_j) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_{jk}(x_j) y_j(x_j) = 0,\ x_j \in (a_j, b_j),\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Для произвольных отрезков $[c_j, d_j] \subset (a_j, b_j)$ через I и V обозначим параллелепипеды $(a, b) \equiv (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ и $[c, d] \equiv [c_1, d_1] \times \ldots$ $\ldots \times [c_n, d_n]$ соответственно. С уравнениями (1.2) и компактным параллелепипедом V свяжем новую, уже регулярную самосопряженную МПС задачу. Для этого при каждом значении $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ возьмем произвольную систему линейных самосопряженных дифференциальных форм на $[c_j, d_j]$. Эти формы зависят от V и это обстоятельство отражаем в обозначениях

$$U_{js_j}^{V}(y_j) = \alpha_{j0} y_j(c_j) + \ldots + \alpha_{j,2k_j-1} y_j^{(2k_j-1)}(c_j) + \beta_{j0} y_j(d_j) + \ldots$$
$$\ldots + \beta_{j,2k_j-1} y_j^{(2k_j-1)}(d_j),$$

$s_j = 1, 2, \ldots, 2k_j$.

Рассмотрим задачу определения значений параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и нетривиальных функций $y_j(x_j)$, удовлетворяющих уравнениям (1.2) на (c_j, d_j)

$$l_j(y_j) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_{jk}(x_j) y_j(x_j) = 0,\ x_j \in (c_j, d_j), j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.3}$$

и краевым условиям

$$U_{j1}^{V}(y_j) = U_{j2}^{V}(y_j) = \ldots = U_{j,2k_j}^{V}(y_j) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.4}$$

Таким образом, сингулярной МП задаче (1.2) сопоставлено семейство (зависящее от V) регулярных МП задач (1.3)—(1.4).

Определение 1.1. Набор параметров $\lambda_V^{(0)} = (\lambda_{1V}^{(0)}, \ldots, \lambda_{nV}^{(0)})$ называется собственным значением МП задачи (1.3)—(1.4), если при $\lambda=\lambda_{jV}^{(0)}$ для всех $j\in\{1,2,\ldots,n\}$ существует нетривиальное решение $y_j(x_j,\lambda_V{}^{(0)})$ каждой краевой задачи из совокупности (1.3)—(1.4). Произведение $y_1(x_1,\lambda_V{}^{(0)})\ldots y_n(x_n,\lambda_V{}^{(0)})$ этих нетривиальных решений называется *собственной функцией* (*собственным элементом*) МПС задачи (1.3)—(1.4), соответствующей собственному значению $\lambda_V{}^{(0)}$.

Легко дать операторную трактовку задаче (1.3)—(1.4) и, тем самым, воспользоваться результатами общей МПС теории. Основными пространствами будут служить $\mathscr{H}_j=L^2([c_j,d_j])$. В качестве области определения $\mathscr{D}(A_j)$ оператора A_j примем множество функций $y_j\in\mathscr{H}_j$, обладающих всеми производными до порядка $2k_j-1$ включительно и таких, что функция $y_j^{(2k_j-1)}(x_j)$ — абсолютно непрерывная на $[c_j,d_j]$, причем выполняются условия (1.4) и $l_j(y_j)\in\mathscr{H}_j$. Положим

$$(A_jy_j)(x_j)=l_j(y_j),\quad y_j\in\mathscr{D}(A_j),\quad (B_{jk}y_j)(x_j)=b_{jk}(x_j)y_j(x_j),$$

$y_j\in\mathscr{H}_j$. Пусть операторы $A_1,\ldots,A_n$ являются самосопряженными. Очевидно, что операторы B_{jk} будут ограниченными и самосопряженными в $\mathscr{H}_j$.

Далее, убедимся, что предположение (1.1) обеспечивает выполнение условия (0.4), и даже более сильного соотношения

$$\det\{(B_{jk}x_j,x_j)\}_{j,k=1}^n\geqslant\delta>0,\ \|x_j\|=1 \tag{1.5}$$

(независимые переменные x_j из (1.2)—(1.3) не путать с «абстрактными» элементами из (0.3)—(0.4)). Достаточно показать, что имеет место

Предложение 1.1. *Справедлива формула*

$$\det\{(B_{jk}y_j,y_j)\}_{j,k=1}^n=\int\limits_V\det\{b_{jk}(x_j)\}_{j,k=1}^n|y_1(x_1)\ldots y_n(x_n)|^2\,dx.$$

Доказательство.

$$\det\{(B_{jk}y_j,y_j)\}_{j,k=1}^n=\det\left\{\int\limits_{c_j}^{d_j}b_{jk}(x_j)y_j(x_j)\overline{y_j(x_j)}\,dx_j\right\}_{j,k=1}^n=$$

$$=\sum_\sigma\varepsilon_\sigma\int\limits_{c_1}^{d_1}b_{1\sigma(1)}(x_1)|y_1(x_1)|^2dx_1\ldots\int\limits_{c_n}^{d_n}b_{n\sigma(n)}(x_n)|y_n(x_n)|^2dx_n=$$

$$=\int\limits_V\det\{b_{jk}(x_j)\}_{j,k=1}^n|y_1(x_1)\ldots y_n(x_n)|^2dx_1\ldots dx_n.$$

Учитывая здесь непрерывность функций $b_{jk}(\cdot)$ придем к справедливости соотношения (1.5).

2. По определению МПС задачу (1.3)—(1.4) считаем самосопряженной, если все операторы A_j самосопряженны, функции $b_{jk}(\cdot)$ вещественны и непрерывны (и следовательно, операторы B_{jk} ограниченные и самосопряженные) и $B(x)>0$ для всех $x\in V$.

Через $L^2(V,B(x)dx)$ обозначим гильбертово пространство измеримых на параллелепипеде V функций $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ таких, что

$$\int\limits_V B(x)|f(x)|^2dx<\infty$$

со скалярным произведением $(f,g)=\int\limits_V B(x)f(x)\overline{g(x)}dx.$

Нетрудно показать, что собственные значения самосопряженной многопараметрической задачи (1.3)—(1.4) вещественны (лежат в $\mathbf{R}^n$), а собственные функции этой задачи, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны в пространстве $L^2(V, B(x)dx)$.

Предложение 1.2. *Существует последовательность вещественных собственных значений*

$$\lambda_V^{(m)} \equiv (\lambda_{1V}^{(m)}, \ldots, \lambda_{nV}^{(m)}),\ m = 1, 2, \ldots,$$

не имеющая конечных предельных точек в $\mathbf{R}^n$, *и соответствующая последовательность ортонормированных в пространстве* $L^2(V, B(x)dx)$ *собственных функций*

$$Y_m^V(x) \equiv Y(x, \lambda_V^{(m)}) = y_1(x_1, \lambda_V^{(m)}) \ldots y_n(x_n, \lambda_V^{(m)}),\ m = 1, 2, \ldots,$$

самосопряженной многопараметрической задачи (1.3)—(1.4), *такие, что для произвольной функции* $f \in L^2(V, B(x)dx)$ *справедливо равенство Парсеваля*

$$\int\limits_V B(x)\,|f(x)|^2\,dx = \sum_{m=1}^{\infty} \left| \int\limits_V B(x) f(x) \overline{Y_m^V(x)}\,dx \right|^2. \tag{1.6}$$

Это предложение может быть получено как следствие общей теории самосопряженных МПС задач. Краткая история таких исследований уже приведена нами во введении к работе.

Через $\varphi_{j1}(x_j, \lambda), \ldots, \varphi_{j,2k_j}(x_j, \lambda)$ обозначим специальный базис пространства решений j-го дифференциального уравнения системы (1.3), определенный начальными условиями в некоторой точке $x_j^{(0)} \in [c_j, d_j]$:

$$\frac{\partial^{r_j-1}\varphi_{js_j}}{\partial x_j^{r_j-1}}(x_j^{(0)}, \lambda) = \begin{cases} 0, & r_j \neq s_j, \\ 1, & r_j = s_j, \end{cases}$$

$r_j = 1, 2, \ldots, 2k_j$, $s_j = 1, 2, \ldots, 2k_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Из общих теорем теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [26]) вытекает, что эти функции при каждом фиксированном значении $x_j \in [c_j, d_j]$ являются целыми голоморфными функциями по каждой переменной λ_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$ при фиксированных остальных. Отсюда пользуясь основной теоремой Гартогса (см. [27]) получаем, что эти функции будут целыми голоморфными функциями (т. е. голоморфными по совокупности переменных в $\mathbf{C}^n$) при любом фиксированном значении $x_j \in [c_j, d_j]$. Нетрудно видеть, что при $\lambda \in \mathbf{R}^n$ все функции φ_{js} вещественнозначные. Произвольное решение может быть представлено в виде линейной комбинации специального базиса

$$y_j(x_j, \lambda_V^{(m)}) = \sum_{s_j=1}^{2k_j} \alpha_{js_j}^{(m)} \varphi_{js_j}(x_j, \lambda_V^{(m)}), \tag{1.7}$$

здесь $\alpha_{js_j}^{(m)}$, $s_j = 1, 2, \ldots, 2k_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $m = 1, 2, \ldots,$— вещественные постоянные. Тогда

$$Y(x, \lambda_V^{(m)}) = \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{s_j=1}^{2k_j} \alpha_{js_j}^{(m)} \varphi_{js_j}(x_j, \lambda_V^{(m)}) \right),\ m = 1, 2, \ldots .$$

Рассмотрим множество всевозможных произведений

$$\varphi_{s_1,\ldots,s_n}(x, \lambda_V^{(m)}) \equiv \varphi_{1s_1}(x_1, \lambda_V^{(m)}) \ldots \varphi_{ns_n}(x_n, \lambda_V^{(m)}).$$

Очевидно, что при фиксированном значении m число таких произведений равно $2^n k_1 \dots k_n$. Далее, рассмотрим множество аналогичных произведений чисел α_{js_j}:

$$\gamma^{(m)}_{s_1,\dots,s_n} \equiv \alpha^{(m)}_{1s_1} \dots \alpha^{(m)}_{ns_n}. \tag{1.8}$$

Теперь собственную функцию $Y(x, \lambda_V^{(m)})$ МПС задачи (1.3)—(1.4) можно представить в виде

$$Y(x, \lambda_V^{(m)}) = \sum_{s_1=1}^{2k_1} \dots \sum_{s_n=1}^{2k_n} \gamma^{(m)}_{s_1,\dots,s_n} \varphi_{s_1,\dots,s_n}(x, \lambda_V^{(m)}). \tag{1.9}$$

Пусть J — некоторый параллелепипед в $\mathbf{R}^n$ (не обязательно замкнутый), замыкание которого совпадает с параллелепипедом $V=[c, d]$. Рассмотрим следующую совокупность функций параллелепипедов:

$$\omega^{r_1,\dots,r_n}_{s_1,\dots,s_n}(J) = \sum_{\lambda_V^{(m)} \in [c,d)} \gamma^{(m)}_{s_1,\dots,s_n} \gamma^{(m)}_{r_1,\dots,r_n}, \tag{1.10}$$

$s_j=1, 2, \dots, 2k_j$, $r_j=1, 2, \dots, 2k_j$, $j=1, 2, \dots, n$. Эта запись означает, что суммирование производится по таким индексам m, для которых собственные значения $\lambda_V^{(m)}$ лежат в открытом справа параллелепипеде $[c, d)$. Число слагаемых указанной суммы конечное, так как множество собственных значений $\lambda_V^{(m)}$, $m=1, 2, \dots$, не имеет конечных предельных точек (см. предложение 1.2).

Очевидно, что $\omega^{r_1,\dots,r_n}_{s_1,\dots,s_n}$ — аддитивная функция параллелепипедов с ограниченной вариацией. Эту функцию можно продолжить до регулярной борелевой меры (знаконеопределенной) $\rho^{r_1,\dots,r_n}_{s_1,\dots,s_n}(V)$. Совокупность мер $\rho^{r_1,\dots,r_n}_{s_1,\dots,s_n}(V)$, $s_j, r_j=1, 2, \dots, 2k_j$, составляет квадратную матрицу

$$\rho_V = \left\{\rho^{r_1,\dots,r_n}_{s_1,\dots,s_n}(V)\right\}$$

размера $(2^n k_1 \dots k_n) \times (2^n k_1 \dots k_n)$, которую мы назовем спектральной мерой (спектральной матрицей) МП задачи (1.3)—(1.4).

Нумерация строк и столбцов этой матрицы осуществляется посредством наборов $(s_1, \dots, s_n) \equiv s$ и $(r_1, \dots, r_n) \equiv r$ соответственно, а сам способ нумерации не так уж важен, лишь бы он был одинаков для строк и столбцов (в дальнейших построениях встретятся только суммы элементов $\rho^{r_1,\dots,r_n}_{s_1,\dots,s_n}(V)$).

Интегрирование функции f относительно матричной меры ρ_V означает суммирование последовательности $f(\lambda_V^{(m)})$ с весами $\gamma_s^{(m)}\gamma_r^{(m)}$, т. е.

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(\lambda)\, d\rho^{r_1,\dots,r_n}_{s_1,\dots,s_n}(V) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma^{(m)}_{s_1,\dots,s_n} \gamma^{(m)}_{r_1,\dots,r_n} f(\lambda_V^{(m)}).$$

Этот факт позволит нам написать интегральный вид равенства Парсеваля (1.5) для самосопряженной многопараметрической задачи (1.3)—(1.4). Действительно, сначала учитывая равенство (1.8), получаем

$$\int_V B(x)|f(x)|^2\,dx=\sum_{m=1}^{\infty}\left|\int_V B(x)f(x)\sum_{s_1=1}^{2k_1}\dots\sum_{s_n=1}^{2k_n}\gamma_s^{(m)}\varphi_s(x,\lambda_V^{(m)})\,dx\right|^2=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{s_1=1}^{2k_1}\dots\sum_{s_n=1}^{2k_n}\gamma_s^{(m)}\int_V B(x)f(x)\,\varphi_s(x,\lambda_V^{(m)})\,dx\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{r_1=1}^{2k_1}\dots\sum_{r_n=1}^{2k_n}\gamma_r^{(m)}\int_V B(x)\overline{f(x)}\,\varphi_r(x,\lambda_V^{(m)})\,dx\right).$$

Далее, каждой функции $f\in L^2(V)$ сопоставим совокупность обобщенных преобразований Фурье (число этих преобразований равно $2^n k_1\dots k_n$)

$$F_s^V(\lambda)=F_{s_1,\dots,s_n}^V(\lambda)\equiv\int_V B(x)f(x)\,\varphi_s(x,\lambda)\,dx,\ \ \lambda\in\mathbf{R}^n. \tag{1.11}$$

Теперь, учитывая эти преобразования (1.11), можем написать искомую интегральную форму равенства Парсеваля (1.6):

$$\int_V B(x)|f(x)|^2\,dx=\int_{\mathbf{R}^n}\sum_{s_1=1}^{2k_1}\dots\sum_{s_n=1}^{2k_n}\sum_{r_1=1}^{2k_1}\dots\sum_{r_n=1}^{2k_n}F_s^V(\lambda)\,F_r^V(\lambda)\,d\rho_s^r(V). \tag{1.12}$$

Полученное резюмируем в виде следующего утверждения:

Предложение 1.3. *Пусть регулярная МПС задача* (1.3)—(1.4) *является самосопряженной и* $\rho_V=\left\{\rho_{s_1,\dots,s_n}^{r_1,\dots,r_n}(V)\right\}$ — *ее спектральная матрица, порожденная совокупностью функций параллелепипедов* $\omega_{s_1,\dots,s_n}^{r_1,\dots,r_n}(V)$ (1.10), *где числа* $\gamma_{s_1,\dots,s_n}^{(m)}$ *определяются из соотношений* (1.7) *и* (1.8). *Через* $F_s^V(\lambda)$ *обозначим обобщенные преобразования Фурье* (1.11) *функции* $f\in L^2(V)$. *Тогда для задачи* (1.3)—(1.4) *имеет место равенство Парсеваля в интегральной форме* (1.12).

Через $\mathscr{L}^2_{\{\rho_V\}}(\mathbf{R}^n)$ обозначим гильбертово пространство вектор-функций $F^V(\lambda)=\{F_{s_1,\dots,s_n}^V(\lambda)\}_{s_j=1,2,\dots,2k_j}$, определенных в $\mathbf{R}^n$ и со значением в комплексном координатном пространстве $\mathbf{C}^{2^n k_1\dots k_n}$, измеримых относительно матричной меры ρ_V и таких, что

$$\int_{\mathbf{R}^n}\sum_{s_1=1}^{2k_1}\dots\sum_{s_n=1}^{2k_n}\sum_{r_1=1}^{2k_1}\dots\sum_{r_n=1}^{2k_n}F_s^V(\lambda)\,\overline{F_r^V(\lambda)}\,d\rho_s^r(V)<\infty,$$

или, символически $\int_{\mathbf{R}^n}|F^V(\lambda)|^2 d\rho_V<\infty$; скалярное произведение элементов $F^V(\lambda)$, $G^V(\lambda)$ из $\mathscr{L}^2_{\{\rho_V\}}(\mathbf{R}^n)$ задается по формуле (в указанной символике) $(F^V,G^V)=\int_{\mathbf{R}^n}F^V(\lambda)\,G^V(\lambda)\,d\rho_V$.

(По поводу аналогичных пространств вектор-функций с матричной мерой на действительной прямой см. [28, с. 503—516].)

Теперь равенство Парсеваля (1.12) можно переписать в виде

$$\|f\|_{L^2(V,B(x)dx)}=\|F^V\|_{\mathscr{L}^2_{\{\rho_V\}}(\mathbf{R}^n)}. \tag{1.13}$$

Настоящий параграф закончим замечанием о характеризации спектральной матрицы (меры) с точки зрения теории функций многих переменных с ограниченной вариацией. При определении функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ с ограниченной вариацией в качестве приращения функции относительно параллелепипеда $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}^n$ можно взять

$$\delta_f([\alpha, \beta]) = \prod_{j=1}^{n} \delta_f^{(j)}([\alpha_j, \beta_j]),$$

где $\delta_j^{(j)}([\alpha_j, \beta_j]) = (x_1, \ldots, x_{j-1}, \beta_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \alpha_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$. Из того факта, что ω_s^r — аддитивная функция параллелепипедов, вытекает существование функции $\rho_s^r(\lambda; V)$, определенной в $\mathbf{R}^n$ и удовлетворяющей соотношению $\omega_s^r(\cdot) = \delta_{\rho_s^r(\lambda; V)}(\cdot)$, т. е. аддитивные функции параллелепипедов исчерпываются приращениями функций, см. [29]. Кроме того, имеет место явная формула, позволяющая найти значения производящей функции $\rho_s^r(\lambda; V)$ посредством значений ω_s^r:

$$\rho_s^r(\lambda; V) = (-1)^{n(0,\lambda)} \omega_s^r [I(0, \lambda)], \ \lambda \in \mathbf{R}^n,$$

где $n(0, \lambda)$ — число отрицательных координат точки $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и

$$I(0, \lambda) = \{t \in \mathbf{R}^n \colon \min\{0, \lambda_j\} \leqslant t_j \leqslant \max\{0, \lambda_j\}, \ \ j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Теперь вместо матричной спектральной меры ρ_V можно было бы изучить спектральную матричную функцию $\rho_V(\lambda) = \left\{\rho_{s_1, \ldots, s_n}^{r_1, \ldots, r_n}(\lambda; V)\right\}$.

Мы ограничимся лишь перечислением некоторых свойств матричной функции $\rho_V(\lambda)$:

a) Если хотя бы одна координата точки $\lambda \in \mathbf{R}^n$ равна нулю, то $\rho_V(\lambda)$ — нулевая матрица.

b) Функция $\lambda \mapsto \rho_V(\lambda)$ непрерывна слева, т. е.

$$\lim_{\varepsilon_1 \downarrow 0, \ldots, \varepsilon_n \downarrow 0} \rho_s^r(\lambda_1 - \varepsilon_1, \ldots, \lambda_n - \varepsilon_n; V) = \rho_s^r(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; V).$$

c) Если J — параллелепипед в $\mathbf{R}^n$, $\bar{J} = [\alpha, \beta]$, то каждая из функций $\rho_s^r(\lambda; V)$ имеет ограниченную вариацию в J, а ее полная вариация находится по формуле

$$T_{\rho_s^r(\lambda; V)}(J) = \sum_{\lambda^{(m)} \in [\alpha, \beta)} |\gamma_s^{(m)} \gamma_r^{(m)}|.$$

d) $\rho_V(\lambda)$ — симметричная знакопостоянная (в теоретико-операторном смысле) матрица.

Можно было бы исследовать семейство матричных функций $\rho_V(\lambda)$, когда V пробегает множество компактных параллелепипедов из $\mathbf{R}^n$ и воспользоваться многомерными вариантами классических теорем Хелли (см. [30]) с целью обоснования предельного перехода в равенстве Парсеваля (1.12). Однако предпочтительнее спектральную матрицу понимать как матричнозначную меру.

§ 2. Семейство спектральных матриц регулярных задач и предельная спектральная матрица сингулярной многопараметрической задачи

Настоящий параграф посвящен технической части доказательства теоремы разложения для многопараметрической сингулярной задачи (1.2) — подробному исследованию семейства спектральных мер ρ_V в зависимости от компактных параллелепипедов $V \subset I$. Если удастся установить слабую сходимость последовательности мер ρ_{V_m} при $V_m \to I$, то можно ожидать, что для предельной спектральной меры $\rho = \left\{\rho_{s_1,\ldots,s_n}^{r_1,\ldots,r_n}\right\}$ будет выполнено равенство Парсеваля типа (1.12) для сингулярной МПС задачи (1.2).

Через $T_\mu([-M, M]^n)$ обозначим полную вариацию меры μ на компактном кубе $[-M, M]^n = [-M, M] \underbrace{\times \ldots \times}_{n} [-M, M]$. Следующее предложение показывает, что полные вариации семейства матричных спектральных мер ρ_V локально равномерно ограничены.

Теорема 2.1. *Для всякого положительного числа M существует не зависящее от V число $C = C(M)$ такое, что*

$$T_{\rho_s^r(V)}([-M, M]^n) \leqslant C \tag{2.1}$$

для всех индексов $s_j, r_j \in \{1, 2, \ldots, 2k_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Сразу же заметим, что неравенство (2.1) достаточно установить для диагональных элементов $\rho_{s_1,\ldots,s_n}^{s_1,\ldots,s_n}(V)$ матрицы ρ_V, так как, учитывая соотношение (1.10), можно написать

$$T_{\rho_s^r(V)}([-M, M]^n) \leqslant \frac{1}{2}\{T_{\rho_s^s(V)}([-M, M]^n) + T_{\rho_r^r(V)}([-M, M]^n)\}.$$

Учитывая это соотношение, будем оценивать снизу правую часть равенства Парсеваля (1.12) с тем расчетом, чтобы интегрирования производились только по диагональным элементам спектральной меры и чтобы подынтегральные выражения были неотрицательными:

$$\int_V B(x)\,|f(x)|^2\,dx \geqslant \int_{[-M,M]} \sum_{s_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{s_n=1}^{k_n} \sum_{r_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{r_n=1}^{k_n} F_s^V(\lambda)\,\overline{F_r^V(\lambda)}\,d\rho_s^r(V) \geqslant$$

$$\geqslant \int_{[-M,M]} \sum_s |F_s^V(\lambda)|^2\,d\rho_s^s(V) - \int_{[-M,M]} \sum_{s\neq r} |F_s^V(\lambda)|\cdot|F_r^V(\lambda)|\cdot|d\rho_s^r(V)| \geqslant$$

$$\geqslant 2 \int_{[-M,M]} \sum_s |F_s^V(\lambda)|^2\,d\rho_s^s(V) - \int_{[-M,M]} \sum_s |F_s^V(\lambda)|\cdot|F_s^V(\lambda)|\,d\rho_s^s(V) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{[-M,M]} \sum_{s\neq r} |F_s^V(\lambda)|\cdot|F_r^V(\lambda)|\,\{d\rho_s^s(V) + d\rho_r^r(V)\} =$$

$$= 2 \int_{[-M,M]} \sum_s |F_s(\lambda)|^2\,d\rho_s^s(V) - \int_{[-M,M]} \sum_s \sum_r |F_s^V(\lambda)|\cdot|F_r^V(\lambda)|\,d\rho_s^s(V).$$

Рассмотрим следующий полином степени n относительно ε: $P(\varepsilon; k_1, \ldots, k_n) = (1+2k_1\varepsilon)\ldots(1+2k_n\varepsilon)$, коэффициентами при ε^k этого полинома служат суммы всевозможных k-кратных произведений чисел $2k_1, \ldots, 2k_n$ (напомним, что $2k_1, \ldots, 2k_n$ — порядки дифференциальных выражений $l_1(y_1), \ldots, l_n(y_n)$ соответственно).

Пусть число $\varepsilon > 0$ выбрано так, что выполняется неравенство

$$2(1-\varepsilon)^{2n} - P^2(\varepsilon; k_1, \ldots, k_n) \geqslant \frac{1}{2}. \tag{2.2}$$

Далее, из начальных условий $(\partial^{q_j-1}\varphi_{js_j}/\partial x_j^{q_j-1})(x_j^{(0)}, \lambda) = \delta_{q_j,s_j}$ и непрерывности функций $(\partial^{q_j-1}\varphi_{js_j}/\partial x_j^{q_j-1})$ (x_j, λ), $q_j = 1, 2, \ldots, 2k_j$, по совокупности переменных (x_j, λ) заключаем, что существует точка $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \ldots$ $\ldots, x_n^{(1)}) \in \mathbf{R}^n$, обладающая следующими свойствами: $x_j^{(1)} > x_j^{(0)}$, $j = 1, 2, \ldots$

$\ldots, n$; $[x^{(0)}, x^{(1)}] \subset V$,

$$|(\partial^{q_j-1}\varphi_{js_j}/\partial x_j^{q_j-1})(x_j, \lambda) - \delta_{q_j,s_j}| \leqslant \varepsilon, \quad x_j \in [x_j^{(0)}, x_j^{(1)}], \lambda \in [-M, M];$$

здесь $\delta_{q_j,s_j} = \begin{cases} 1, & q_j = s_j, \\ 0, & q_j \neq s_j \end{cases}$ — символ Кронекера.

Тогда имеют место неравенства

$$\left|\frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n-n}}{\partial x_1^{q_1-1}\ldots\partial x_n^{q_n-1}}\varphi_s(x,\lambda)\right| \leqslant \prod_{j=1}^{n}(\delta_{q_j,s_j}+\varepsilon)$$

и

$$\left|\frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n-n}}{\partial x_1^{q_1-1}\ldots\partial x_n^{q_n-1}}\varphi_q(x,\lambda)\right| \geqslant (1-\varepsilon)^n \qquad (2.3)$$

для всех точек $x \in [x^{(0)}, x^{(1)}]$, $\lambda \in [-M, M]$.

Введем в рассмотрение функции $\psi_{js_j}(x_j) \in C_t^{2k_j}((a_j, b_j))$, $s_j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, 2k_j$, равные нулю вместе со всеми производными до порядка $2k_j - 1$ включительно вне интервалов $(x_j^{(0)}, x_j^{(1)})$ соответственно, а в этих интервалах удовлетворяющие условиям

$$\psi_{js_j}(x_j) \geqslant 0, \quad \int_{x_j^{(0)}}^{x_j^{(1)}} \psi_{js_j}(x_j)\,dx_j = 1, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Через $\psi_s(x) \equiv \psi_{s_1,\ldots,s_n}(x)$ обозначим функцию $\psi_{1s_1}(x_1)\ldots\psi_{ns_n}(x_n)$. Применяя равенство Парсеваля (1.12) к функции

$$f(x) = \frac{1}{B(x)}\frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n-n}}{\partial x_1^{q_1-1}\ldots\partial x_n^{q_n-1}}\psi_{q_1,\ldots,q_n}(x)$$

и пользуясь вышеприведенной оценкой снизу для правой части равенства Парсеваля, напишем:

$$\int_{[x^{(0)},x^{(1)}]}\frac{1}{B(x)}\left(\frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n-n}}{\partial x_1^{q_1-1}\ldots\partial x_n^{q_n-1}}\psi_q(x)\right)^2 dx \geqslant$$

$$\geqslant 2\int_{[-M,M]}\left|\int_{[x^{(0)},x^{(1)}]}\frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n-n}}{\partial x_1^{q_1-1}\ldots\partial x_n^{q_n-1}}\psi_q(x)\varphi_q(x,\lambda)\,dx\right|^2 d\rho_q^q(V) -$$

$$-\int_{[-M,M]}\sum_s\sum_r\left|\int_{[x^{(0)},x^{(1)}]}\frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n-n}}{\partial x_1^{q_1-1}\ldots\partial x_n^{q_n-1}}\psi_q(x)\varphi_s(x,\lambda)\,dx\right| \times$$

$$\times\left|\int_{[x^{(0)},x^{(1)}]}\frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n-n}}{\partial x_1^{q_1-1}\ldots\partial x_n^{q_n-1}}\right|\psi_q(x)\varphi_r(x,\lambda)\,dx\bigg|\,d\rho_s^s(V).$$

Интегрируя по частям и пользуясь свойствами функции $\psi_q(x)$ и неравенствами (2.3), получаем:

$$\left|\int_{[x^{(0)},x^{(1)}]}\frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n-n}}{\partial x_1^{q_1-1}\ldots\partial x_n^{q_n-1}}\psi_q(x)\varphi_s(x,\lambda)\,dx\right| =$$

$$= \left|\int_{[x^{(0)},x^{(1)}]}\left(\frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n-n}}{\partial x_1^{q_1-1}\ldots\partial x_n^{q_n-1}}\varphi_s(x,\lambda)\right)\psi_q(x)\,dx\right| \leqslant \prod_{j=1}^{n}(\delta_{q_j,s_j}+\varepsilon),$$

$$\left| \int\limits_{[x^{(0)},x^{(1)}]} \frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n-n}}{\partial x_1^{q_1-1}\ldots\partial x_n^{q_n-1}} \psi_q(x)\varphi_q(x,\lambda)\,dx \right| \geqslant (1-\varepsilon)^n,$$

где $\lambda \in [-M, M]$.

Учитывая эти оценки в неравенстве (2.4), получим:

$$\int\limits_{[x^{(0)},x^{(1)}]} \frac{1}{B(x)} \left(\frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n-n}}{\partial x_1^{q_1-1}\ldots\partial x_n^{q_n-1}} \psi_q(x)\right)^2 dx \geqslant 2(1-\varepsilon)^{2n} \int\limits_{[-M,M]} d\rho_q^q(V) -$$

$$- \int\limits_{[-M,M]} \sum_s \sum_r (\delta_{q_1,s_1}+\varepsilon)\ldots(\delta_{q_n,s_n}+\varepsilon)(\delta_{q_1,r_1}+\varepsilon)\ldots(\delta_{q_n,r_n}+\varepsilon)\,d\rho_s^s(V).$$

Нетрудно заметить, что $\sum\limits_r (\delta_{q_1,r_1}+\varepsilon)\ldots(\delta_{q_n,r_n}+\varepsilon) = P(\varepsilon; k_1, \ldots, k_n)$, поэтому

$$\int\limits_{[x^{(0)},x^{(1)}]} \frac{1}{B(x)} \left(\frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n-n}}{\partial x_1^{q_1-1}\ldots\partial x_n^{q_n-1}} \psi_q(x)\right)^2 dx \geqslant 2(1-\varepsilon)^{2n} \int\limits_{[-M,M]} d\rho_q^q(V) -$$

$$-P(\varepsilon; k_1, \ldots, k_n) \int\limits_{[-M,M]} \sum_s (\delta_{q_1,s_1}+\varepsilon)\ldots(\delta_{q_n,s}+\varepsilon)\,d\rho_s^s(V) =$$

$$= 2(1-\varepsilon)^{2n} \int\limits_{[-M,M]} d\rho_q^q(V) - P(\varepsilon; k_1, \ldots, k_n) \int\limits_{[-M,M]} \sum_s \{\varepsilon^n + \varepsilon^{n-1}(\delta_{q_1,s_1}+\ldots$$

$$\ldots+\delta_{q_n,s_n}) + \varepsilon(\delta_{q_1,s_1}\ldots\delta_{q_{n-1},s_{n-1}}+\ldots+\delta_{q_2,s_2}\ldots\delta_{q_n,s_n}) + \delta_{q_1,s_1}\ldots\delta_{q_n,s_n}\}\,d\rho_s^s(V)$$

В предыдущем подынтегральном выражении коэффициентами при ε^k, $k=0, 1, \ldots, n-1$, служат суммы всевозможных различных $(n-k)$-кратных произведений чисел $\delta_{q_1,s_1}, \ldots, \delta_{q_n,s_n}$. Произведя в подынтегральном выражении всевозможные суммирования по индексам $s_1, \ldots, s_n$, получим неравенство

$$\int\limits_{[x^{(0)},x^{(1)}]} \frac{1}{B(x)} \left(\frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n-n}}{\partial x_1^{q_1-1}\ldots\partial x_n^{q_n-1}} \psi_q(x)\right)^2 dx \geqslant 2(1-\varepsilon)^{2n} \int\limits_{[-M,M]} d\rho_q^q(V) -$$

$$-P(\varepsilon; k_1, \ldots, k_n) \int\limits_{[-M,M]} \left\{ \varepsilon^n \sum_s d\rho_s^s(V) + \varepsilon^{n-1}\left[\sum_{s_2=1}^{2k_2} \ldots \sum_{s_n=1}^{2k_n} d\rho_{q_1,s_2,\ldots,s_n}^{q_1,s_2,\ldots,s_n}(V) + \ldots \right.\right.$$

$$\left. \ldots + \sum_{s_1=1}^{2k_1} \ldots \sum_{s_{n-1}=1}^{2k_{n-1}} d\rho_{s_1,\ldots,s_{n-1},q_n}^{s_1,\ldots,s_{n-1},q_n}(V) \right] + \ldots$$

$$\left. \ldots + \varepsilon \left[\sum_{s_n=1}^{2k_n} d\rho_{q_1,\ldots,q_{n-1},s_n}^{q_1,\ldots,q_{n-1},s_n}(V) + \ldots + \sum_{s_1=1}^{2k_1} d\rho_{s_1,q_2,\ldots,q_n}^{s_1,q_2,\ldots,q_n}(V) \right] + d\rho_{q_1,\ldots,q_n}^{q_1,\ldots,q_n}(V) \right\}.$$

Полагая здесь $q_j = 1, 2, \ldots, 2k_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и суммируя эти неравенства по $q_1, \ldots, q_n$, получим

$$\sum_q \int\limits_{[x^{(0)},x^{(1)}]} \frac{1}{B(x)} \left(\frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n-n}}{\partial x_1^{q_1-1}\ldots\partial x_n^{q_n-1}} \psi_q(x)\right)^2 dx \geqslant 2(1-\varepsilon)^{2n} \int\limits_{[-M,M]} \sum_s d\rho_s^s(V) -$$

$$-P(\varepsilon; k_1, \ldots, k_n) \int\limits_{[-M,M]} \{\varepsilon^n 2^n k_1 \ldots k_n + \varepsilon^{n-1} 2^{n-1}(k_2\ldots k_n + \ldots$$

$$\ldots + k_1\ldots k_{n-1}) + 2\varepsilon(k_n + \ldots + k_1) + 1\} \sum_s d\rho_s^s(V).$$

Таким образом,

$$\sum_q \int_{[x^{(0)},x^{(1)}]} \frac{1}{B(x)} \left(\frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n-n}}{\partial x_1^{q_1-1} \ldots \partial x_n^{q_n-1}} \psi_q(x) \right)^2 dx \geqslant [2(1-\varepsilon)^{2n} - P^2(\varepsilon; k_1, \ldots, k_n)] \int_{[-M,M]} \sum_s d\rho_s^s(V).$$

Левая часть этого неравенства не зависит от V, и поэтому, учитывая неравенство (2.2), заключаем, что требуемое неравенство (2.1) установлено. Теорема 2.1 доказана.

Замечание. Как видно из доказательства теоремы 2.1, постоянная C из неравенства (2.1) от краевых условий (1.4) тоже не зависит; необходимо лишь, чтобы порождаемая этими условиями задача (1.3) — (1.4) оказалась самосопряженной.

Следующая теорема, в которой устанавливается существование некой предельной матричной меры, является следствием теоремы 2.1 (см. [30] или [31]).

Теорема 2.2. *Пусть $\mathscr{V}$ — множество компактных параллелепипедов в I, а $\{\rho_V\colon V\in\mathscr{V}\}$ — семейство спектральных мер регулярной самосопряженной МПС задачи* (1.3) — (1.4). *Тогда $\mathscr{V}$ содержит последовательность параллелепипедов V_m, $m=1, 2, \ldots$, обладающую свойствами:*

a) $V_m\to I$ при $m\to\infty$ (т. е., если $V_m=[c_m, d_m]$, то $c_m\to a$, $d_m\to b$ при $m\to\infty$).

b) Последовательность мер ρ_{V_m} слабо сходится к некоторой мере ρ.

Матричную меру $\rho\equiv\left\{\rho_{s_1,\ldots,s_n}^{r_1,\ldots,r_n}\right\}$, $s_j=1, 2, \ldots, 2k_j$, $r_j=1, 2, \ldots, 2k_j$, $j=1, 2, \ldots, n$, назовем предельной спектральной мерой МПС задачи (1.2). Отметим, что основные замечания относительно производящей функции $\rho_V(\lambda)$ аддитивной функции параллелепипедов ω, приведенные в конце § 1, могут быть перенесены и на случай предельной спектральной меры ρ.

§ 3. Равенство Парсеваля и разложение по собственным функциям самосопряженной сингулярной МПС задачи

1. Теперь мы можем приступить к формулировке и доказательству основных результатов настоящей работы — равенства Парсеваля для сингулярной самосопряженной МПС задачи (2.2) с условиями (1.1). Напомним, что для каждой регулярной задачи (1.3) — (1.4), заданной на компактном подпараллелепипеде $V\subset I$, справедливо равенство Парсеваля (1.12) или (1.13). Благодаря свойствам семейства мер ρ_V, где V пробегает множество компактных подпараллелепипедов I, хотим осуществить предельный переход в указанном равенстве (1.12) при $V\to I$. Другими словами, для каждой функции $f\in L^2(I, B(x)dx)$ нужно доказать существование некоторой вектор-функции F из $\mathscr{L}^2_{\{\rho\}}(\mathbf{R}^n)$, для которой

$$\|f\|_{L^2(I,B(x)dx)}=\|F\|_{\mathscr{L}^2_{\{\rho\}}(\mathbf{R}^n)}. \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. *Пусть $\rho=\{\rho_{s_1,\ldots,s_n}^{r_1,\ldots,r_n}\}$ — предельная спектральная мера и $f\in L^2(I, B(x)dx)$. Тогда существует вектор $F\in\mathscr{L}^2_{\{\rho\}}(\mathbf{R}^n)$ такой, что F является пределом в смысле сходимости в $\mathscr{L}^2_{\{\rho\}}(\mathbf{R}^n)$ вектор-функций*

$F^{V}(\lambda)=\{F^{V}_{s_1,\ldots,s_n}(\lambda)\}_{s_j=1,2,\ldots,2k_j}$

$$F^{V}_{s_1,\ldots,s_n}(\lambda)=\int\limits_{V}B(x)f(x)\overline{\varphi_{s_1,\ldots,s_n}(x,\lambda)}\,dx \tag{3.2}$$

при $V\to I$ вдоль компактных параллелепипедов в I, при этом справедливо равенство Парсеваля

$$\int\limits_{I}B(x)\,|f(x)|^2\,dx=\int\limits_{\mathbf{R}^n}\sum_{s}\sum_{r}F_s(\lambda)\,F_r(\lambda)\,d\rho_s^r. \tag{3.3}$$

Доказательство. Сначала введем несколько обозначений. Пусть $B^{(j,k)}(x)$ — алгебраическое дополнение элемента $b_{jk}(x_j)$ матрицы $\{b_{jk}(x_j)\}_{j,k=1}^{n}$. Очевидно, что функция $B^{(j,k)}$ не зависит от переменной x_j. Через L_j обозначим следующую дифференциальную операцию в частных производных от функций $y=y(x_1,\ldots,x_n)$:

$$L_j(y)=(-1)^{k_j}\frac{\partial^{k_j}}{\partial x_j^{k_j}}\left(P_{j0}(x_j)\frac{\partial^{k_j}y}{\partial x_j^{k_j}}\right)+(-1)^{k_j-1}\times$$
$$\times\frac{\partial^{k_j-1}}{\partial x_j^{k_j-1}}\left(P_{j1}(x_j)\frac{\partial^{k_j-1}y}{\partial x_j^{k_j-1}}\right)+\ldots+P_{j,2k_j}(x_j)\,y.$$

Далее, пусть $\mathcal{U}_{js_j}(y)$ — следующая дифференциальная форма в частных производных, соответствующая двум противоположным сторонам $x_j=c_j$, $x_j=d_j$ параллелепипеда V:

$$\mathcal{U}_{js_j}(y)=\alpha_{j0}y\,|_{x_j=c_j}+\ldots+\alpha_{j,2k_j-1}\left.\frac{\partial^{2k_j-1}y}{\partial x_j^{2k_j-1}}\right|_{x_j=c_j}+$$
$$+\beta_{j0}y\,|_{x_j=d_j}+\ldots+\beta_{j,2k_j-1}\left.\frac{\partial^{2k_j-1}y}{\partial x_j^{2k_j-1}}\right|_{x_j=d_j}.$$

Теперь приведем один результат о разделении множества собственных значений МПС задачи (1.3) — (1.4).

Из того, что $B(x)\neq 0$ для всех $x\in V$ и $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ — собственное значение задачи (1.3) — (1.4), *вытекает разрешимость следующей задачи на совместные собственные значения для уравнений в частных производных:*

$$\sum_{k=1}^{n}B^{(k,j)}(x)\,L_k(y)+\lambda_jB(x)\,y=0,$$

$$\mathcal{U}_{j1}(y)=\mathcal{U}_{j2}(y)=\ldots=\mathcal{U}_{j,2k_j}(y)=0,\quad j=1,2,\ldots,n. \tag{3.4}$$

Действительно, умножая j-е краевое условие в (1.4) на функцию $y_1(x_1)\ldots y_{j-1}(x_{j-1})\,y_{j+1}(x_{j+1})\ldots y_n(x_n)$, убедимся в том, что $y(x)=y_1(x_1)\ldots$ $\ldots y_n(x_n)$ удовлетворяет всем краевым условиям из (3.4). Далее, таким же способом получим, что функция $y(x)$ удовлетворяет уравнениям

$$L_j(y)+\sum_{k=1}^{n}\lambda_kb_{jk}(x_j)\,y=0,\ \ j=1,2,\ldots,n,$$

или в векторной форме

$$\begin{pmatrix}L_1(y)\\ \vdots\\ L_n(y)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11}(x_1) & \ldots & b_{1n}(x_1)\\ \vdots & & \vdots\\ b_{n1}(x_n) & \ldots & b_{nn}(x_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1y\\ \vdots\\ \lambda_ny\end{pmatrix}=0.$$

Отсюда, пользуясь условием $B(x)\neq 0$, получим

$$\frac{1}{B(x)}\begin{pmatrix} B^{(1,1)}(x) & \ldots & B^{(n,1)}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ B^{(1,n)}(x) & \ldots & B^{(n,n)}(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_1(y) \\ \vdots \\ L_n(y)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda_1 y \\ \vdots \\ \lambda_n y\end{pmatrix}=0,$$

и, следовательно, функция $y(x)$ является решением всех уравнений из (3.4).

Установленное выше предложение является частным случаем общих результатов о разделении точечного спектра МПС задач, см. [32], [21].

Теорему докажем сначала для функций вида $f(x)=f_1(x_1)\ldots f_n(x_n)$, где функция f_j имеет непрерывные частные производные до $2k_j$-го порядка включительно и обращается в нуль в некоторых окрестностях точек a_j, b_j, т. е. вне некоторого компактного параллелепипеда $V\subset I$ функция f равна нулю.

Тогда, в силу равенства Парсеваля (1.6) для регулярной задачи (1.3) — (1.4), имеем:

$$\int_I B(x)\,|f(x)|^2\,dx=\int_V B(x)\,|f(x)|^2\,dx=\sum_{m=1}^{\infty}\left|\int_V B(x)\,f(x)\,\overline{Y(x,\lambda^{(m)})}\,dx\right|^2=$$

$$=\sum_{\lambda^{(m)}\in[-M,M]}\left|\int_V B(x)\,f(x)\,\overline{Y(x,\lambda^{(m)})}\,dx\right|^2+$$

$$+\sum_{\lambda^{(m)}\notin[-M,M]}\left|\int_V B(x)\,f(x)\,\overline{Y(x,\lambda^{(m)})}\,dx\right|^2,$$

где M — произвольное положительное число.

Если $\lambda^{(m)}\notin[-M,M]$, то хотя бы для одного индекса $q\in\{1,2,\ldots,n\}$ имеем $|\lambda_q^{(m)}|>M$. Далее, так как $\lambda^{(m)}=(\lambda_1^{(m)},\ldots,\lambda_n^{(m)})$, $m=1,2,\ldots,$— последовательность собственных значений, а

$$Y(x,\lambda^{(m)})=y_1(x_1,\lambda^{(m)})\ldots y_n(x_n,\lambda^{(m)}),\ m=1,2,\ldots,$$

— соответствующая ей последовательность собственных функций регулярной многопараметрической задачи, то имеем (см. (3.4)):

$$\sum_{k=1}^{n} B^{(k,j)}(x)\,L_k[Y(x,\lambda^{(m)})]+\lambda_j^{(m)}B(x)\,Y(x,\lambda^{(m)})=0,\quad j=1,2,\ldots,n.$$

Тогда

$$\sum_{\lambda^{(m)}\notin[-M,M]}\left|\int_V B(x)\,f(x)\,\overline{Y(x,\lambda^{(m)})}\,dx\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{M^2}\sum_{\lambda^{(m)}\notin[-M,M]}\left|\int_V f(x)\sum_{k=1}^{n} B^{(k,q)}(x)\,\overline{L_k[Y(x,\lambda^{(m)})]}\,dx\right|^2.$$

Учитывая, что функция $B^{(k,q)}(x)$ не зависит от переменной x_k и все дифференциальные выражения l_k, $k=1,2,\ldots,n$ симметричны, а также учитывая свойства функций f и $Y(x,\lambda^{(m)})$, $m=1,2,\ldots,$ найдем

$$\sum_{\lambda^{(m)}\notin[-M,M]}\left|\int_V B(x)\,f(x)\,\overline{Y(x,\lambda^{(m)})}\,dx\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{M^2}\sum_{\lambda^{(m)}\notin[-M,M]}\left|\int_V\left(\sum_{k=1}^{n} B^{(k,q)}(x)\,L_k(f)\right)\overline{Y(x,\lambda^{(m)})}\,dx\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{M^2}\sum_{m=1}^{\infty}\left|\int_V B(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{B^{(k,q)}(x)}{B(x)}L_k(f)\overline{Y(x,\lambda^{(m)})}\,dx\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{M^2}\int_I \frac{1}{B(x)}\left|\sum_{k=1}^{n} B^{(k,q)}(x)\,L_k(f)\right|^2 dx.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\left|\int_I B(x)\,|f(x)|^2\,dx - \int_{[-M,M]}\sum_s\sum_r F_s(\lambda)\overline{F_r(\lambda)}\,d\rho_s^r(V)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{M^2}\int_I \frac{1}{B(x)}\left|\sum_{k=1}^{n} B^{(k,q)}(x)\,L_k(f)\right|^2 dx. \qquad (3.5)$$

Применяя теорему 2.1, получаем, что в этом неравенстве $\rho_s{}^r(V)$ можно заменить на $\rho_s{}^r(V_m)$, где

$$\lim_{m\to\infty} V_m = I, \quad \lim_{m\to\infty}\rho_s^r(V_m) = \rho_s^r.$$

Далее, согласно теореме 2.2, в неравенстве (3.5) вместо $\rho_s{}^r(V)$ можно взять функцию $\rho_s{}^r$.

Теперь, переходя в полученном неравенстве к пределу при $M\to\infty$, заключаем, что для указанного класса функций f равенство Парсеваля (3.3) установлено.

Пусть $f\in L^2(I,\ B(x)dx)$ и равна нулю вне компактного параллелепипеда $V\subset I$. Через $f^{[m]}$ обозначим последовательность конечных линейных комбинаций функций вида $f_1(x_1)\dots f_n(x_n)\in L^2(I,\ B(x)dx)$, обладающих свойствами:

1) $f_j\in C^{(2k_j)}((a_j,\ b_j))$, $f_j(x_j)=0$ вне некоторого компактного интервала из $(a_j,\ b_j)$, $j=1,\ 2,\ \dots,\ n$;

2) $\lim_{m\to\infty}\int_I B(x)\,|f^{[m]}(x)-f(x)|^2\,dx = 0.$ (3.6)

Рассмотрим последовательность обобщенных преобразований Фурье функций $f^{[m]}$, $m=1,\ 2,\ \dots$:

$$F^{[m]}_{s_1,\dots,s_n}(\lambda) = \int_I B(x)\,f^{[m]}(x)\overline{\varphi_{s_1,\dots,s_n}(x,\lambda)}\,dx.$$

Согласно изложенному выше частному случаю настоящей теоремы имеем:

$$\int_I B(x)\,|f^{[m]}(x)|^2\,dx = \int_{\mathbf{R}^n}\sum_s\sum_r F_s^{[m]}(\lambda)\,\overline{F_r^{[m]}(\lambda)}\,d\rho_s^r. \qquad (3.7)$$

Отсюда, учитывая соотношение (3.6), получаем, что существует вектор-функция $\{F_{s_1,\dots,s_n}(\lambda)\}_{s_j=1,2,\dots,2k_j}$, принадлежащая $\mathscr{L}^2_{\{\rho\}}(\mathbf{R}^n)$, к которой сходится последовательность $\{F^{[m]}_{s_1,\dots,s_n}(\lambda)\}$, $m=1,\ 2,\ \dots,$ в метрике $\mathscr{L}^2_{\{\rho\}}\ (\mathbf{R}^n)$. Далее из определения видно, что

$$F_{s_1,\dots,s_n}(\lambda) = \int_I B(x)\,f(x)\,\overline{\varphi_{s_1,\dots,s_n}(x,\lambda)}\,dx.$$

Теперь, перейдя к пределу при $m\to\infty$ в обеих частях равенства (3.7), убедимся в справедливости равенства Парсеваля (3.3) для указанного выше класса функций f.

Остается рассмотреть общий случай $f \in L^2(I, B(x)dx)$. Положим $f^V(x) = \chi_V(x) f(x)$ для компактного параллелепипеда $V \subset I$ и

$$F^V_{s_1,\ldots,s_n}(\lambda) = \int_I B(x) f^V(x) \overline{\varphi_{s_1,\ldots,s_n}(x,\lambda)}\, dx = \int_V B(x) f(x) \overline{\varphi_{s_1,\ldots,s_n}(x,\lambda)}\, dx.$$

Если V' — другой компактный параллелепипед из I и $V \subset V'$, то из равенства (3.3), справедливость которого для функций типа f^V установлена только что, вытекает:

$$\| \{F^V_{s_1,\ldots s_n}(\lambda)\}_{s_j=1,2,\ldots,2k_j} - \{F^{V'}_{s_1,\ldots,s_n}(\lambda)\}_{s_j=1,2,\ldots,2k_j} \|^2_{\mathscr{L}^2_{\{\rho\}}(\mathbf{R}^n)} =$$
$$= \int_{V' \setminus V} B(x) |f(x)|^2 dx.$$

Отсюда следует существование вектор-функции $\{F_s(\lambda)\}_{s_j=1,2,\ldots,2k_j}$ из $\mathscr{L}^2_{\{\rho\}}(\mathbf{R}^n)$, являющейся пределом в смысле метрики $\mathscr{L}^2_{\{\rho\}}(\mathbf{R}^n)$ семейства вектор-функций $\{F^V_s(\lambda)\}_{s_j=1,2,\ldots,2k_j}$ при $V \to I$ вдоль компактных параллелепипедов из I. Тогда, переходя к пределу в обеих частях равенства Парсеваля для функций f^V при $V \to I$, завершаем доказательство теоремы (3.1).

Замечание. Функции $F_s(\lambda)$, $s_j = 1, 2, \ldots, 2k_j$, существования которых установлены в теореме 3.1, назовем обобщенными преобразованиями Фурье функций $f \in L^2(I, B(x)dx)$ относительно самосопряженной задачи (1.2).

Из доказательства теоремы 3.1 видно, что обобщенные преобразования Фурье функции $f \in L^2(I, B(x)dx)$, равной нулю вне некоторого компактного параллелепипеда (своего для каждой функции) из I, в каждой точке $\lambda \in \mathbf{R}^n$ совпадают соответственно с интегралами

$$\int_I B(x) f(x) \overline{\varphi_{s_1,\ldots,s_n}(x,\lambda)}\, dx, \quad s_j = 1, 2, \ldots, 2k_j.$$

2. Здесь приведем теорему о разложении произвольных функций $f \in L^2(I, B(x)dx)$, вытекающую из равенства Парсеваля (3.3). Сначала докажем одно предложение, утверждение которого можно назвать обобщенным равенством Парсеваля.

Предложение 3.2. *Пусть* $\rho = \{\rho^{r_1,\ldots,r_n}_{s_1,\ldots,s_n}\}$ — *предельная спектральная мера задачи* (1.2), f *и* g — *функции из класса* $L^2(I, B(x)dx)$, *а*

$$F_{s_1,\ldots,s_n}(\lambda),\ G_{s_1,\ldots,s_n}(\lambda),\ s_j = 1, 2, \ldots, 2k_j,$$

— *обобщенные преобразования Фурье этих функций соответственно. Тогда справедливо равенство*

$$\int_I B(x) f(x) \overline{g(x)}\, dx = \int_{\mathbf{R}^n} \sum_s \sum_r F_s(\lambda) \overline{G_r(\lambda)}\, d\rho^r_s. \tag{3.8}$$

Доказательство. Напишем равенство Парсеваля (3.3) для функции $f+g$, $f-g$, $f+ig$, $f-ig$, умножим полученные четыре равенства соответственно на 1, -1, i и $-i$ и просуммируем их; учитывая поляризационное тождество $4f\bar{g} = |f+g|^2 - |f-g|^2 + i|f+ig|^2 - i|f-ig|^2$, непосредственно придем к равенству (3.8).

Теорема 3.3. *Пусть* $\rho = \{\rho^{r_1,\ldots,r_n}_{s_1,\ldots,s_n}\}$ — *предельная спектральная матрица самосопряженной многопараметрической задачи* (1.2) *и*

$f\in L^2(I,\ B(x)dx)$. Тогда справедлива формула разложения

$$f(x)=\int\limits_{\mathbf{R}^n}\sum_s\sum_r F_s(\lambda)\,\varphi_r(x,\lambda)\,d\rho_s^r, \tag{3.9}$$

причем интеграл в формуле (3.9) *сходится в смысле метрики* $L^2(I,\ B(x)dx)$.

Доказательство. Произвольному конечному открытому справа параллелепипеду $\delta\subset\mathbf{R}^n$ сопоставим функцию

$$f_\delta(x)=\int\limits_{\delta}\sum_s\sum_r F_s(\lambda)\,\varphi_r(x,\lambda)\,d\rho_s^r,$$

где $F_s(\lambda)$, $s_j=1,\ 2,\ \ldots,\ 2k_j$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$,— обобщенные преобразования Фурье функции f из пространства $L^2(I,\ B(x)dx)$. Покажем, что имеет место предельное соотношение в $L^2(I,\ B(x)dx)$: $\lim\limits_{\delta\to\mathbf{R}^n} f_\delta=f$.

Пусть V — произвольный компактный параллелепипед, лежащий в I. Введем функцию

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-f_\delta(x), & x\in V,\\ 0, & x\notin V.\end{cases}$$

Тогда

$$\int\limits_V B(x)f_\delta(x)\overline{g(x)}\,dx=\int\limits_V B(x)\overline{g(x)}\left(\int\limits_\delta\sum_s\sum_r F_s(\lambda)\,\varphi_r(x,\lambda)\,d\rho_s^r\right)dx=$$

$$=\int\limits_\delta\sum_s\sum_r F_s(\lambda)\left(\int\limits_V B(x)\overline{g(x)}\,\varphi_r(x,\lambda)\,dx\right)d\rho_s^r.$$

Далее, пользуясь обобщенным равенством Парсеваля (3.8), заключаем, что

$$\int\limits_V B(x)\,|f(x)-f_\delta(x)|^2\,dx=\int\limits_I B(x)f(x)\overline{g(x)}\,dx-\int\limits_V B(x)f_\delta(x)\overline{g(x)}\,dx=$$

$$=\int\limits_{\mathbf{R}^n\setminus\delta}\sum_s\sum_r F_s(\lambda)\,\overline{G_r(\lambda)}\,d\rho_s^r.$$

Здесь $G_r(\lambda)$, $r_j=1,\ 2,\ \ldots,\ 2k_j$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$,— обобщенные преобразования Фурье функции g, которые в данном случае совпадают, соответственно, с интегралами

$$\int\limits_V B(x)g(x)\,\overline{\varphi_r(x,\lambda)}\,dx,\quad r_j=1,\ 2,\ \ldots,\ 2k_j,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Используя теперь неравенство Коши — Буняковского для $\mathscr{L}^2_{\{\rho\}}(\mathbf{R}^n\setminus\delta)$, получаем:

$$\left|\int\limits_V B(x)\,|f(x)-f_\delta(x)|^2\,dx\right|^2\leqslant\left(\int\limits_{\mathbf{R}^n\setminus\delta}\sum_s\sum_r F_s(\lambda)\,\overline{F_r(\lambda)}\,d\rho_s^r\right)\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\mathbf{R}^n}\sum_s\sum_r G_s(\lambda)\,\overline{G_r(\lambda)}\,d\rho_s^r.\right.$$

Ссылаясь на равенство Парсеваля (3.3) для функции $g\in L^2(I,\ B(x)dx)$, находим, что

$$\int\limits_V B(x)\,|f(x)-f_\delta(x)|^2\,dx\leqslant\int\limits_{\mathbf{R}^n\setminus\delta}\sum_s\sum_r F_s(\lambda)\,\overline{F_r(\lambda)}\,d\rho_s^r.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве при $V \to I$, а затем устремляя δ к $\mathbf{R}^n$, убеждаемся в том, что

$$\lim_{\delta \to \mathbf{R}^n} \int_I B(x) |f(x) - f_\delta(x)|^2 dx = 0.$$

Теорема 3.3 доказана.

§ 4. Заключительные замечания

1. В однопараметрическом случае $n=1$ утверждение теоремы 3.1 совпадает с равенством Парсеваля для самосопряженных сингулярных дифференциальных операторов, см. [25], [26] или [28], [33]. Действительно, в этом случае числа $\gamma_s^{(m)}$ совпадают с соответствующими числами $\alpha_s^{(m)}$, см. (1.7) и (1.8) ($s_1 \equiv s$, $k_1 \equiv k$) и поэтому матрица $\rho_V = \{\rho_{sr}(V)\}_{s,r=1}^{2k}$, определяемая с помощью функции интервалов $\omega_{sr}(J) = \sum_{\lambda^{(m)} \in [c,d)} \overline{\alpha_s^{(m)}} \alpha_r^{(m)}$ совпадает с матрицей, состоящей из функций скачков со скачками в собственных значениях, см. [26, с. 286] (для согласования с однопараметрической теорией примем, что $\rho_s^r \equiv \rho_{sr}$, $\omega_s^r \equiv \omega_{sr}$).

2. Предположения о дифференцируемости соответствующих порядков коэффициентов дифференциальных выражений l_j, $j=1, 2, \ldots, n$, могут быть ослаблены (в однопараметрическом случае об этом см., например, в [33]).

3. Если для каждого дифференциального уравнения (1.2) один из концов a_j и b_j является регулярным, то порядок спектральной матрицы $\rho = \{\rho_{s_1,\ldots,s_p}^{r_1,\ldots,r_n}\}_{s_j,r_j=1}^{2k_j}$ может быть понижен. Однако в настоящей работе этот вопрос не исследован.

4. Наконец, обратим внимание на некоторые вопросы теории разложений по собственным функциям самосопряженной многопараметрической задачи (1.2), требующие дальнейшей разработки. Из теоремы 3.1 вытекает, что отображение $f \mapsto F$ представляет собой линейную изометрию пространства $L^2(I, B(x)dx)$ в пространство $\mathscr{L}^2_{\{\rho\}}(\mathbf{R}^n)$. Важный вопрос об условиях унитарности этого отображения остается открытым.

Заметим, что пользуясь рассуждениями, проведенными при доказательстве теоремы 3.3, можно доказать, что для всякой вектор-функции $F \in \mathscr{L}^2_{\{\rho\}}(\mathbf{R}^n)$ функция

$$f_\delta(x) = \int_\delta \sum_s \sum_r F_s(\lambda) \varphi_r(x, \lambda) d\rho_s^r$$

при $\delta \to \mathbf{R}^n$ вдоль конечных параллелепипедов $\delta \subset \mathbf{R}^n$ сходится в метрике $L^2(I, B(x)dx)$ к некоторой функции $f \in L^2(I, B(x)dx)$. Основная трудность состоит в том, чтобы определить, при каких условиях вектор-функция F получается из функции f при помощи преобразований

$$F_{s_1,\ldots,s_n}(\lambda) = \int_I B(x) f(x) \overline{\varphi_{s_1,\ldots,s_n}(x, \lambda)} dx, \quad s_j = 1, 2, \ldots, 2k_j,$$

где равенства понимаются в смысле сходимости в $\mathscr{L}^2_{\{\rho\}}(\mathbf{R}^n)$.

С этой задачей связан также открытый вопрос об условиях единственности предельной спектральной меры ρ многопараметрической задачи (1.2).

Литература

1. *Исаев Г. А.* Вопросы теории самосопряженных многопараметрических задач.— В кн.: Спектральная теория операторов. Тр. 2-й Всесоюзной летней матем. школы по спектр. теории опер., Загульба, 1975, с. 87—102. Баку: Элм, 1979.
2. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
3. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики, т. 1. М.: ИЛ, 1958.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 3. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967.
5. *Arscott F. M.* Periodic differential equations. Oxford: Pergamon Press, 1964.
6. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова Думка, 1965.
7. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики, т. 1. М.: Мир, 1977.
8. *Atkinson F. V.* Multiparameter eigenvalue problems, v. 1. New York: Acad. Press, 1972.
9. *Atkinson F. V.* Multiparameter spectral theory.— Bull. Amer. Math. Soc., 1968, v. 74, p. 1—27.
10. *Binding P., Browne P. J.* A variational approach to multiparameter eigenvalue problems for matrices.— SIAM J. Math. Anal., 1977, v. 8, № 5, p. 763—777.
11. *Hilbert D.* Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Berlin, 1924.
12. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики, т. 1. М.— Л.: Гостехиздат, 1951.
13. *Dixon A. C.* Harmonics expansions of functions of two variable.— Proc. London Math. Soc., 1907, Ser. II, v. 5, p. 411—478.
14. *Айнс Э. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ОНТИ, 1939.
15. *Faierman M.* The expansion theorem in multi-parameter Sturm — Lionville theory.— Lect. Notes Math., 1974, v. 415, p. 137—142.
16. *Исаев Г. А., Аллахвердиев Б. П.* Осцилляционные теоремы для многопараметрических спектральных задач, связанных с дифференциальными уравнениями второго порядка.— В кн.: Спектральная теория операторов, вып. 3, с. 202—221. Баку: Элм, 1980.
17. *Faierman M.* The completeness and expansion theorems associated with the multiparameter eigen-value problem in ordinary differential equations.— J. Diff. Equat., 1969, v. 5, p. 197—213.
18. *Browne P. J.* Abstract multi-parameter theory. I.— J. Math. Anal. Appl., 1977, v. 60, p. 259—273.
19. *Sleeman B. D.* Multi-parameter spectral theory in Hilbert space.— Pitman: Res. Notes Math., 1978, № 22.
20. *Исаев Г. А.* Генетические операторы и многопараметрические спектральные задачи.— ДАН СССР, 1983, т. 268, № 4, с. 785—788.
21. *Исаев Г. А.* Введение в общую многопараметрическую спектральную теорию.— В кн.: Спектральная теория операторов, вып. 3, с. 142—201. Баку: Элм, 1980.
22. *Browne P. J.* A singular multi-parameter eigenvalue problem in second order ordinary differential equations.— J. Diff. Equat., 1972, v. 12, p. 81—94.
23. *Browne P. J.* Multi-parameter problems.— Lect. Notes Math., 1974, v. 415, p. 78—84.
24. *Исаев Г. А.* Разложение по собственным функциям самосопряженных сингулярных многопараметрических дифференциальных операторов.— ДАН СССР, 1981, т. 260, № 4, с. 786—790.
25. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.
26. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.
27. *Ганнинг Р., Росси Х.* Аналитические функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1969.
28. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы, т. 2. Спектральная теория. М.: Мир, 1966.
29. *McShane E. L.* Integration. Princeton, 1944.
30. *Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л.* Интеграл, мера, производная. Общая теория. М.: Наука, 1967.
31. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
32. *Исаев Г. А.* К многопараметрической спектральной теории.— ДАН СССР, 1976, т. 229, № 2, с. 284—287.
33. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

Азербайджанский государственный
университет им. С. М. Кирова
Баку

Поступила в редакцию
18.V.1984