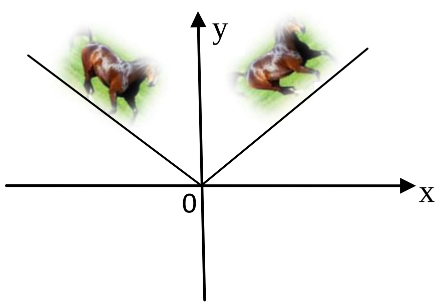
İxtiyar İsmayılov

CƏBR
məntiqi düşünmədə

Cəbri ifadələrin xassələri və onlar üzərində əməllər
Xətti tənliklər sisteminin həlli və araşdırılması
Ədədi bərabərsizliklər və onların xassələri
Bərabərsizliklər sistemi və külliyyatı
Ədədin modulu , tam və kəsr hissəsi
Funksiyalar və onların qrafikləri
Xassələr və onların isbatı
Çalışma həlləri
Çalışmalar



“Riyaziyyat və intellekt” seriyasından

Üçüncü pillə

BAKI - 2010

Kitabı fizika , riyaziyyat və
informatika təmayüllü liseyin
84 - X^q məzunlarına ithaf edirəm.

Rəyçilər:

Asəf Zamanov - fizika - riyaziyyat elmləri doktoru , professor ;
Arif Əhmədov - Bakı PKİY İnstitutunun riyaziyyat və informatika kafedrasının baş müəllimi

Vəsait "Riyaziyyat və intellekt" seriyasının tərkib hissəsi kimi VII – VIII sinif şagirdlərinin təfəkkür fəaliyyəti səviyyəsində yazılmışdır. Müəllifin bu kitabından əvvəl çap olunmuş "Riyaziyyat və intellekt" (2006 - A, B, C variantlarıda üç kitab) , " Həndəsə *məntiqi düşünmədə* " (2008) , " Riyaziyyat *praktiki düşünmədə* " (2009) kitablarında olduğu kimi bu kitabda da şagirdlərin məntiqi düşünmə qabiliyyətləri və intellektual dəyərlərinin inkişafı əsas məqsəd kimi qarşıya qarşıya qoyulmuşdur. Şagirdlərin təfəkkür fəaliyyətini daha da sürətləndirmək və dərinləşdirmək məqsədilə vəsaitə kifayət qədər müvafik anlayış və faktlar, xassə və onların isbatları, misal və çalışma həlli nümunələri, müxtəlif çətinlik dərəcələrinə malik olan məntiqi çalışmalar daxil edilmişdir.

Bundan əlavə çətin mövzuların mənimsənilməsini asanlaşdıran və müəllifə məxsus olan *romantik dialoji təlim metodu* oxucuların hüzuruna təqdim edilir.

Çap və elektron variantı kimi təqdim olunan bu vəsait əsasən qəbul imtahanlarına hazırlaşanlar üçün nəzərdə tutulmuşdur.

Müəllimlər, metodistlər və biliyini müstəqil inkişaf etdirmək istəyənlər də bu kitabdan dəyərlənə bilərlər.

ISBN 978 - 9952 - 8135 - 3 - 1

§1. Ədədi ifadələr

Biz ədədi ifadələr və onlar üzərində əməllərlə artıq tanışıq. Bəzi anlayış və faktları, səmərəli hesablama qaydalarını təkrar olaraq nəzərdən keçirək.

$2 \cdot 5 = 10$;

$4 \cdot 25 = 100$;

$125 \cdot 8 = 1000$.

Xatırlatma*. Yalnız məlum ədədlərdən ibarət olan ifadəyə ədədi ifadə deyilir.*

Məsələn, $24 \cdot 25$; $44 \cdot 75 + 13$; $2,3(9) - 2,39$;
ədədi ifadələrdir. Bu ifadələrin qiymətlərini hesablayın.

Çalışma həlli nümunələri.

Hesablayın:

1. $\left(18\frac{2}{9}\right)^2 - 17\frac{2}{9} \cdot 19\frac{2}{9}$.

$18\frac{2}{9} = a$ işarə edək. Onda $a^2 - (a-1)(a+1) =$
$= a^2 - (a^2 + \cancel{a} - \cancel{a} - 1) = a^2 - a^2 + 1 = \mathbf{1}.$

2. $\frac{0,4}{0,7} + \frac{0,3}{0,07} + \frac{0,05}{0,007}$.

Kəsrlərin surət və məxrəcini uyğun olaraq 10-a, 100-ə, 1000-ə vuraq**:**

$$\frac{0,4}{0,7} + \frac{0,3}{0,07} + \frac{0,05}{0,007} = \frac{4}{7} + \frac{30}{7} + \frac{50}{7} = \mathbf{12}\,.$$

3. $\left(3,625 + 0,25 + 2\frac{3}{7}\right) : (28,75 + 92,25 - 15) : 0,0625$.

1) $3\frac{5}{8} + \frac{1}{4} + 2\frac{3}{7} = 5\frac{35+14+24}{56} = 5\frac{73}{56} = 6\frac{17}{56}$;

2) $28,75 + 92,25 - 15 = 121 - 15 = 106$;

3) $6\frac{17}{56} \mathbf{:} 106 \mathbf{:} \frac{1}{16} = \frac{353}{56} \cdot \frac{1}{106} \cdot 16 = \mathbf{\frac{353}{371}}$.

Səmərəli üsulla hesablamalar:

a) $375 \cdot 16 = (125 \cdot 8) \cdot (3 \cdot 2) = 6000$;
b) $76 \cdot 25 = 19 \cdot 4 \cdot 25 = 19 \cdot 100 = 1900$;
c) $750 \cdot 8 = 125 \cdot 6 \cdot 8 = 6000$;
d) $96 \cdot 25 = 24 \cdot 100 = 2400$;
e) $1 + 2 + 3 + ... + 18 + 19 + 20 = (1+20) +$ $+ (2 + 19) + (3 + 18) + ... = 21 \cdot 10 = 210$;
f) $1+2+3+...+198+199+200 = (1 + 200) +$ $+ (2 + 198) + (3 + 199) + ... = 20100$;
k) $201 + 202 + 203 + ... + 600 = 1 + ... + 600 -$ $- (1 + ... + 200) = 601 \cdot 300 - 201 \cdot 100 = 160200$.

Ədədlərin hasili neçə sıfırla qurtarır:

a) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 20$;
b) $20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot ... \cdot 50$.

Həlli. Ədədlərin hasilində "0" rəqəmi beş və cüt rəqəmin hasilindən əmələ gəldiyi üçün: a) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 20$ hasili 4 sıfırla qurtarır, çünki vuruqların sırasında "5" vuruqlarının sayı dörddür.
b) Eyni qayda ilə alırıq ki, $20 \cdot 21 \cdot ... \cdot 50$ hasili $12 - 3 = 9$ sıfırla qurtarır.

Ç a l ı ş m a l a r

1. Hesablayın: : a) $\left(15\frac{5}{7}\right)^2 - 11\frac{5}{7} \cdot 19\frac{5}{7}$;

b) $\frac{0,1}{0,09} + \frac{0,3}{0,027} + \frac{0,12}{0,054}$;

c) $3\frac{1}{4} + 4\frac{2}{5}\left(2\frac{5}{22} - 2\right) \cdot \frac{3}{4} - 1,5$;

d) $\left(16\frac{7}{9}\right)^2 - 13\frac{7}{9} \cdot 21\frac{7}{9} + 16\frac{7}{9}$;

e) $-2 \cdot (-7) - (-3) : (-5 + 2) - 4 + (-4)$;

f) $6 : |-3| + 5 \cdot |-7 + 2| - (-23)$.

2. 5%-i 7 olan ədədin neçə faizi 5-dir?

3. Nöqtələrin yerində hansı rəqəmlərdir?

a)
$$\begin{array}{r} .\,,3\,. \\ \times\quad \underline{.\,.\,,4} \\ .\,.\,. \\ .\,.\,.\,0 \\ \hline .\,.\,.\,.\,.\,4 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} .\,.\,,. \\ \times\quad \underline{2,.\,7} \\ .\,.\,.\,. \\ .\,.\,. \\ \hline .\,.\,835 \end{array}$$

4. Malın qiymətini 10 % artırdılar, sonra yeni qiyməti $9\frac{1}{9}$ % azaltdılar. Malın qiyməti necə dəyişdi?

5. Malikin pulu Fərqanənin pulundan 40% çoxdursa, Fərqanənin pulu Malikin pulundan neçə faiz azdır?

6. $\frac{1}{7}$ ədədinin onluq kəsrlə yazılışında 1001-ci onluq işarəsi hansı rəqəmdir?

7. Cəmi hesablayın**:**

a) $1 + 2 + 3 + ... + 100$;
b) $101 + 102 + 103 + ... + 200$;
c) $101 + 102 + 103 + ... + 998 + 999 + 1000$.

8. Ədədlərin hasili neçə sıfırla qurtarır:

a) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 50$;
b) $20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot ... \cdot 100$;
c) $101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot ... \cdot 499 \cdot 500$.

§2. Cəbri ifadələr və onlar üzərində əməllər

Tərif: *Ədəd və dəyişənlər üzərində toplama, çıxma, vurma, bölmə , qüvvətə yüksəltmə , kökalma və mötərizələrin köməyi ilə alınan ifadəyə* ***cəbri ifadə*** *deyilir.*

Məsələn, 1,3 xy ; $\frac{x+y}{2}$; $5a^3 + 4a^3b - 2a^2$; $\frac{a+b}{2a-3}$ cəbri ifadələrdir.

Ikirəqəmli, üçrəqəmli və s. ədədlərin ümumi şəkli də cəbri ifadələrdir:

$\overline{ab} = 10a + b$; $\overline{abc} = 100a + 10b + c$; **...**

burada a , b , c ∈ {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, a ≠ 0 .

Cəbri ifadələrin qiymətləri

Dəyişənlərin mümkün ədədi qiymətlərində cəbri ifadənin qiymətinə *cəbri ifadənin qiyməti* deyilir.

Məsələn, a = 0 olduqda $a^3b - a^2b + 3ab - 2$ ifadəsinin qiyməti (-2) ; x = 1, y = 2 olduqda xy - x + 3y + 2 ifadəsinin qiyməti $1 \cdot 2 - 1 + 3 \cdot 2 + 2 = 9$-dur.

Mötərizələrin açılması və oxşar ifadələrin islahı

Mötərizələrin açılmasına aid bir neçə nümunə nəzərdən keçirək:

1) a (b +c) = (b + c) a = ab + ac ; a (b - c) = (b - c) a = ab - ac ;

2) (a +b)(c + d) = a (c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc +bd ;

3) (a - b)(c - d) = a (c - d) - b(c - d) = ac - ad - bc +bd ;

4) $(a + b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = \mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$ **;**

5) $(a - b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = \mathbf{a^2 - 2ab + b^2}$ **;**

6) $(a - b)(a + b) = a^2 + \cancel{ab} - \cancel{ab} - b^2 = \mathbf{a^2 - b^2}$ **;**

7) $(a + b + c)^2 = (a + b + c)(a + b + c) = a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2 = \mathbf{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}$ **.**

Ümumiyyətlə, mötərizələri açarkən bir mötərizənin daxilindəki bütün toplananları digər mötərizədəki bütün toplananlara vurub hasilləri toplamaq lazımdır (qarşısında minus işarəsi olan hədd mənfi işarəli toplanan kimi qəbul edilir).

Çalışma həlli nümunələri

1. a) $b^2 + c^2 = a^2$ olarsa, 2a (a + b - c) - 2b (a - b - c) + + 2c (a - b + c) ifadəsini sadələşdirin;

b) Sadələşdirin: (a + b) (a - b + 1) - (a - b) (a + b - 1) ;

c) a + b + c = 14 , ab + ac +bc = 48 olduğunu bilərək $a^2 + b^2 + c^2$ ifadəsinin qiymətini hesablayın.

Həlləri:

a) $\Rightarrow 2a^2 + \cancel{2ab} - \cancel{2ac} - \cancel{2ab} + 2b^2 + \cancel{2bc} + \cancel{2ac} - \cancel{2bc} + 2c^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 == 2a^2 + 2a^2 = \mathbf{4a^2}$ **;**

b) $\Rightarrow a^2 - ab + a + ab - b^2 + b - (a^2 + ab - a - ab - b^2 + b) = a^2 + a - b^2 + b - a^2 - ab + a + ab + b^2 - b = \mathbf{2a}$ **;**

c) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ düsturunda verilənləri nəzərə alsaq , onda $14^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot 48 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 196 - 96 = \mathbf{100}$ **.**

2. a - b + c =1,3 olarsa, $(b - a - c)^2$ ifadəsinin qiymətini tapın.

Həlli. $(b - a - c)^2 = (a - b + c)^2 = 1{,}3^2 = \mathbf{1{,}69}$ **;**

3. 2a - 6b = 5 olduqda, 3b - a ifadəsinin qiymətini tapın.

Həlli. Verilən bərabərliyin hər tərəfini 2-yə bölək, onda a - 3b = 2,5 , yəni 3b - a = **- 2,5 .**

$\frac{a+b}{2}$, $\frac{x+y+z}{2}$ cəbri ifadələri mənfi olmayan a və b ; x , y və z ədədlərinin ədədi ortasıdır. Ümumiyyətlə, mənfi olmayan $a_1, a_2, \dots, a_n$ ədədlərinin ədədi ortası

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

ifadəsi şəklində yazılır.

Xatırlatma. *Eyni və yaxud yalnız əmsalları ilə fərqlənən hərfi ifadələrə oxşar ifadələr deyilir.*

Qeyd edək ki, bütün məlum ədədi ifadələr də oxşar ifadələrdir.

Oxşar hədləri toplamaq (çıxmaq) üçün onların əmsallarını toplamaq (çıxmaq), hərfi hissəni isə olduğu kimi saxlamaq lazımdır.

Çalışmalar

1. Mötərizələri açın və oxşar hədləri islah edin:

a) (x-1)(x+1) ; b) (x-2)(x+1) ;

c) (x-2)(x-1) ; d) (x-2)(x-3) ;

e) a - b(2 - a) ; f) (a + b)(a - b + c) ;

k) 3(a + 2)(b - 4) + 24 ;

l) ac - (a - b)(a + b + c) ;

n) (2 + b) (a + b + 3) - (ab - 6) .

2. Sadələşdirin:

a) (x-2)(x+2) + 6; b) (x-2)(x-2) - 4;

c) (x+2)(x+2) - x(x+1);

d) (a - b)(b - a) - (a + b)(b - a) ;

e) (a + b)(a - b + c) - c (b + a) ;

f) $3(a^2 - (a - b)(a - b)) + 3b^2$;

k) $(2-a)(3 + b + 3a) + a(b - 6) + 3a^2$.

3. a = - |*a*| , b = |*b*| olduqda ifadələri 0-la müqayisə edin :

a) $a^2b - ab$; b) $ab - a^2b^2$; c) $a^2b - ab^2$; d) $\frac{ab}{a-b}$; e) $\frac{a^2b^3}{b-a}$; f) $\frac{a^3b^2}{a^2+b}$.

§ 3. Cəbri ifadənin vuruqlara ayrılması

Ortaq vuruq anlayışı ilə artıq tanışıq. Cəbri ifadənin vuruqlara ayrılması əsasən ortaq vuruğun mötərizə xaricinə çıxarılması əməliyyatı ilə həyata keçirilir.

Bir ifadənin başqa ifadələrin hasili şəklində göstərilməsi əməliyyatının son nəticəsi ifadənin vuruqlara ayrılması adlanır.

Bir neçə misalı nəzərdən keçirək **:**

a) $ab + ac = a(b + c)$; $2a^2 - 4a = 2a(a - 2)$; $2a^2b^2 + abd = ab(2ab + d)$;

Son ifadəni iki vuruğun hasili şəklində $a(2ab^2 + bd)$ kimi də göstərmək olardı, lakin bu, verilmiş ifadənin vuruqlara ayrılması hesab edilmir.

Ortaq vuruğun mötərizə xaricinə çıxarılmasında bir çox hallarda qruplaşdırma üsulundan istifadə olunur.

b) $ab + ac - bd - dc = a(b + c) - d(b + c) = (b + c)(a - d)$;

c) $\underline{ab} + \underline{ac} - bd - \underline{ad} + b^2 + bc = a(b + c - d) + b(b + c - d) =$
$= (b + c - d)(a + b)$.

Qeyd edək ki, ortaq vuruğun mötərizə xaricinə çıxarılmasının düzgünlüyü mötərizənin açılması qaydası ilə yoxlanılır.

İfadənin vuruqlara ayrılması tənlik və bərabərsizliklərin həllində daha çox istifadə olunur.

Çalışma həlli nümunələri.

1. İfadəni vuruqlara ayırın:

a) $5x^2 + 9xy + 4y^2$; b) $3x^2 + 10xy + 3y^2$;

c) $12x^2 - 25xy + 12y^2$; d) $\frac{ax}{c} + \frac{ay}{d}$.

Həlli. a) $\Rightarrow 5x^2 + 5xy + 4xy + 4y^2 = 5x(x + y) + 4y(x + y) =$
$= (x + y)(5x + 4y)$;

b) $\Rightarrow 3x^2 + xy + 9xy + 3y^2 = x(3x + y) + 3y(3x + y) =$
$= (3x + y)(x + 3y)$;

c) $\Rightarrow 12x^2 - 9xy - 16xy + 12y^2 = 3x(4x - 3y) - 4y(4x - 3y) =$
$= (4x - 3y)(3x - 4y)$;

d) $\frac{ax}{c} + \frac{ay}{d} = a\left(\frac{x}{c} + \frac{y}{d}\right) = a \cdot \frac{dx+cy}{cd}$.

2. Tənliyi həll edin: $x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = 0$

Həlli. Əvvəlcə tənliyin sol tərəfini vuruqlarına ayıraq.
$x^2(x + 2) + 2(x + 2) = (x + 2)(x^2 + 2) = 0$.
İki vuruğun hasili sıfır olduğu üçün bu vuruqlardan heç olmasa biri sıfır olmalıdır:
1) $x + 2 = 0$, $x = -2$; 2) $x^2 + 2 = 0$, $x^2 \neq -2$. Cavab: $x = -2$.

3. Bərabərsizliyi həll edin: $x^3 + 2x^2 + 2x + 4 < 0$.

Həlli. Məlumdur ki, iki vuruğun hasili mənfidirsə, onda onlar əks işarəli qiymətlər alır. Ona görə də $x^3 + 2x^2 + 4x + 2 = (x + 2)(x^2 + 2)$ olduğu üçün $(x + 2)(x^2 + 2) < 0$, buradan alırıq ki, $x + 2 < 0$, çünki $x^2 + 2$ ifadəsi x-in istənilən qiymətində müsbətdir. **Cavab:** $x < -2$.

Çalışmalar

1. Mötərizələri açın :

a) $2x - (1 - (1 - (1 - x)))$ **;**

b) $2 - (2 - (2 - (2 + (1 + x))))$ **.**

2. İfadəni sadələşdirin:

a) $(b + 3)^2 - (-b - 3)^2 + 3$ **;**

b) $a + b - c = 4$, $ab - ac - bc = 8$ olduğunu bilərək $a^2 + b^2 + c^2$ ifadəsinin qiymətini hesablayın.

3. a) 3,4 ; 4,7 və x -in ədədi ortası 3,05-dir. x-i tapın.

b) a-nın hansı qiymətində 1,3 ; 2,8 ; 4,9 ; a ədədlərinin ədədi ortası a-ya bərabərdir?

4. Ailədəki uşaqların yaşlarının ədədi ortası 8-dir. Ata, ana və uşaqların yaşlarının ədədi ortası isə 13-dür. Ata və ananın yaşları cəmi 66-dır. Uşaqların yaşları cəmini tapın.

5. *a*-nın hansı qiymətlərində

a) $a < a^3 < a^2$;

b) $a^3 < a^2 < a$;

c) $a < a^2 < a^3$

bərabərsizlikləri doğrudur ?

6. İfadədə ortaq vuruğu mötərizə xaricinə çıxarın:

a) $34ab + 51ac$; $52a^2 - 39a$;

b) $16x + 48$ **;** $57xy^2 + 38x^2y$.

7. İfadəni vuruqlara ayırın:

a) $x^2 - 3x + 2$;

b) $2x^2 - 9xy + 4y^2$;

c) $x^2y + xy^2 - ax - ay$;

d) $6x^2 - 13xy + 6y^2$.

8. Tənliyi həll edin:

a) $x^2 + x - 2 = 0$;

b) $x^2 - 6x + 5 = 0$;

c) $x^4 + 2x^3 + x + 2 = 0$.

9. İsbat edin ki, n-in istənilən natural qiymətində $n^2 + n + 1$ ifadəsinin qiyməti tək ədəddir .

10. Bərabərsizliyi həll edin:
$x^3 - 2x^2 + 2x - 4 \leq 0$.

11. Bərabərsizliyi ödəməyən natural ədədlərin hasilini tapın:
$x^3 - 5x^2 + x - 5 \geq 0$.

12. $1,4 \leq x \leq 6$ bərabərsizliyini ödəyən bütün tam ədədlərin ədədi ortasını tapın.

§4. Cəbri ifadənin təyin və dəyişmə oblastı

Əvvəlcə **mənası olan** və **mənası olmayan** ifadələrlə tanış olaq. Xatırlayaq ki, sıfıra bölmək mümkün deyil, başqa sözlə kəsrin məxrəci sıfır ola bilməz. Ona görə də kəsrin məxrəci sıfıra bərabər olduqda verilmiş ifadənin mənası yoxdur .

Misallar üzrə mənası olan və mənası olmayan ifadələri dərk etməyə çalışaq.

$0 : 0$ və ya $\frac{0}{0}$; $1 : 0$ və ya $\frac{1}{0}$; $a : 0$ və ya $\frac{a}{0}$

ifadələri **mənası olmayan (**mənasız) **ifadələrdir**, çünki bu ifadələrin müəyyən qiymətləri yoxdur .

Ümumiyyətlə, məxrəcləri sıfırdan fərqli olan bütün kəsrlər, o cümlədən dəyişənlərin ədədi qiymətlərində müəyyən qiymətləri olan bütün cəbri ifadələr **mənası olan** (mənalı) **ifadələrdir.**

Dəyişənin mümkün qiymətləri

Cəbri ifadəyə daxil olan dəyişənin verilmiş qiymətində ifadənin mənası varsa ,onda dəyişənin bu cür qiymətinə ***dəyişənin mümkün qiyməti*** *deyilir.*

İfadənin təyin oblastı (İTO)

Tərif: *Cəbri ifadəyə daxil olan bütün dəyişənlərin mümkün qiymətlər çoxluğuna cəbri* ***ifadənin təyin oblastı*** *deyilir.*

Başqa sözlə, dəyişənin (dəyişənlərin) ifadəni mənalı edən qiymətlər çoxluğu ifadənin təyin oblastıdır.

Cəbri ifadənin təyin oblastını şərti olaraq İTO ilə göstərəcəyik.

Çalışma həlli nümunələri

a) $3x + 2y$; $x - y$; $5a^3 + \frac{1}{b^2+1}$; $|x-1| + 5$ ifadələrində istənilən ədəd dəyişənlərin mümkün qiymətləridir.

İTO: $x , y , a , b \in R$.

b) $a = 1$ olduqda $\frac{3a}{a-1}$ ifadəsinin qiymətini hesablamaq mümkün deyil , çünki $\frac{3}{0}$ mənasız ifadədir.

İTO: $a \neq 1$.

c) $a = 3, b = -2$ olduqda $\frac{3ab}{(a-3)(b+2)}$ ifadəsinin mənası yoxdur. **İTO:** $a \neq 3$, $b \neq -2$.

d) $\frac{2}{|x|-3}$ ifadəsində $x = \pm 3$ dəyişənin mümkün olmayan qiymətləridir. **İTO:** $x \neq \pm 3$.

e) $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ üçrəqəmli ədədi üçün

İTO: $a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$; $b , c \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Çalışmalar

1. Dəyişənin hansı qiymətlərində ifadə 0-a bərabərdir?

a) $13x - 39$; b) $\frac{17x-51}{x-2}$; c) $\frac{2x-2}{x^2-1}$;
d) $(x^3 - 1)(x^2 + 3)$; e) $(x - 4) : (x + 4)$;
f) $\frac{3x+6}{|x|-2}$; k) $\frac{x^2+3}{x+3}$; *l)* $\frac{|x|+5}{x-5}$.

2. Dəyişənin istənilən qiymətində mənası olan ifadəni göstərin:

a) $3x : 2$; b) $3 : (2x)$; c) $\frac{2x-1}{x^2+1}$;
d) $(x - 1)(x + 3)$; e) $(x-1) : (x+3)$;
f) $(x-1) : (x^4 + 3)$; k) $\frac{3x+6}{|x|+2}$.

3. Dəyişənin hansı qiymətlərində ifadənin mənası yoxdur?

a) $5x^2 : 3$; b) $\frac{4}{x-3}$; c) $\frac{2x-1}{x^2+1}$;
d) $(x - 1)(x + 3)$; e) $(x-1) : (x+3)$;
f) $(x-2) : (x^4 + 16)$; k) $\frac{3x+12}{|x|+4}$.

4. Dəyişənin hansı qiymətlərində ifadənin mənası var?

a) $(x^2+1) : (x-3)$; b) $\frac{4x}{x+7}$; c) $\frac{2x+1}{x^2-1}$;
d) $(x^2 - 1)(x^2 + 3)$; e) $\frac{2x+2}{x^2+4}$;
f) $(x^3 -1) : (|x| + 3)$; k) $\frac{3x+3}{|x|-2}$.

5. İfadənin təyin oblastını tapın:

a) $3x^2 + 4x - 5$; b) $\frac{17x-51}{x-3}$; c) $\frac{x-2}{x^2-4}$;
d) $\frac{3x-6}{|x|-2}$; e) $\frac{x^2-3}{x+3}$; f) $\frac{|x|-5}{x-5}$.

6. Tənliyi həll edin:

a) $\frac{3x-6}{|x|-2} = 0$; b) $\frac{x^2-9}{x+3} = 0$; c) $\frac{|x|-5}{x-5} = 0$;
d) $\frac{3x+6}{|x|+2} = 0$; e) $\frac{x^2+9}{x-3} = 0$; f) $\frac{|x|+5}{x+5} = 0$.

7. Sadələşdirin:

a) $5y - (4y - (2y - 1)) + 7y - 4$;
b) $5a - (x - (6a + x)) - 8x + 2a - 8$;
c) $7m - (8m + (6m - (2m - 3))) + 12m$;
d) $3b - (3c - (3b + (6c - 2b)))$.

8. Hansı bənddə səhv var?

a) $2y - y + 2y + 2 = 3y + 2$;
b) $2,3a - 2,4x + 2,7a - 2,6x = 5a - 5x$;
c) $0,3m - 3,3m - m + 3m + 3 = 3 - m$;
d) $2b - 1,2c - b - 4,8c + 5b = 6b - 6c$.

§5. Birməchullu tənliklər

Ümumi tanışlıq

Xatırlatma. *Bərabərlikdə iştirak edən dəyişənin həmin bərabərliyi ödəyən qiymətlərinin axtarılması tələb olunduqda belə dəyişən* ***məchul*** *adlanır.*

Məchulu olan bərabərliyə tənlik deyilir.

Məchulun tənliyi doğru bərabərliyə çevirən ,yəni tənliyi ödəyən qiymətinə tənliyin kökü (həlli) deyilir.

Tənliyin köklər(həllər) çoxluğu tənliyin bütün köklərindən ibarətdir.

Köklər çoxluğu eyni olan (üst-üstə düşən) tənliklər eynigüclü (ekvivalent) tənliklər adlanır.

Kökləri olmayan tənliklər də eynigüclüdür.

Tənliyi həll etmək - tənliyin köklər çoxluğunu tapmaq və yaxud kökün olmamasını isbat etmək deməkdir.

Adından göründüyü kimi birməchullu tənliklərdə yalnız bir məchul iştirak edir. Məsələn:

$5x + 3 = 7$; $2|x| - 3x = 4$; $x^3 - 18 = 6$; $\frac{2}{x^2} = 8$

birməchullu tənliklərdir ;

$5xy + 3 = 7$; $2|x| - 3x = 4y$; $x^3 - 8y = 6$; $\frac{2}{x^2} = 8y$

tənliklərində hər iki dəyişən məchuldursa ,onda bu tənliklər ikiməchullu tənliklərdir.

Tənliklərdə məchuldan başqa digər dəyişən də iştirak etdikdə belə dəyişən *verilən ədəd* və yaxud *parametr* adlanır.

Adətən , məchulları x , y , z , t , u , v hərfləri, parametrləri isə a, b, c , d, m, n, k, p, q hərfləri ilə işarə edirlər.

Tənlikdə parametr iştirak edirsə ,onda tənliyin həlli bu *parametrin müxtəlif qiymətlərinə* görə nəzərdən keçirilir , yəni araşdırılır. Məsələn, $ax - 8 = 6$ tənliyində x- məchul , a - parametrdir. Bu tənliyi həll edərkən a-nın müxtəlif qiymətləri nəzərdən keçirilir: $ax - 8 = 6 \Rightarrow ax = 14$.

a) $a = 0$ olduqda $0 \cdot x = 14 \Rightarrow x = \varnothing$;

b) $a \neq 0$ olduqda $x = \frac{14}{a}$, yəni $a > 0$ olduqda tənliyin müsbət , $a < 0$ olduqda isə tənliyin mənfi kökü vardır.

Məchulun mümkün qiymətlər çoxluğu . Tənliyi ödəyib - ödəməməsindən asılı olmayaraq məchulun bütün mümkün qiymətlər çoxluğuna *tənliyin təyin oblastı* və yaxud *məchulun mümkün qiymətlər çoxluğu* deyilir. Tənlikdə ***mümkün qiymətlər çoxluğu*** yalnız məchula aid olduğundan bu çoxluğu **MQÇ** ilə göstərəcəyik.

Məsələn:

a) $4x - 5 = 8x + 6$, **MQÇ:** $x \in R$;

b) $\frac{x-2}{x-3} + \frac{x}{x+2} = 3$, **MQÇ:** $x \neq 3$, $x \neq -2$;

c) $\frac{x+4}{x(x-3)} + \frac{x}{x+3} = 1$, **MQÇ:** $x \neq \pm 3$, $x \neq 0$;

d) $\frac{x-2}{x^2+1} + \frac{3x}{7} = -3$, **MQÇ:** $x \in R$.

Dəyişənin bütün mümkün qiymətlərində doğru olan bərabərlik *eynilik* adlanır .

Eynilik simvolik olaraq “ ≡ “ işarəsi ilə göstərilir. Məsələn:

a) $3(x - 4) + 4 \equiv 3x - 8$;

b) $1 - 4(2x - 5) \equiv 21 - 8x$;

c) $(a - b)^2 \equiv a^2 + b^2 - 2ab$.

Tənlikdə MQÇ ilə köklər çoxluğu üst-üstə düşdükdə belə tənliyə eynilik kimi də baxmaq olar, əksinə eynilikdəki dəyişənləri məchul hesab etsək ,onda belə eyniliyə tənlik kimi baxmaq olar. Məsələn, x dəyişənini məchul hesab etsək

$3(x - 4) + 4 = 3x - 8$;

$1 - 4(2x - 5) = 21 - 8x$;

$(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$

eyniliklərinə birməchullu tənlik kimi baxa bilərik, belə ki, bu tənliklərin köklər çoxluğu R-dir (R = MQÇ).

Tənlikdə parametr iştirak etdikdə qeyd etdik ki, tənliyin həlli parametrə görə araşdırılır. Bəzən də tənliyin verilmiş kökünə görə parametrin qiyməti tapılır.

Məsələn,

$\frac{x+4}{x-3} + \frac{a}{3-x} = 1$ tənliyinin köklərindən birinin 4 olduğunu bilərək a-nın qiymətini tapaq.

Kökün tərifinə görə

$\frac{4+4}{4-3} + \frac{a}{3-4} = 1$ bərabərliyi doğrudur.

Bu tənliyi həll edib a-nı tapaq:

$8 - a = 1 \Rightarrow$ **a = 7.**

Çalışmalar

1. MQÇ - ni tapın:

a) $14x - 25 = 158x + 666$;

b) $\frac{x+2}{2x-3} + \frac{x-1}{3x+2} = 2009$;

c) $\frac{7x+7}{(x+6)x} + \frac{x+2}{(x-9)(x+2)} = 1001$;

d) $\frac{x-2}{x^2+68} + \frac{3x}{17} = -3333$.

2. k-nın hansı qiymətində tənliyin köklərindən biri 2-dir?

a) $(2x-3)^2 = 2k$; b) $\frac{2k-2}{x-1} = \frac{x+4}{x-3}$;

c) $\frac{k-2}{x^2+1} - \frac{3x^2}{x^2+1} = -3$.

Qeyd.Tənliyin köklər çoxluğu MQÇ-yə daxildir.

§ 6. Xətti tənliklər

Tərif : $ax = b$ şəklində olan tənliyə *xətti tənlik* deyilir. Burada x - məchul , a və b - parametrlərdir.

Məsələn: $2x = 0$; $-\frac{2}{3}x = 7$; $5x = -0{,}5$; $0 \cdot x = 9$; $0 \cdot x = 0$ tənlikləri xətti tənliklərdir ;

$2x^2 = 5$; $\frac{2}{x} = 3$; $x^3 = 8$; $\frac{x-1}{x+1} = 1$; $3x = x^2$ tənlikləri isə xətti tənliklər deyildir.

***ax = b* xətti tənliyinin araşdırılması**

I. $a \neq 0$, $b \in R \Rightarrow x = \frac{b}{a}$, yəni $a \neq 0$ olduqda tənliyin *yeganə həlli* var;

II. $a = 0$, $b = 0 \Rightarrow 0 \cdot x = 0 \Rightarrow x \in R$,yəni $a = b = 0$ olduqda tənliyin *sonsuz sayda həlli* var;

III. $a = 0$, $b \neq 0$ olduqda $0 \cdot x = b \neq 0 \Rightarrow x = \varnothing$, yəni $a = 0$, $b \neq 0$ olduqda *tənliyin həlli yoxdur*.

Misal 1. a-nın hansı qiymətində $(a-3)x = a$ tənliyinin həlli yoxdur ?

Həlli. $a-3 = 0 \Rightarrow 0 \cdot x = 3 \Rightarrow \mathbf{x = \varnothing}$. **Cavab:** $a = 3$.

Misal 2. a-nın hansı qiymətində $ax = a - x$ tənliyinin yeganə həlli var?

Həlli. $ax + x = a \Rightarrow (a+1)x = a$,

$a+1 \neq 0 \Rightarrow \mathbf{x = \frac{a}{a+1}}$. **Cavab:** $a \neq -1$.

Misal 3. a-nın hansı qiymətində $ax - 1 = a - x$ tənliyinin sonsuz sayda həlli var?

Həlli. $ax + x = a + 1 \Rightarrow (a+1)x = a + 1$,

$a+1 = 0 \Rightarrow 0 \cdot x = 0 \Rightarrow x \in R$. **Cavab:** $a = -1$.

Misal 4. a-nın hansı qiymətində $a^2x = 4 - a + 16x$ tənliyinin həlli yoxdur?

Həlli. $a^2x - 16x = 4 - a \Rightarrow (a^2 - 16)x = 4 - a$,

$a^2 - 16 = 0$ və $4 - a \neq 0 \Rightarrow a = \pm 4$ və $a \neq 4$.

Cavab: $a = -4$.

Misal 5. $ax + 7 = 4a - 5ax$ tənliyinin köklərindən biri (-1)-dir. a-nı tapın.

Həlli. Kökün tərifinə görə $a \cdot (-1) + 7 = 4a - 5a \cdot (-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow -a - 4a - 5a = -7 \Rightarrow a = \frac{7}{10} = 0{,}7$. **Cavab:** $a = 0{,}7$.

Misal 6. $a^2x - 3 = 4 - 5x$ tənliyinin köklərindən birinin 0,5 olduğunu bilərək a-nı tapın.

Həlli. Şərtə görə $a^2 \cdot 0{,}5 - 3 = 4 - 5 \cdot 0{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 \cdot 0{,}5 = 4{,}5 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$. **Cavab:** $a = \pm 3$.

Misal 7. a-nın hansı qiymətində $ax = 2 - 3x$ tənliyinin bütün kökləri müsbətdir.

Həlli. $ax + 3x = 2 \Rightarrow (a+3)x = 2$,

$a + 3 > 0 \Rightarrow x = \frac{2}{a+3} > 0$. **Cavab:** $a > -3$.

Çalışmalar

1. Tənliyi həll edin :

a) $(2x-3) + 4(x-2) = 2 - 6x$;
b) $2(x-3) - (7x-5) = 2 - 5x$;
c) $3 - 2(4x-2) - 5(x-2) = 4$;
d) $(3 + 2x)(4x-2) - 5x(x-2) = 4 + 3x^2$;
e) $2(2x-3)x - 4(x-2)x = b$;
f) $(2x - a) + 4(x - a) = 2$.

2. a-nın hansı qiymətlərində tənliyin yeganə həlli var?

a) $7x - a = ax - 2$; b) $4x + 2a = ax - 2a$.

3. a-nın hansı qiymətlərində tənliyin həlli yoxdur?

a) $a - 4x = ax + a$; b) $a + x = ax + 2a - 1$.

4. a və b-nin hansı qiymətlərində tənliyin sonsuz sayda həlli var?

a) $a^2x = 2b + 9x$; b) $ax - 3 = bx + b$.

5. Tənliyi həll edin :

a) $3x - 2 = 2ax + 5$; b) $1 - x + a = a^2x$;
c) $|ax - 1| = a$; d) $|2ax + 1| = a + 1$.

6. Parametrin hansı qiymətlərində mülahizə doğrudur?

a) $(a-5)x = 6 \Rightarrow x = \varnothing$; b) $ax = 3 \Rightarrow x < 0$;
c) $(a+3)x = -9 \Rightarrow x \in R$; d) $ax = 1 \Rightarrow x = 1$.

7. Üç qardaş pul qoyub bir heyvan aldı. Böyük qardaş o birilərinin qoyduğundan iki dəfə çox, ortancıl qardaş o birilərinin qoyduğundan 30 manat az, kiçik qardaş isə böyük qardaşın qoyduğu pulun $\frac{1}{4}$ hissəsi qədər pul qoydu. Qardaşlar heyvanı neçə manata almışdılar?

8. A şəhərindən 60 $\frac{km}{saat}$ sürətilə çıxan avtomobildən bir qədər sonra həmin şəhərdən eyni istiqamətdə 80 $\frac{km}{saat}$ sürətilə ikinci avtomobil yola düşdü və birinci avtomobilə A şəhərindən 120 km məsafədə çatdı. İkinci avtomobil birinci avtomobildən neçə saat sonra yola düşmüşdü?

9. İki ardıcıl cüt ədədin hasili bunların ardınca gələn iki ardıcıl tək ədədin hasilindən 51 vahid kiçikdir.Tək ədədlərdən kiçiyi neçədir?

10. Çayda kater bir istiqamətdə 5 saata getdiyi yolu əks istiqamətdə 6 saata gedərək cəmi 240 km yol getmişdir. Katerin öz sürətini tapın.

§7. Kəsr - xətti tənliklər

Tərif: $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{kx+m}{px+q}$ şəklində olan tənliyə kəsr-xətti tənlik deyilir , burada $c \neq 0$ və ya $p \neq 0$.

Məsələn: $\frac{1}{x} = 2$; $\frac{x-1}{x+2} = 5$; $\frac{2x+3}{5x-4} = \frac{3x-4}{x+2}$ kəsr-xətti tənliklərdir.

Aydındır ki, c və p parametrləri eyni zamanda 0-a bərabər olsa, onda kəsr-xətti tənlik xətti tənliyə çevrilir.

Kəsr-xətti tənliyin həlli xətti tənliyin həllinə gətirilir.

Kəsr - xətti tənliklərin həll nümunələri

a) $\frac{a}{b} = 0$ şəklində olan tənliyin həllində kəsrin 0-a bərabər olması şərtindən istifadə olunur:

$\frac{a}{b} = 0 \Rightarrow a = 0,\ b \neq 0.$

Məsələn, $\frac{7x-1}{x-2} = 0 \Rightarrow 7x - 1 = 0,\ (x - 2 \neq 0) \Rightarrow \mathbf{x = \frac{1}{7}}$;

b) $\frac{a}{b} = \frac{c}{b}$ şəklində olan tənliyin həllində

$\frac{a}{b} = \frac{c}{b} \Rightarrow a = c,\ b \neq 0$.

mülahizəsindən istifadə olunur, çünki $\frac{a}{b} = \frac{c}{b} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a-c}{b} = 0 \Rightarrow a - c = 0,\ b \neq 0 \Rightarrow a = c,\ b \neq 0$.

Məsələn: a) $\frac{4x-1}{x-3} = \frac{x+8}{x-3}$, MQÇ : $x \neq 3$

a) $\Rightarrow$ 4x -1 = x + 8 $\Rightarrow$3x = 9 $\Rightarrow$ x = 3 . Cavab: **x = ∅.**

b) $\frac{x-1}{x-2} = \frac{x+4}{2-x}$, MQÇ : $x \neq 2$

b) $\Rightarrow$ x -1 = - x - 4 $\Rightarrow$ 2x = - 3 $\Rightarrow$ x = -1,5. Cav: x = -1,5.

c) $\frac{a}{b} = \frac{a}{c}$ şəklində olan tənliyin həllində

$\frac{a}{b} - \frac{a}{c} = 0 \Rightarrow a\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) = 0 \Rightarrow a \cdot \frac{c-b}{bc} = 0$

mülahizələrindən istifadə olunur.

Məsələn, $\frac{x+3}{3x-5} = \frac{x+3}{2x-6}$, MQÇ : $x \neq 1\frac{2}{3}$, $x \neq 3$.

$\frac{x+3}{3x-5} - \frac{x+3}{2x-6} = 0 \Rightarrow (x+3)\left(\frac{1}{3x-5} - \frac{1}{2x-6}\right) = 0 \Rightarrow$

$(x+3) \cdot \frac{2x-6-(3x-5)}{(3x-5)(2x-6)} = 0 \Rightarrow (x+3)(2x-6 -3x+5) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (x+3)(-x-1) = 0 . Cavab: x = - 3 , x = - 1.

d) Qabda 30 kq duz məhlulunun yarısını axıtdılar. Su töküb qabı yenidən doldurdular. Məhlulun $\frac{1}{3}$ -ni yenidən axıtdıqdan sonra qabda 4 kq duz qaldı . Məhlulun ilk qatılılığı neçə faiz idi?

Həlli. Məhlulun ilk qatılılığı x % olsun. Onda qabda $30 \cdot \frac{x}{100} = 0,3$ x kq duz var idi. Məhlulun $\frac{1}{2}$ - ni axıtdıqda qabda duzun $\frac{1}{2}$ hissəsi, yəni $0,3x \cdot \frac{1}{2} = 0,15x$ kq duz qaldı. Qabı su ilə doldurduqda duzun miqdarı dəyişmədiyi üçün ikinci dəfə məhlulun $\frac{1}{3}$ -ni axıtdıqda qabda duzun $\frac{2}{3}$ hissəsi, yəni $0,15x \cdot \frac{2}{3} = 0,1x$ kq duz qaldığından

0,1 x = 4 $\Rightarrow$ x = 40. **Cavab**: 40 % .

Çalışmalar

1. Tənliyi həll edin :

a) $\frac{x-1}{x-2} = \frac{3x+4}{x-2}$; b) $\frac{x+4}{x-3} = \frac{x}{3-x}$;

c) $\frac{x+4}{x-1} + \frac{x}{5-x} = 0$; d) $\frac{x-2}{x^2+1} - \frac{3x^2}{x^2+1} = -3$;

e) $4 = \frac{3x+4}{x-2}$; f) $\frac{x+4}{x-3} = 5$;

k) $\frac{x+4}{x-3} + \frac{x}{3-x} = 1$; *l*) $\frac{2x+3}{3x-4} = \frac{2x-4}{3x+2}$.

2. k-nın hansı qiymətində tənliyin köklərindən biri 2-dir?

a) $\frac{(3x+4)(4x-3)}{x+3} = 2k + 7$; b) $\frac{2k-2}{x-3} = \frac{x+4}{x-5}$.

3. a-nın hansı qiymətində tənliyin həlli yoxdur :

$\frac{3x+4}{x+2} = 2a$?

4. a-nın hansı qiymətində tənliyin sonsuz sayda həlli var:

$\frac{ax-1}{x-2} = 2$?

5. Bir nasos təklikdə boş hovuzu 3 saata, ikinci nasosla birlikdə boş hovuzu 2 saata doldurur.İkinci nasos tək işləsə 4 saata boş hovuzun hansı hissəsini doldurar?

6. Adi kəsrin surəti məxrəcindən 3 vahid kiçikdir. Bu kəsrin surətinə 2, məxrəcinə 4 əlavə etsək kəsrin qiyməti dəyişməz. Əvvəlki kəsri tapın.

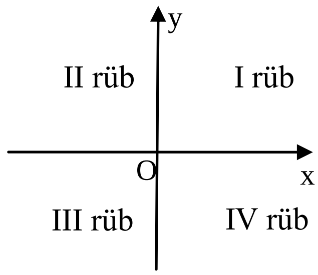
7. 200 q 30 % -li duz məhluluna nə qədər duz əlavə etmək lazımdır ki, 50 % -li məhlul alınsın.

8. 36 % -li duz məhlulunun $\frac{1}{3}$ - ni axıtdılar. Su töküb qabı yenidən doldurdular. Yenə məhlulun $\frac{1}{3}$ - ni axıdıb sonra su töküb qabı yenidən doldurdular . Qabda neçə faizli düz məhlulu qaldı?

9. Qabda 40 kq duz məhlulunun yarısını axıtdılar. Su töküb qabı yenidən doldurdular. Məhlulun $\frac{1}{4}$ -ni yenidən axıtdıqdan sonra qabda 5 kq duz qaldı . Məhlulun ilk qatılılığı neçə faiz idi?

§8. Müstəvidə düzbucaqlı koordinat sistemi

Müstəvidə düzbucaqlı koordinat sistemi iki qarşılıqlı perpendikulyar Ox və Oy ədəd düz xətlərindən təşkil olunur.



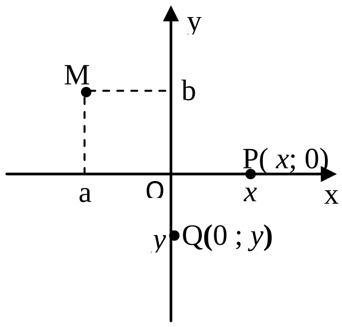
Koordinat başlanğıcı. Ox və Oy ədəd oxlarının O kəsişmə nöqtəsi koordinat başlanğıcı adlanır.

Koordinat oxları. Ox və Oy ədəd oxlarına koordinat oxları deyilir. Qısa olaraq onlara x və y oxları da deyirlər.

Üfiqi ox (x oxu) *absis* , şaquli ox (y oxu) *ordinat* oxu adlanır.

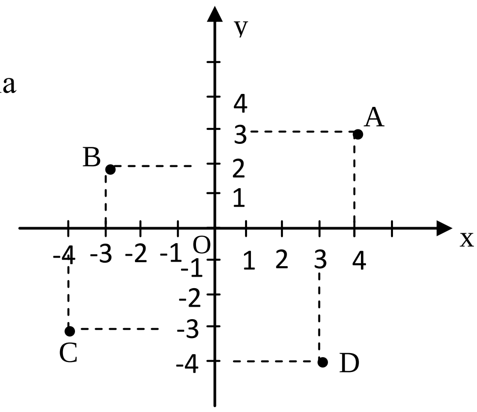
Oxların istiqaməti *müsbət*, əks istiqamət *mənfi istiqamət* qəbul edilir.Ona görə də, absis oxunun O nöqtəsindən soldakı hissəsi mənfi, sağdakı hissəsi müsbət; *ordinat* oxunun O nöqtəsindən aşağıdakı hissəsi mənfi, yuxarıdakı hissəsi müsbət ədədlərdən ibarətdir.

Qeyd. Absis və ordinat oxlarının ölçü vahidləri eyni olmaya da bilər.



Koordinat müstəvisi. Ox və Oy ədəd oxlarının yerləşdiyi müstəvi *koordinat müstəvisi* adlanır. Aydındır ki, x və y oxları müstəvini 6 hissəyə bölür. Bu hissələrdən 4-ü koordinat bucaqları (rüblər) adlanır və şəkildəki kimi sıralanır: I rüb , II rüb , III rüb , IV rüb .

Digər iki hissə absis və ordinat oxları üzərindəki nöqtələr çoxluğudur, çünki x və y oxları üzərindəki nöqtələr rüblərə aid deyil.



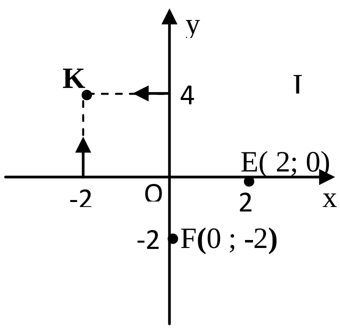
Nöqtənin koordinatları. M nöqtəsindən absis və ordinat oxuna perpendikulyarlar endirək.Bu perpendikulyarla absis və ordinat oxlarının kəsişmə nöqtələri uyğun olaraq nöqtənin *absisi* və *ordinatı* adlanır və M(a;b) kimi işarə edilir. Koordinat başlanğıcı koordinatlarla O(0;0) kimi yazılır.

Absis oxu üzərindəki hər bir nöqtənin *ordinatı* 0-dır, absisi isə bu nöqtəyə uyğun olan ədəddir. Məsələn, P(*x* ; 0)

Ordinat oxu üzərindəki hər bir nöqtənin *absisi* 0-dır , ordinatı isə bu nöqtəyə uyğun olan ədəddir. Məsələn, Q(0 ; *y*)

A nöqtəsinin absis və ordinatına bu nöqtənin *koordinatları* deyilir. A nöqtəsinin absisi onun 1-ci , ordinatı isə 2-ci koordinatı olduğu üçün nöqtənin koordinatlarının yazılışında *əvvəlcə absis, sonra ordinat* yazılır. Məsələn, A(4 ; 3) , B(- 3 ; 2), C(- 4 ; -3) , D(3 ; - 4)

Şəkildən aydındır ki, I rübdəki nöqtənin *hər iki koordinatı müsbət*, II rübdəki nöqtənin *absisi mənfi, ordinatı müsbət*, III rübdəki nöqtənin *hər iki koordinatı mənfi* , IV rübdəki nöqtənin *absisi müsbət, ordinatı mənfidir.*



Koordinatlarına görə nöqtənin qurulması. Tutaq ki, K(-2 ; 4) nöqtəsini düzbucaqlı koordinat sistemində qurmaq lazımdır. Bu məqsədlə absis oxu üzərində (-2) -ni və ordinat oxu üzərində 4-ü qeyd edib həmin nöqtələrdən koordinat oxlarına *perpendikulyar* düz xətlər çəkirik. Bu perpendikulyarın kəsişmə nöqtəsi K(-2 ; 4) olacaqdır. E(2; 0) və F(0 ; -2) nöqtələrinin qurulması şəkildən aydındır.

Bütün hallarda nöqtənin düzbucaqlı koordinat sistemində qurulması eyni qayda ilə həyata keçirilir.

Çalışmalar

1. Ucları: a) A(- 4 ; 2) və B(3; 2) ; b) C(2 ; -3) və D(-3 ; 4) nöqtələrində olan parçanı koordinat sistemində qurun.

2. Təpə nöqtələri A(-1 ; 2) , B(1; 1) , C(2 ; 1) və D(4 ; 2) nöqtələrində olan sınıq xətti koordinat sistemində qurun.

3. A(4-3x ; 3y-1) nöqtəsinin absisi 5 , ordinatı 7-dir. x+y=?

4. Təpə nöqtələri A(-1 ; 2) , B(-1; 5) , C(1; 5) və D(1 ; 2) nöqtələrində olan fiqurun perimetrini və sahəsini hesablayın

5. Təpələri A(0 ;- 3), O(0;0) və B(4 ; 0) nöqtələrində olan üçbucağın perimetrini və sahəsini hesablayın.

6. M(x;x) nöqtələr çoxluğu hansı fiqurdur?

7. M(x;-x) nöqtələr çoxluğu hansı fiqurdur?

8. A(1;2) ; B(3;4) ; C(5;2) ; D(3;1) nöqtələrinin ardıcıl birləşdirilməsindən ABCD dördbucaqlısı alınmışdır. Hansı nöqtə bu fiqurun: a) daxilində ; b) xaricində ; c) sərhəddindədir?
M(2;2) , N(2;3) , K(3;3) , F(4;3) , E(4;4).

§9. Funksiya

Funksiya ilə ümumi tanışlıq

Bilirik ki, dəyişənli ifadələr ədəd və dəyişənlər vasitəsilə yazılır. *Dəyişənli ifadələrin qiymətləri* ilə də artıq tanışıq. Əgər dəyişənli ifadəni yeni bir dəyişənlə işarə etsək, onda iki dəyişən arasında asılılıq alınır.

Fikrimizi misal üzrə şərh edək. $2x + 3$ ifadəsini nəzərdən keçirək. Bu ifadəni y -lə işarə edək**:**

$$y = 2x + 3,$$

burada 2 və 3 məlum ədədlər, x- dəyişən , $2x + 3$ ifadə , y yeni dəyişəni isə ifadənin qiymətidir.

Beləliklə, $y = 2x + 3$ münasibəti ilə ədəd, dəyişən , ifadəyə aid dildə tanış olduq.

Bəs funksiya nədir?

Funksiya bizə tamamilə yeni olan bir anlayış deyil.Baxın, $y = 2x + 3$ funksiyadır , bərabərliyin sağ tərəfi bildiyimiz adi bir cəbri ifadədir. Bu cəbri ifadəyə aid bilgilərimiz (ifadənin qiymətinin hesablanması, ən böyük və ən kiçik qiymətləri , müsbət, mənfi qiymət alması və s.) məhz bu funksiyaya aid bilgilər olacaqdır. Belə nəticəyə gələ bilərik ki, bu vaxta qədər bizə məlum olan düsturların hər biri məlum bir *funksiyanı* ifadə edir. Məsələn:

$S = a^2$ - *kvadratın sahəsinin onun tərəfi ilə ifadəsi ;*

$P = 4a$ - *kvadratın perimetrinin onun tərəfi ilə ifadəsi;*

$V = a^3$ - *kubun həcminin onun tili ilə ifadəsi ;*

$s = v\,t$ - *sürət verildikdə məsafənin zamanla ifadəsi;*

$d = q \cdot m$ - *qiymət verildikdə* dəyərin miqdarla ifadəsi və s.

düsturları müsbət arqumentli $y = x^2$, $y = ax$, $y = x^3$ şəklində olan funksiyalardır.

Arqument demişkən, o nədir ?

Funksiya - iki dəyişən arasındakı asılılığı müəyyən edən bir *qanundur*. Bu dəyişənlərdən biri *sərbəst* , digəri *asılı* dəyişəndir. Sərbəst dəyişən funksiyanın *arqumenti* , asılı dəyişən isə *funksiyanın qiyməti* adlanır.

Məsələn, $y = 2x + 3$ funksiyası - *düsturla verilən xətti funksiyadır* , x - sərbəst dəyişən, yəni funksiyanın *arqumenti*, y - asılı dəyişən , yəni *funksiyanın qiymətidir.*

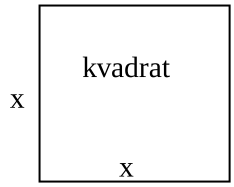
Arqumentin müxtəlif qiymətlərində funksiyanın aldığı qiymətlər müxtəlif və yaxud eyni ola bilər.

Məsələn, $y = 2x + 3$ funksiyasında arqumentin müxtəlif qiymətlərinə funksiyanın müxtəlif qiymətləri uyğundur, lakin $y = x^2$ funksiyasında, arqumentin $x = \pm 1$ kimi iki müxtəlif qiymətinə funksiyanın bir, yəni $y = 1$ qiyməti uyğundur.

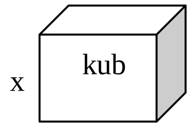
Lakin arqumentin eyni bir qiymətinə funksiyanın müxtəlif qiyməti uyğun ola bilməz.

" Funksiya və həyat" mövzusu üzrə təəssüratınızı söyləyin:

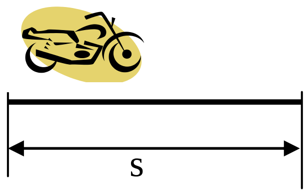
S = ... ;
P = ... ;



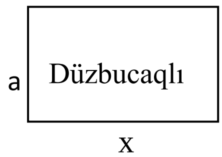
V = ... ;



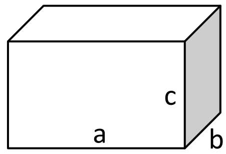
s = ... ;



S = ... ;



Düzbucaqlı paralelepiped



d = ...

Çalışmalar

1. Aşağıdakı funksiya hansı həndəsi məsələlərin həllində tətbiq olunur:
a) $S = 4x^2$; b) $S = 6x^2$; c) $S = \pi x^2$;
d) $l = 2\pi x$; e) $P = 3x$; f) $P = 2x + 5$.

2. Hansı dəyişən arqumentdir:
a) məsafə verildikdə $t = \frac{s}{v}$;
b) düzbucaqlının sahəsi verildikdə:
$a = \frac{S}{b}$; $b = \frac{S}{a}$.

3. Nə üçün arqumentin eyni bir qiymətinə funksiyanın iki müxtəlif qiyməti uyğun ola bilməz?

§10. Funksiyanın verilmə üsulları

Arqumentin hər bir mümkün qiymətində funksiyanın qiymətini birqiymətli tapmaq mümkündürsə, onda deyirlər ki, *funksiya verilmişdir*.

Funksiyanın verilmə üsulları aşağıdakılardan ibarətdir:

1. Düsturla və ya analitik üsulla verilmə ;
2. Cədvəl üsulu ilə verilmə ;
3. Qrafik üsulu ilə verilmə.

y = f(x) funksiyasının araşdırılması f(x) ifadəsinin araşdırılmasına oxşar aparılsa da funksiya ilə bağlı anlayış və faktlar funksiya dilinə (anlamına) uyğunlaşdırılır. Məsələn, ifadənin təyin və dəyişmə oblastı funksiyanın *təyin və dəyişmə oblastı* , dəyişənin f(x) ifadəsini 0-a çevirən qiymətləri - *funksiyanın sıfırları*, ifadənin işarələri ilə bağlı mülahizələr *funksiyanın işarə sabitliyi aralıqları kimi* öyrənilir və s. Bundan başqa bəzi anlayışlar vardır ki, onlar yalnız *funksiya anlamında işlədilir.*

Məsələn, funksiyanın *tək və cütlüyü , dövriliyi (periodikliyi), artması, azalması, törəməsi və s.*

Funksiyanın düsturla verilməsi

$y = x$, $y = -x$, $y = |x|$, $y = 2x - 1$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = -\frac{1}{x}$, $y = x^3$

və s. şəklində olan funksiyalar *düsturla (analitik üsulla) verilən funksiyalar* adlanır.

Düsturla verilmə ümumi şəkildə ,adətən, y = f(x) kimi yazılır.

Tutaq ki, funksiya y = f(x) şəklində düsturla verilmişdir. Onda f(x) ifadəsinə aid olan bütün təsnifat (ifadənin təyin və dəyişmə oblastı , işarələri ilə bağlı mülahizələr, ən böyük və ən kiçik qiymət və s.) bu funksiyaya edilir. Buna görə də, y = f(x) funksiyanın öyrənilməsi f(x) ifadəsinin araşdırılmasına gətirildiyindən funksiyanın öyrənilməsi asanlaşır.

Funksiyanın cədvəl üsulu ilə verilməsi

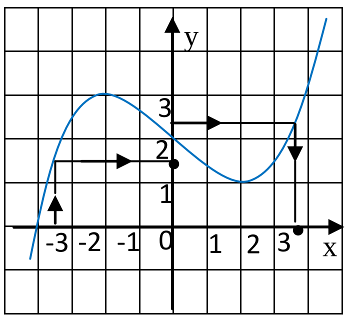
X	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Y	2	5	7	10	14	17

Funksiya cədvəl üsulu ilə üfiqi və yaxud şaquli cədvəllə verilir. Məsələn, sağ tərəfdəki cədvəllərdə arqumentin “0,5 addımı” ilə funksiyasının qiymətləri verilmişdir. Bu funksiyanın təyin oblastı {0,5 ; 1 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3 } , dəyişmə oblastı (qiymətlər çoxluğu) isə { 2 ; 5 ; 7 ; 10 ; 14 ; 17} çoxluğudur.

x	y
0,5	2
1	5
1,5	7
2	10
2,5	14
3	17

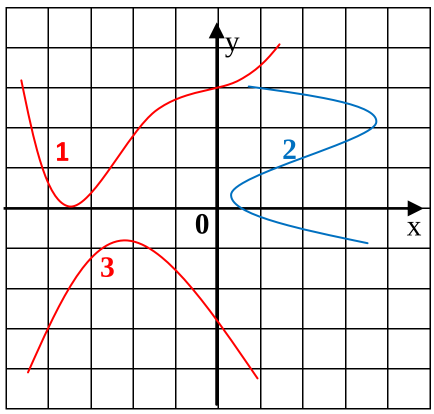
Funksiyanın qrafik üsulu ilə verilməsi

Funksiyanın qiymətinin arqumentdən asılılığı qrafik vasitəsi ilə verilə bilər.Bu halda deyirlər ki, *funksiya qrafiklə* verilmişdir. Arqumentin qiymətləri absis , funksiyanın qiymətləri isə ordinat oxu üzərində qeyd olunur. Arqumentin verilmiş qiymətinə uyğun funksiyanın qiymətini tapmaq üçün absis oxu üzərindəki həmin nöqtədən y oxuna paralel düz xətt çəkilir. Bu düz xətt ilə qrafikin kəsişmə nöqtəsindən absis oxuna paralel çəkilmiş düz xətt ilə y oxunun kəsişmə nöqtəsindəki ədəd funksiyanın qiymətidir. Lakin funksiyanın verilmiş qiymətinə uyğun arqumentin qiymətini tapmaq üçün tərsinə hərəkət edilir.



Məsələn, yandakı şəkildə funksiya qrafiklə verilmişdir. Arqumentin - 4, -2, 0, 2, 3 qiymətlərinə uyğun funksiyanın qiymətləri uyğun olaraq 0, 3, 2, 1, 1,5 ədədləridir.

Düzbucaqlı koordinat sistemində bir neçə əyri nəzərdən keçirək. Şəkildəki üç əyridən ikisi - 1 və 3 əyriləri hər hansı funksiyanın qrafikidir, çünki bu əyrilər **y** oxuna paralel düz xətlərlə yalnız bir nöqtədə kəsişir, yəni x-in hər bir qiymətinə y-in yalnız bir qiyməti uyğundur, 2 əyrisi isə hər hansı funksiyanın qrafiki deyil, çünki bu əyrini **y** oxuna paralel düz xətlər bir neçə nöqtədə kəsir,yəni x-in hər bir qiymətinə y-in bir neçə qiyməti uyğundur, başqa sözlə funksiyanın birqiymətliliyi pozulduğu üçün 2 əyrisi hər hansı funksiyanın qrafiki ola bilməz.



Beləliklə, düzbucaqlı koordinat sistemində verilmiş əyri funksiyanın qiymətini birqiymətli təyin edirsə,onda bu əyri məlum bir funksiyanın qrafikidir. Bu halda deyirlər ki, ***funksiya qrafiklə*** *verilmişdir.*

§11. Funksiyanın qrafiki və onun qurulması

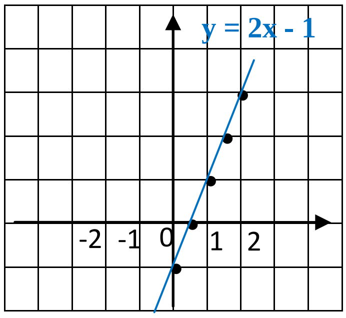
Ümumi tanışlıq

y = f(x) funksiyasının qrafikini nəzərdən keçirsək görərik ki, bu funksiyanın qrafiki düzbucaqlı koordinat sistemində (x;y) nöqtələr çoxluğundan ibarətdir

Qeyd edək ki, A(a;b) nöqtəsi üçün b = f(a) şərti ödənərsə, onda deyirlər ki, A(a;b) nöqtəsi y = f(x) funksiyasının qrafiki üzərindədir və yaxud y = f(x) funksiyasının qrafiki A(a;b) nöqtəsindən keçir.

y = 2x - 1

x	y
0,5	0
1	1
1,5	2
2	3



Düsturla verilmiş funksiyanın qrafikini qurmaq üçün əvvəlcə funksiyanın kiçik bir qiymətlər cədvəli tərtib olunur və koordinat sistemində funksiyanın qrafikinə aid bir neçə nöqtə qurularaq qrafik üzrə nöqtələrin təxmini düzülüşü müəyyən edilir. Sonra isə qeyd edilmiş nöqtələr hamar əyri ilə birləşdirilərək funksiyanın sxematik qrafiki qurulur.

Fikrimizi iki funksiya üzrə şərh edək:

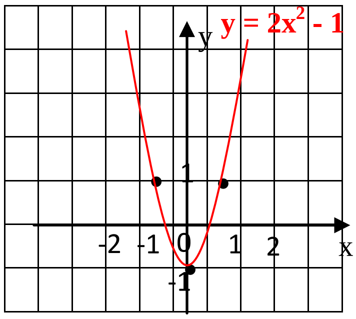
a) $y = 2x - 1$; b) $y = 2x^2 - 1$

Bu funksiyaların hər biri üçün kiçik bir qiymətlər cədvəlini tərtib edək (arqumentin dəyişmə "addımı" $y = 2x - 1$ funksiyası üçün 0,5 ; $y = 2x^2 - 1$ funksiyası üçün 1 qəbul edilmişdir)

Uyğun (x;y) nöqtələrini koordinat sistemində qeyd edək:

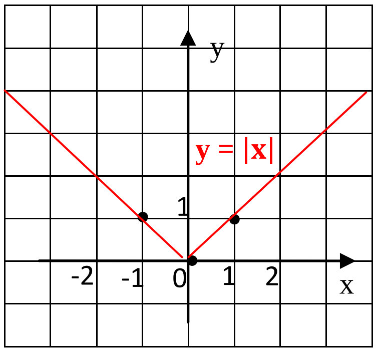
$y = 2x^2 - 1$

x	y
-2	7
-1	1
0	-1
1	1



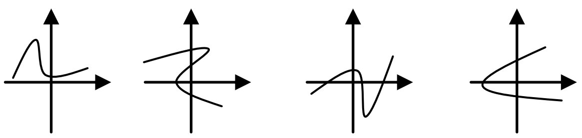
a) (0,5;0) , (1;1) , (1,5;2) , (2;3) nöqtələri y = 2x - 1 ;
b) (-1;1) , (0;-1) , (1;1) nöqtələri isə $y = 2x^2 - 1$ funksiyasının qrafikinə aid olduğu üçün onları hamar əyri ilə birləşdirsək uyğun funksiyanın sxematik qrafikini alırıq .

Qeyd edək ki, düsturla verilmiş funksiyanın qrafikini qurmaq üçün qiymətlər cədvəlinin tərtibində arqumentin dəyişmə "addımı" kiçildikcə koordinat sistemində qeyd olunan (x;y) nöqtələr çoxluğu daha sıx olduğundan verilmiş funksiyanın qrafikini daha dəqiq təsvir etmək olur. Lakin funksiyanın qrafikini sxematik (təxmini təsvir) qurmaq üçün onun iki,üç və ya dörd nöqtəsini qurmaq kifayətdir. Məsələn: a) $y = 2x - 1$ funksiyasının qrafiki *düz xətt* olduğundan *onun iki nöqtəsini* qurub bu nöqtələrdən düz xətt keçirmək kifayətdir. b) $y = |x|$ funksiyası qrafikinin üç nöqtəsini bilməklə onun qrafiki qurulur.



Çalışmalar

1. Hansı şəkildə funksiya qrafiklə verilmişdir?



a b c d

2. $y = |x - 1|$ funksiyasının qrafikini qurun və bu qrafikə əsasən: a) x = -1; 1; 2 və 4 olduqda funksiyanın qiymətlərini; b) y = - 2 ; y = 0 ; y = 2 ; y = 3 olduqda isə arqumentin qiymətlərini tapın.

3. $y = 5x - 1$ funksiyasının qrafiki üzərində absisi ordinatına bərabər olan nöqtəni tapın.

4. $y = 2x^2 - 8$ funksiyasının qrafiki absis oxunu hansı nöqtələrdə kəsir?

5. $y = 3x^2 - 1$ funksiyasının qrafiki ordinat oxunu hansı nöqtədə kəsir?

6 . $y = |2x + 3| - 2$ funksiyasının qrafiki absis oxunu hansı nöqtələrdə kəsir?

7. $y = -|4x - 5| + 6$ funksiyasının qrafiki y = 7 düz xəttini hansı nöqtədə kəsir?

8. $y = -3x + 1$ funksiyasının qrafiki üzərində ordinatı absisindən iki dəfə böyük olan nöqtəni tapın.

§12. Xətti funksiya və onun qrafiki

Tərif: $y = kx + b$ şəklində olan funksiyaya xətti funksiya deyilir, burada k və b parametrlərdir.

Məsələn, $y = x + 1$, $y = -2x + 5$, $y = \frac{1}{2}x - 4$,

$y = -\frac{x}{3} + 2$, $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{3}x - 3$

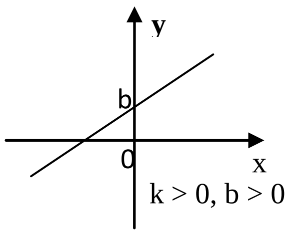
xətti funksiyalardır (k və b-nin qiymətlərini söyləyin) .

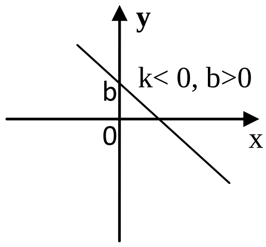
Lakin $y = -2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^3 - 4$, $y = -\frac{1}{x}$, $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{x}$

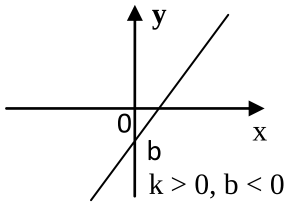
funksiyaları xətti funksiyalar deyil.

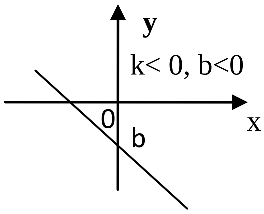
$y = kx + b$ funksiyasının təyin və dəyişmə oblastları bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur, yəni R-dir.

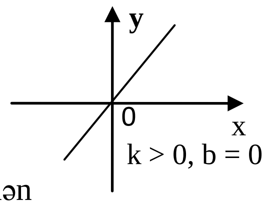
y = kx+b

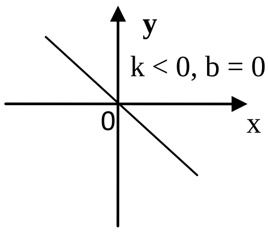










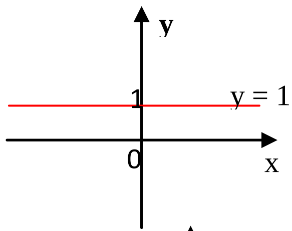


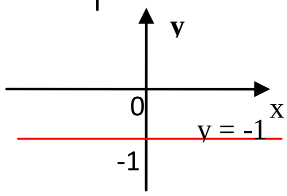
Xətti funksiyanın qrafiki

Yuxarıda $y = 2x - 1$ xətti funksiyasının qrafikinin düz xətt olduğunu gördük. Eyni mühakimə ilə deyə bilərik ki, bütün xətti funksiyaların qrafiki düz xəttdir.

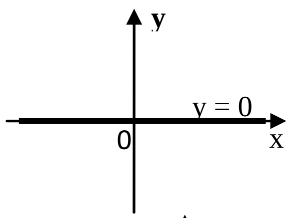
Düz xəttin iki nöqtəsi məlum olduqda xətkeşlə bu iki nöqtədən keçən düz xətti qurmaq mümkün olduğundan $y = kx + b$ funksiyasının qrafikini qurmaq üçün bu qrafikin iki nöqtəsini qurub xətkeşlə bu iki nöqtədən keçən düz xətti çəkirik ki, bu da verilən xətti funksiyanın qrafikidir. Sadəlik üçün, adətən, “ $y = kx + b$ funksiyasının qrafiki “ ifadəsi əvəzinə “ $y = kx + b$ düz xətti “ ifadəsi işlədilir.

Qeyd 1. $k = 0$ olduqda $y = 0 \cdot x + b = b$ olduğu üçün arqumentin istənilən qiymətində funksiyanın qiyməti b ədədinə bərabər olur.Ona görə də $y = b$ düz xətti $(0;b)$ nöqtələr çoxluğundan ibarətdir ki, bu da y oxu üzərindəki b ədədinə uyğun nöqtədən *absis oxuna paralel* çəkilmiş düz xətdir.





Absis oxunun tənliyi $y = 0$ şəklindədir



Qeyd 2. $b \neq 0$ və $k \neq 0$ olduqda $y = kx + b$ düz xətti koordinat oxlarını iki müxtəlif nöqtədə kəsdiyindən $b \neq 0$ və $k \neq 0$ halında $y = kx + b$ düz xəttini qurmaq üçün bu düz xəttin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini tapmaq kifayətdir.

$x = 0 \Rightarrow y = b$,

yəni $y = kx + b$ düz xətti *y oxunu* $(0;b)$ nöqtəsində kəsir.

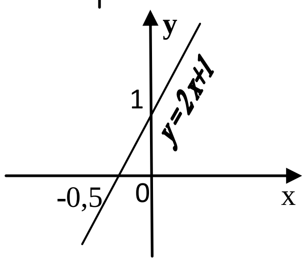
$y = 0 \Rightarrow kx + b = 0 \Rightarrow kx = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{k}$,

yəni $y = kx + b$ düz xətti *x oxunu* $(-\frac{b}{k}; 0)$ nöqtəsində kəsir.

Məsələn, $y = 2x + 1$ düz xəttini qurmaq üçün bu düz xəttin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtəsini quraq:

$x = 0 \Rightarrow y = 1$, yəni ordinat oxu ilə kəsişmə nöqtəsi $(0;1)$-dir.

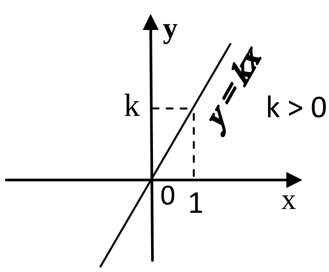
$y = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -0{,}5$, yəni bu düz xəttin absis oxu ilə kəsişmə nöqtəsi $(-0{,}5 ; 0)$-dır.



Qeyd 3. $b = 0$ və $k \neq 0$ olduqda $y = kx$ düz xəttini alırıq.

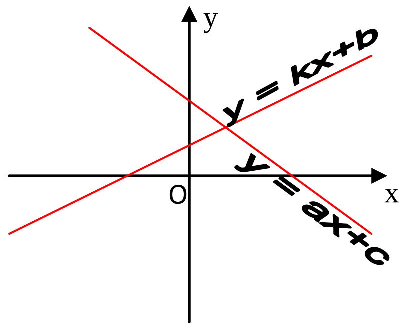
$x = 0 \Leftrightarrow y = 0$,

yəni k-nın istənilən qiymətində $y = kx$ düz xətti koordinat başlanğıcından keçir. $x = 1$ olduqda $y = k$ olduğu üçün bu düz xətt həm də $(1; k)$ nöqtələrindən keçir.



§13. Düz xətlərin qarşılıqlı vəziyyətləri

Düzbucaqlı koordinat sistemində $y = kx + b$ və $y = ax + c$ tənlikləri ilə verilmiş düz xətlərinin qarşılıqlı vəziyyəti üç cür olur:



a) $k \neq a$ olduqda düz xətlər kəsişirlər;

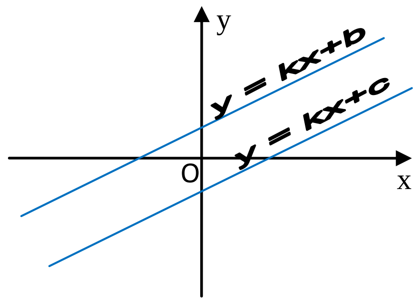
Məsələn: $y = -3x + 4$ və $y = 3x + 4$;

$y = 2x - 5$ və $y = 3x + 7$ kəsişən düz xətlərdir.

Misal 1. a-nın hansı qiymətində $y = 5$ və $y = ax + 3$ düz xətləri kəsişir? Cavab : $a \neq 0$, çünki $y = 5$ düz xəttinin bucaq əmsalı 0-dır.

Misal 2. a-nın hansı qiymətində $y = 2ax$ və $y = 3x + a$ düz xətləri kəsişir?

$2a \neq 3 \Rightarrow a \neq 1{,}5$. **Cavab:** $a \neq 1{,}5$.



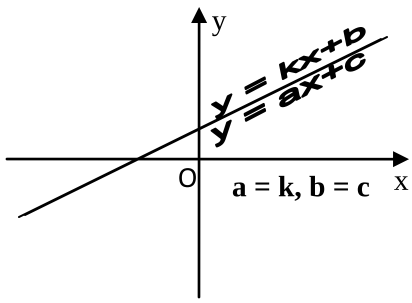
b) $k = a$, $b \neq c$ olduqda düz xətləri paraleldir;

Məsələn, $y = 3x + 5$ və $y = 3x + 7$;

$y = -2x - 5$ və $y = -2x + 7$; $y = 5$ və $y = 7$

düz xətləri paraleldir.

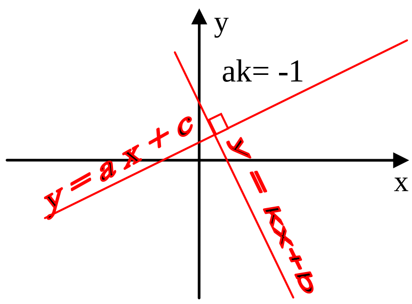
Misal 3. a-nın hansı qiymətində $y = 5$ və $y = a$ düz xətləri paraleldir? Cavab : $a \neq 5$.



Misal 4. a-nın hansı qiymətində $y = -2ax$ və $y = -x + a$ düz xətləri paraleldir?

$-2a = -1 \Rightarrow a = 0{,}5$ Cavab: $a = 0{,}5$.

c) $k = a$, $b = c$ olduqda düz xətlər üst- üstə düşür.



Qeyd. $y = kx + b$ və $y = ax + c$ düz xətlərinin perpendikulyarlıq şərti $ak = -1$ bərabərliyidir, yəni iki düz xəttin bucaq əmsallarının hasili yalnız (-1) -ə bərabər olduqda onlar perpendikulyar olurlar.

Məsələn, $y = 2x + b$ və $y = -\frac{1}{2}x + c$ düz xətləri perpendikulyardır, çünki $2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -1$.

Çalışmalar

1. Paralel düz xətlər cütü hansıdır?

a) $y = -2x + 3$ və $y = 5x + 1$;

b) $y = 0{,}2x - 2$ və $y = \frac{1}{5}x + 2$;

c) $y = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}x$ və $y = \frac{2}{3} + x$;

d) $y = 2 - x$ və $y = 0{,}5 - x$.

2. Perpendikulyar düz xətlər cütü hansıdır?

a) $y = -2x + 3$ və $y = 0{,}5x + 1$;

b) $y = 0{,}2x - 2$ və $y = 5x + 2$;

c) $y = -1\frac{1}{2}x + b$ və $y = \frac{2}{3} + x$;

d) $y = 2 + x$ və $y = 0{,}5 - x$.

3. Kəsişən düz xətlər cütü hansıdır?

a) $y = -3x + 3$ və $y = 5x + 3$;

b) $y = 0{,}2x - 2$ və $y = 2x + 2$.

4. a-nın hansı qiymətində düz xətlər:

a) üst-üstə düşür ; b) perpendikulyardır?

$y = 7x + 3$ və $y = ax + 3$.

5*. Düz xətlər arasındakı məsafəni tapın:

a) $y = -\frac{4}{3}x + 4$ və $y = -\frac{4}{3}x + 8$;

b) $y = -\frac{5}{12}x - 2$ və $y = -\frac{5}{12}x + 2$;

c) $y = 0{,}75x + 3$ və $y = x$;

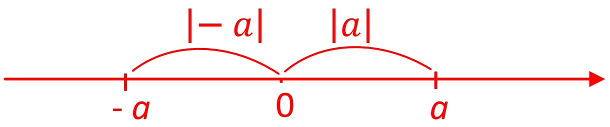
d) $y = x - 2$ və $y = 2x + 2$.

6*. $y = -2x + 6$, $y = 2x + 2$ düz xətləri və koordinat oxları ilə məhdud edilmiş dördbucaqlının sahəsini tapın .

§14. Ədədin modulu (mütləq qiyməti)

Ümumi tanışlıq

Ədədin modulu və ya mütləq qiyməti ilə əvvəllər də tanış olmuşuq. O, ilkin tanışlıq idi. İndi ədədin modulu ilə daha ətraflı tanış olacağıq. Bilirik ki, ədədin modulu və ya mütləq qiyməti onun ədəd oxu üzərində koordinat başlangıcından məsafəsinə deyilir:



Bu tərif *həndəsi* mənadadır.

Şəkildən aydındır ki, - a və a ədədləri koordinat başlangıcına nəzərən simmetrik yerləşdiklərindən

$$|-a| = |a| \geq 0,$$

yəni $a \geq 0$ olduqda $|a| = a$; $a \leq 0$ olduqda $|a| = -a$,

çünki $a \leq 0 \Rightarrow -a \geq 0 \Rightarrow |a| = |-a| = -a \geq 0$.

Beləliklə, ədədin modulu *cəbri* mənada

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0; \\ -a, & a \leq 0. \end{cases}$$

düsturları ilə təyin olunur:

Mənfi olmayan ədədin modulu ədədin özünə, müsbət olmayan ədədin modulu isə ədədin əksinə bərabərdir.

Tərs mülahizə: $|a| = a$ olduqda $a \geq 0 \Rightarrow a = |a|$;

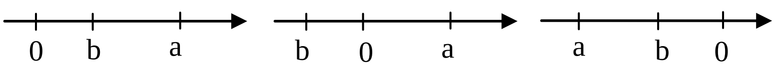
$|a| = -a$ olduqda $a \leq 0 \Rightarrow a = -|a|$.

Ədədin modulunun cəbri və həndəsi mənasından aydındır ki, modulun qiyməti mənfi ədəd ola bilməz.

Bəs ədəd oxu üzərində a və b ədədləri arasındakı məsafə hansı düsturla hesablanır?

Cavab: məsafəni d ilə işarə etsək $d = |a - b|$.

Bu cavabı əsaslandırmaq üçün a və b ədədlərinin ədəd oxu üzərində müxtəlif vəziyyətlərini nəzərdən keçirək.



Bu şəkillərə əsasən a və b ədədləri arasındakı məsafə:

a) soldakı vəziyyətdə $d = |a| - |b| = a - b = |a - b|$;

b) ortadakı vəziyyətdə $d = |b| + |a| = -b + a = |a - b|$;

c) sağdakı vəziyyətdə $d = |a| - |b| = -a - (-b) = |a - b|$.

Beləliklə,

ədəd oxu üzərində a və b ədədləri arasındakı məsafə $d = |a - b|$ düsturu ilə hesablanır.

Məsələn: a) (- 3) -lə (-7) arasındakı məsafə $|-3 + 7| = 4$;

b) (- 3) -lə 7 arasındakı məsafə $|-3 - 7| = 10$;

c) 3 -lə 7 arasındakı məsafə $|3 - 7| = 4$;

d) 4-dən məsafəsi 5-ə bərabər olan ədədi tapın.

$|4 - x| = 5 \Rightarrow 4 - x = \pm 5 \Rightarrow x = 4 \pm 5$, $x = -1$ və ya $x = 9$.

Qeyd. Bir daha xatırlayaq ki,

$$|a - b| = \max\{a;b\} - \min\{a;b\}.$$

Məsələn, $|3 - \pi| = \pi - 3$; $|10 - \pi^2| = 10 - \pi^2$ və s.

Çalışmalar

1. Hesablayın:

a) $|-2| \cdot |-3| \cdot |-1,5| \cdot |2,5|$;

b) $\frac{|-2| + |0,5 - 1,5| \cdot 2}{|2 - 3^2| - 1}$;

c) $\big|5 - |5 - |5 - 2^3|| \big|$.

2. Sadələşdirin:

a) $|3,14 - \pi| + |\pi - 3,2| - 0,6$;

b) $|1 - a^2| - |a^2 - a| + |a - 1|$, $0 < a < 1$ olduqda;

c) $|a^2 - a| + |a^3 - a| + |a^3 - a^2|$, $-1 < a < 0$ olduqda.

3. Tənliyi həll edin:

a) $|1,3 + 4x| = 1,7$; b) $|18 - x^2| = x^2$;

c) $|4x^3 + 3x| = -4x^2$; d) $|1 - x| = x - 1$;

e) $|3 - 5x| = 3 - 5x$; f) $|1 + x^2| = 2x$;

k) $(x-2)|2 - x| = 9$; *l)* $(x+2)|2 - x| = 5$.

4. a-nın hansı qiymətlərində tənliyin həlli yoxdur?

$|3 - 2x| = a - 1$.

5. Bərabərsizliyi həll edin:

a) $|1 + x| < 3$; b) $|1 - 2x| \geq 3$.

6. a-nın hansı qiymətlərində ədəd oxu üzərində a ədədi ilə 6 arasındakı məsafə 2-dir?

7. k-nın hansı qiymətlərində bərabərsizliyin həlli yoxdur:

$|2x + 13| \leq 1 - k$?

8. k-nın hansı qiymətlərində istənilən ədəd bərabərsizliyi ödəyir:

$|2x + 13| > k - 2$?

9. Ədəd oxu üzərində 3-dən məsafəsi 9-a bərabər olan ədədi tapın.

10. Ədəd oxu üzərində 5-dən məsafəsi 8-dən böyük olmayan tam ədədlərin cəmini tapın.

11. Tənliyi həll edin:

$|x - a| = a$.

12. Hansı mülahizə doğrudur:

a) $a < b \Rightarrow |a| < |b|$;

b) $|a| < |b| \Rightarrow a < b$;

c) $a^2 < b^2 \Rightarrow |a| < |b|$;

d) $|a| < |b| \Rightarrow a^2 < b^2$?

§ 15. Ədədin modulunun xassələri

Ədədin modulunun cəbri və həndəsi mənalarına əsasən istənilən ədədlər üçün aşağıdakı xassələr (1- 4) doğrudur:

1. *Ədədin modulunun qiyməti mənfi deyil:* $|x| \geq 0$.

Məsələn, $|0| = 0$, $|-2| = |2| = 2 > 0$.

2. *Əks ədədlərin modulları bərabərdir:* $|-x| = |x|$.

Məsələn, $|-3| = |3|$, $|1,5| = |-1,5|$.

3. *Ədədin modulu ədədin özündən və əksindən kiçik deyil:* $|x| \geq \pm x$.

Məsələn, $|0| = 0$, $|2| = 2$, $|-2| = 2 > -2$.

4. *Hasilin modulu vuruqların modulları hasilinə bərabərdir:* $|xy| = |x| \cdot |y|$.

Məs., $|(-2)\cdot(-3)| = |-2| \cdot |-3| = |-2 \cdot 3| = |2| \cdot |-3|$.

5. *Cəmin və fərqin modulu ədədlərin modulları cəmindən böyük deyil:* $|x \pm y| \leq |x| + |y|$.

İsbatı. Asanlıqla yoxlaya bilərik ki, x və y eyni işarəli ədədlər olduqda $|x + y| = |x| + |y|$, əks işarəli ədədlər olduqda isə $|x + y| < |x| + |y|$.

Beləliklə, istənilən x , y ədədləri üçün

$$|x + y| \leq |x| + |y| .$$

$$|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|.$$

Çalışmalar

1. Hesablayın:

a) $|-2 + 5 - 3| - |1 - 3 + 2{,}4| \cdot |1{,}5 - 2| - |12{,}5|$;

b) $\dfrac{|1,(9)-2|-|2{,}5-1{,}5|\cdot 2}{|1-12+3^2|-11}$; c) $\big|2 - 5 - \big|15 - |15 - 3^3|\big|\big|$.

2. Sadələşdirin:

a) $|x|x - x^2 + |2x^2|$; b) $\big|x - |x|\big| - |x| + x - 2$;

c) $|a^2 - |a|a| + \big|a^3 - a^2|a|\big| + 2a^3 - 2a^2$.

3. Mülahizələr doğrudurmu:

a) $a > 2$, onda $|a| > 2$; b) $a < 2$, onda $|a| < 2$;

c) $a < -2$, onda $|a| > 2$; d) $-2 < a < 2$, onda $|a| < 2$;

e) $|a| \geq 2$, onda $a \geq 2$; f) $|a| \leq 2$, onda $a \leq 2$;

k) $|a| \geq -2$, onda $a \geq -2$; *l*) $|a| \leq -2$, onda $a \leq -2$.

4. $|x| \leq x$, $|y| > y$ olarsa, xy hasilini sıfırla müqayisə edin.

5. Bərabərsizliyi həll edin: a) $|x| \geq 3$; b) $|x| < 3$.

6. $|x| = a$ tənliyini həll edin.

7. Tənliyi həll edin:

a) $|3x + 3| = 3x - 6$; b) $|5x - 3| = 0$;

c) $|2010x - 502| = -5$; d) $|x - 1| + |x - 2| = x - 3$;

e) $|x - 5| + |x - 4| = x - 6$.

8. Tənliyin köklər hasilini tapın:

a) $|2x - 5| - |x - 4| = 1$; b) $|x - 1| - |x - 2| + |x - 3| = 2$.

9. $|x - 1| \geq a - 1$ bərabərsizliyini həll edin.

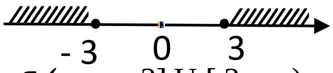
10. $|x + 2| \leq a + 2$ bərabərsizliyini həll edin.

Çalışma həlli nümunələri

1. $|x| \leq x$, $|y| > y$ olarsa xy hasilini sıfırla müqayisə edin.

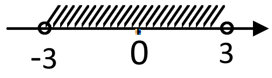
Həlli. Şərtlərdən aydındır ki, $x \geq 0$, $y < 0 \Rightarrow$ **xy ≤ 0 .**

2. Bərabərsizliyi həll edin: **a)** $|x| \geq 3$;



Cavab: $x \in (-\infty ; -3] \cup [3 ; \infty)$.

b) $|x| < 3$,



C : $x \in (-3 ; 3)$.

3. $|x| = a$ tənliyini həll edin.

Həlli. I. $a > 0$ olduqda tənliyin iki kökü var: $x = \pm a$;

II. $a = 0$ olduqda tənliyin bir kökü var: $x = 0$;

III. $a < 0$ olduqda tənliyin kökü yoxdur: $x = \emptyset$.

4. Tənliyin köklər hasilini tapın: $|x - 3| - |x + 2| = 1$.

Həlli. x = 0 bu tənliyin kökü olduğu üçün köklər hasili 0-dır.

5. Tənliyi həll edin:

a) $|2x - 3| = 3x$; b) $|4x + 3| = 0$;

c) $|2009x - 538| = -5$.

Həlli. a) Modulun 1-ci xassəsinə əsasən $x \geq 0$ şərti ödənilməlidir. Ona görə də $2x - 5 = \pm 3x \Rightarrow 2x \pm 3x = 5 \Rightarrow$

1) $5x = 5 \Rightarrow x = 1$; 2) $-x = 5 \Rightarrow x = -5$.

Cavab: $x = 1$, çünki $x \geq 0$.

b) $\Rightarrow 4x + 3 = 0$, $x = -0{,}75$

c) $\Rightarrow x = \emptyset$, çünki modulun qiyməti mənfi ədəd ola bilməz.

6. $|x| \geq a$ bərabərsizliyini həll edin:

Həlli. I. $a \leq 0$ olduqda $x \in R$;

II. $a > 0$ olduqda $x \in (-\infty ; -a] \cup [a ; \infty)$

Məsələn, a) $|2x - 5| \geq 5 \Rightarrow$

1) $2x - 5 \geq 5 \Rightarrow 2x \geq 10 \Rightarrow x \geq 5$;

2) $2x - 5 \leq -5 \Rightarrow 2x \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$.

Cavab: $x \in (-\infty ; 0] \cup [5 ; \infty)$.

7. $|x| \leq a$ bərabərsizliyini həll edin:

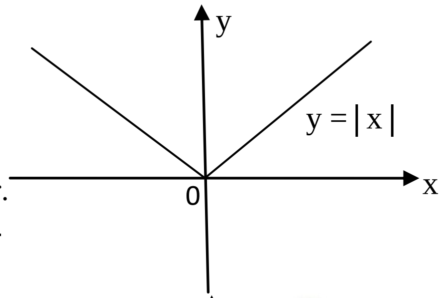
I. $a < 0$ olduqda $x = \emptyset$;

II. $a = 0$ olduqda $x = 0$;

III. $a > 0$ olduqda $x \in [-a; a]$.

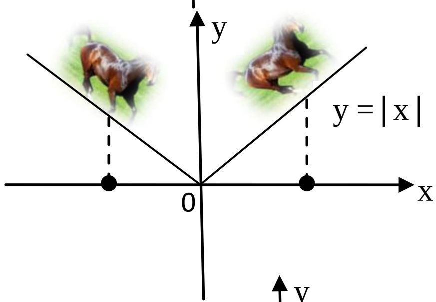
§16. $y = |x|$ funksiyasının qrafiki və xassələri

Modulun tərifinə əsasən $x \geq 0$ olduqda $y = x$; $x \leq 0$ olduqda $y = -x$. Bu o deməkdir ki, düzbucaqlı koordinat sistemində $x \geq 0$ olduqda $y = x$ şüası I rübün, $x \leq 0$ olduqda $y = -x$ şüası isə II rübün tənböləni olduğu üçün bu şüaların birləşməsi $y = |x|$ funksiyasının qrafikidir.



$|x| = |-x|$ olduğu üçün $y = |x|$ və $y = |-x|$ funksiyalarının qrafikləri üst-üstə düşür.

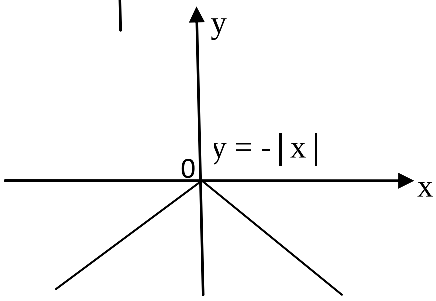
Şəkildəki atların hərəkətinin mənasını izah edin!



Qrafikə nəzər yetirməklə $y = |x|$ funksiyasının bir sıra xassələrini söyləyə bilərik:

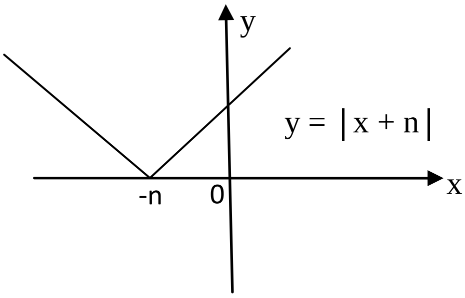
1. Funksiyanın təyin oblastı R -dir , yəni $x \in (-\infty ; \infty)$;
2. Funksiya mənfi qiymət almır,yəni $y \in [0 ; \infty)$;
3. Funksiya $(-\infty ; 0]$ aralığında azalır , $[0 ; \infty)$ aralığında isə artır;
4. Funksiyanın ən kiçik qiyməti 0-dır,ən böyük qiyməti isə yoxdur;
5. Funksiyanın qrafiki y oxuna nəzərən simmetrikdir.

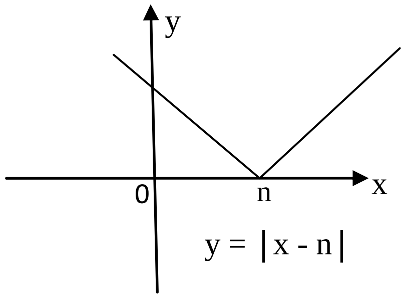
☺ Şəkil üzrə $y = -|x|$ funksiyasının xassələrini söyləyin.

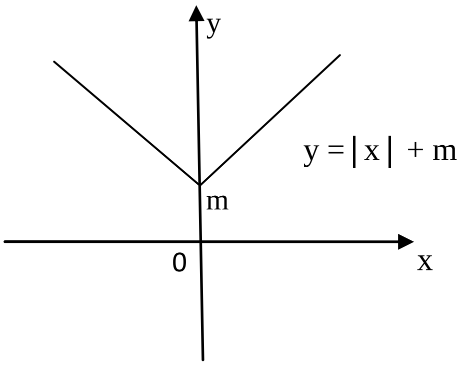


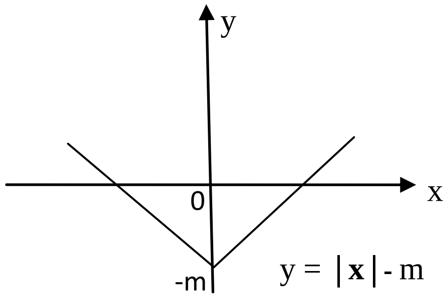
$y = |x \pm n| \pm m$ (n , m > 0) **funksiyalarının qrafikləri**

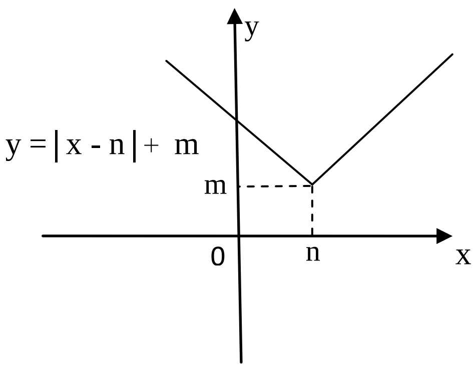
$y = |x|$ funksiyasının qrafikini n addım sağa və ya sola və m addım aşağı və ya yuxarı sürüşdürməklə aşağıdakı qrafikləri ala bilərik:

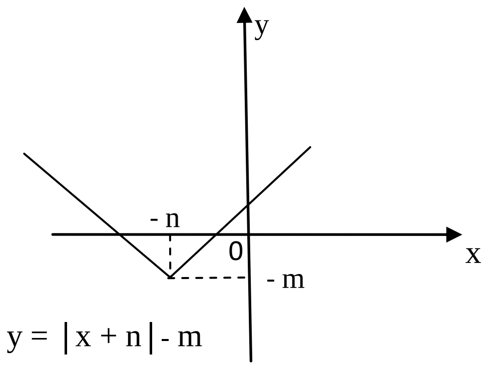












§17. Natural üstlü qüvvətlər

Natural üstlü qüvvətlər eyni bir ədədin təkrar olaraq bir neçə dəfə öz-özünə vurulmasını qısa şəkildə göstərmək üçün istifadə olunur. Məsələn:

$2^3 = 2\cdot2\cdot2 = 8$; $2^5 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 32$;

$0{,}3^3 = 0{,}3\cdot0{,}3\cdot0{,}3 = 0{,}027$; $0{,}2^4 = 0{,}0016$.

Ümumiyyətlə, $a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ dəfə}}$

Tərif: *a ədədinin n dəfə öz-özünə vurulmasından alınan hasilə a ədədinin n-ci dərəcədən qüvvəti deyilir və a^n (" a üstü n ") kimi işarə olunur,*
burada *a* - qüvvətin əsası, *n* - qüvvət üstüdür ($n \in N$).

Xüsusi halda , $a^1 = a$; $a^2 = a\cdot a$; $a^3 = a\cdot a\cdot a$; ...

Qüvvətin xassələri

Misal nümunələrinə əsasən xassələri söyləyə bilərik.

1. Qüvvətlərin vurulması. $2^3\cdot 2^5 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^8$;

$3^4\cdot 3^6 = 3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 = 3^{10}$.

Ümumiyyətlə, $a^n\cdot a^m = a^{n+m}$.

Əsasları eyni olan qüvvətləri vurmaq üçün əsası olduğu kimi saxlayıb qüvvət üstlərini toplamaq lazımdır.

2. Qüvvətlərin bölünməsi. $2^5 : 2^2 = \frac{2\cdot2\cdot2\cdot\cancel{2\cdot2}}{\cancel{2\cdot2}} = 2\cdot2\cdot2 = 2^3$**;**

$3^7 : 3^3 = \frac{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot\cancel{3\cdot3\cdot3}}{\cancel{3\cdot3\cdot3}} = 3\cdot3\cdot3\cdot3 = 3^4$.

Ümumiyyətlə, $n > m$ olduqda $a^n : a^m = a^{n-m}$.

Əsasları eyni olan qüvvətləri bölmək üçün əsası olduğu kimi saxlayıb qüvvət üstlərini çıxmaq lazımdır.

3. Qüvvətin qüvvəti. $(2^3)^2 = (2\cdot2\cdot2)^2 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^6$;

$(3^4)^3 = (3\cdot3\cdot3\cdot3)\cdot(3\cdot3\cdot3\cdot3)\cdot(3\cdot3\cdot3\cdot3) = 3^{12}$.

Ümumiyyətlə, $(a^n)^m = a^{nm}$.

Qüvvəti qüvvətə yüksəltmək üçün əsası olduğu kimi saxlayıb qüvvətləri vurmaq lazımdır.

4. Hasilin qüvvəti. $(2\cdot3)^2 = 2^2\cdot3^2 = 4\cdot9 = 36 = 6^2$;

$(2\cdot3)^3 = 2^3\cdot3^3 = 8\cdot27 = 216 = 6^3$;

Ümumiyyətlə, $(ab)^n = a^n b^n$.

Hasilin qüvvəti qüvvətlər hasilinə bərabərdir .

5. Kəsrin qüvvəti

$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$; $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4^3}{5^3} = \frac{64}{125}$.

Ümumiyyətlə, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

Kəsrin qüvvəti qüvvətlər nisbətinə bərabərdir .

Diqqət! Xassələri tətbiq edərkən uyğun düsturlar soldan sağa və yaxud sağdan sola tətbiq olunur.

Çalışma nümunələri

$(-1)^2 = 1$, $(-1)^4 = 1$, $(-1)^6 = 1$;

$(-1)^3 = -1$, $(-1)^5 = -1$, $(-1)^7 = -1$.

Ümumiyyətlə, $(-1)^{2n} = 1$, yəni (-1) - in cüt dərəcədən qüvvəti 1-ə bərabərdir.

$(-1)^{2n-1} = -1$, yəni (-1)- in tək dərəcədən qüvvəti (-1) - ə bərabərdir.

$(-2)^2 = 4$, $(-2)^3 = -8$, $(-2)^6 = 64$;

$-2^2 = -4$, $-2^3 = -8$, $-2^6 = -64$;

$2^6\cdot5^6 = 10^6 = 1000000$;

$(-2)^4 + (-1)^3 - 3^2 = 16 - 1 - 9 = 6$;

$(-2)^4 - (-1)^3\cdot(-3)^2 = 16 + 9 = 25$;

$4^3\cdot8^{12} = 2^6\cdot2^{36} = 2^{42}$;

$12^5\cdot18^4 = 2^{10}\cdot3^5\cdot2^4\cdot3^8 = 2^{14}\cdot3^{13}$;

$8^5\cdot4^4 - 16^5 = 2^{15}\cdot2^8 - 2^{20} = 2^{23} - 2^{20} =$

$= 2^{20}(2^3 - 1) = 7\cdot2^{20}$.

Ç a l ı ş m a l a r

1. a^{24} ifadəsini ən çoxu neçə üsulla natural üstlü qüvvət şəklində yazmaq olar?

2. Hesablayın:

a) $0{,}125^{45}\cdot4^{66} : \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 0{,}25^3\cdot8^2$;

b) $\frac{4^3\cdot6^{12}}{8^4\cdot3^{11}}$; c) $\frac{6^{12}+9^6\cdot8^4}{54^4}$;

d) $\frac{12^{12}-18^6\cdot24^3}{36^6}$; e) $\frac{5\cdot2^{18}-4^8}{9\cdot2^{14}-17\cdot8^4}$;

f) $\frac{3^{2n}+3^{2n}+3^{2n}+3^{2n}+3^{2n}}{9^n+9^n+9^n+9^n+9^n+9^n}$.

3. Kvadratın perimetrini 3 dəfə artırsaq onun sahəsi neçə dəfə artacaqdır?

4. Kubun tam səthini 4 dəfə artırsaq onun həcmi neçə dəfə artar?

5. Dairənin sahəsini 16 dəfə artırmaq üçün onun çevrəsinin uzunluğunu neçə dəfə artırmaq lazımdır?

6. Tənliyi həll edin:

a) $\frac{(x^3)^4\cdot(x^5)^5}{(x^{11})^3\cdot x^2} = 25$; b) $\frac{(x^6)^7 : (x^4)^8}{(x^3)^2\cdot x} = 8$;

c) $a^4(x + 2a^3 - 1) = (a^3)^2\cdot a$, $a \neq 0$.

7. a^5 , a^4 , a^3 , a^2, a ifadələrini qiymətlərininə görə müqayisə edin.

8. Mülahizə doğrudurmu:

$a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$?

§18. Birhədlilər

Tərif: *Ədəd , dəyişən və dəyişənin natural üstlü qüvvəti hasilindən ibarət olan ifadəyə birhədli deyilir.*

Məsələn, $-3{,}7$; $2\frac{2}{3}$; a ; a^2 ; $2{,}3a$; $8ab^3$; $2abbc$; $-4xy \cdot 0{,}4ab$ ifadələri *birhədlidir.*

Birhədlidə ədəd və dəyişənlər üzərində əməllərin son nəticəsi birhədlinin *standart şəkli* adlanır.Məsələn, $3aab^2b^3$; $2ab \cdot 4a^3b^2$ birhədliləri standart şəkildə deyil, onların standart şəkilləri belədir: $3a^2b^5$; $8a^4b^3$.

Birhədlinin standart şəklindəki ədədi vuruq *birhədlinin əmsalı* adlanır. Məsələn, $4a^2$; $2{,}3a$; $8ab^3$; $3abc$ birhədlilərinin əmsalları uyğun olaraq 4 ; 2,3 ; 8 ; 3 ədədləridir.

Birhədlinin əmsalı yazılmayıbsa o, 1 hesab edilir, əmsalı (-1) olan birhədlinin qarşısında “ - “ işarəsi yazılır. Məsələn, x^2 ; xy ; a^2x birhədlilərinin əmsalı 1-dir; $-a$; $-ab^3$; $-xy$ birhədlilərinin əmsalı isə (-1)-dir.

Standart şəkilləri *eyni ifadələr* olan birhədlilər *bərabər birhədlilər* adlanır.

Məsələn, $2a^2x^3 \cdot 3ax$ və $6a^3x^4$ birhədliləri bərabərdir.

Bərabər və yaxud yalnız əmsalları ilə fərqlənən birhədlilər *oxşar birhədlilər* adlanır.

Məsələn, ax^5 və $ax^2 \cdot x^3$; 2,3 və 3,5 ; $2a$ və $3a$; $-a$ və a ; $3a^3b^4$ və $2{,}5\,a^3b^4$ - *oxşar birhədlilərdir.*

Oxşar birhədlilərin islahı oxşar ifadələrin islahı kimi yerinə yetirilir.

Əmsalları əks ədədlər olan oxşar birhədlilər *əks birhədlilər* adlanır.Məsələn, $-a$ və a ; ax^5 və $-ax^5$; $-2axy^2$ və $2axy^2$ əks birhədlilərdir.

Aydındır ki, əks birhədlilərin cəmi eyniliklə 0-a bərabərdir.

Birhədlidəki bütün dəyişənlərin üstləri cəminə *birhədlinin dərəcəsi* (*qüvvəti*) deyilir.

Məsələn, a^2 ; $2{,}3a$; $8ab^3$; $3ab^2c^3$ birhədlilərinin dərəcələri uyğun olaraq 2 ; 1 ; 4 ; 6 ədədləridir.

Birhədlidə dəyişən iştirak etmirsə, onda onun dərəcəsi 0 qəbul edilir.Məsələn, 4 ; $6\frac{3}{4}$; 2,7 ədədləri 0-dərəcəli birhədlidir.

Qeyd edək ki, birhədlilər üzərində əməllər cəbri ifadələr üzərindəki əməllər kimi natural üstlü qüvvətlərin xassələrinə əsasən yerinə yetirilir.

Məsələn: a) $(-a^3b^2)^3 = -a^9b^6$; b) $(-a^3b^2)^2 = a^6b^4$;
c) $-3(a^7b^4)^2 = -3a^{14}b^8$; d) $(-a^3)(b^2)^4 = -a^3b^8$;
e) $3 \cdot 2{,}5ab = 7{,}5ab$; g) $3ab \cdot (-2{,}5a)b^2 = -7{,}5a^2b^3$;
f) $ax^2b - 0{,}7abx^2 - ax^2b = -0{,}7abx^2$;
k) $ax^2b - 0{,}7abx^2 + 1{,}3ax^2b = 1{,}6abx^2$;
l) $0{,}7(abx)^2 - 1{,}3(ax)^2b^2 + 2abx^3 = 2abx^3 - 0{,}6a^2b^2x^2$;
m) $ax^2b \cdot 0{,}7abx^2 \cdot 1{,}3ax^2b = 0{,}91a^3b^3x^6$;
n) $ax^2b \cdot 0{,}7abx^2 - 1{,}3a^2x^4b^2 = -0{,}6a^2b^2x^4$.

Çalışmalar

1. İfadələrdən neçəsi birhədlidir ?

$\frac{x}{2}$; $\frac{x}{y}$; $1{,}7ax \cdot bx$; $x + y$; $(x - y)^2$; $x : y$; $2a + 3b - 4c$; $3x + 4$; $13x^3(ay^2)^5$.

2. Standart birhədlilər hansıdır?

a) $23ab$; b) $2 \cdot 3ab$; c) $23a \cdot b$; d) $8\,xaxc$; e) $4x^2 \cdot 2ac$; f) $-8abxy$.

3. Bütün birhədlilərin əmsalları cəmini tapın:

$ab5b$; $2a^3b$; $\frac{2}{3}ab^4$; $-29x^6b^3$.

4. Birhədlinin dərəcəsi (qüvvəti) neçədir?

a) $(4ab7b)^3$; b) $1{,}2\,a^3b \cdot (\frac{5}{6}ab^4)^7$;

c) $0{,}(2)\,a(x^3b \cdot \frac{3}{4}ayb^2)^5$;

d) $7\frac{5}{9}abc \cdot 3\frac{3}{27}abc$; e) $0{,}6 \cdot x^3y$.

5. Birhədlinin dərəcəsi ilə əmsalı cəmini tapın:

a) $(3ab7b)^2$; b) $0{,}25\,a^3b^4 \cdot (2ab^5)^6$;

c) $1{,}4(9)\,(x^3b^2 \cdot yb^3)^5$.

6. Oxşar birhədliləri göstərin:

a) $(3a^3b^2)^2$ və $0{,}25\,a^5b^4(2ab^3)^2$;

b) $4{,}(9)\,x^3b^2 \cdot 4{,}9xb^3x^2$ və $4 \cdot 9xb^5x^5$;

c) $3{,}1(9)\,x^3b^3$ və $3{,}9xb^3x^2 \cdot 3{,}2xb^3x^2$;

d) $(2a^3b^2)^3 \cdot 0{,}125\,a^5b^4$ və $(a^8b^4)^2$.

7. Sadələşdirin:

a) $4a \cdot 2{,}5b - 7{,}5b \cdot 6a + 45ab + 2$;

b) $aabbab - 3a^2b \cdot 2{,}5ab^2 + 7{,}5a^3b^3$;

c) $3a^3b^2 - 0{,}25a(2ab)^2$;

d) $4{,}(9)\,x^3b^2(0{,}2xb^3)x^2 - xb^5x^5$;

e) $4x^3b^3 + 5xb^3x^2 + 3{,}2b^3 \cdot 5x^2$.

8. Ortaq vuruğu mötərizə xaricinə çıxarın:

a) $ax^5 - ax^6 - 2ax^5$; b) $x^7 - 3x^8 + 2x^8$;

c) $(2a^3b^2)^3 \cdot 0{,}375\,a^5b^4 - 3(a^7b^4)^2$;

d) $3abx^2b - 5abx^2 - 1\frac{1}{2}ax^2 \cdot 2b$;

e) $3abc - 3abc^2 + abcd + 1{,}5abc \cdot 2c$.

§19. Çoxhədlilər

Ümumi tanışlıq

Tərif: *Birhədlilərin cəbri cəminə çoxhədli deyilir.*
Cəbri cəmdə çıxma da cəm kimi başa düşülür:

$a - b = a + (- b)$; $- a - 2b + c = (- a) + (- 2b) + c$.

Çoxhədlini təşkil edən birhədlilər *çoxhədlinin hədləri* adlanır.

Xüsusi halda, birhədli *bir həddi* olan çoxhədlidir. İki həddi olan çoxhədli *ikihədli,* üç həddi olan çoxhədli *üçhədli* adlanır və s. Məsələn, $ax + b$ - ikihədli, $ax^2 + bx + c$ - üçhədli, $ab + ax + cx^2 + bcx$ - dördhədlidir.

Çoxhədlinin dəyişənlərin verilmiş qiymətində *qiymətinin hesablanması* cəbri ifadənin qiymətinin hesablanması kimi həyata keçirilir.

Çoxhədlini təşkil edən ən yüksək dərəcəli birhədlinin dərəcəsi (qüvvəti) bu *çoxhədlinin dərəcəsi* hesab edilir. Məsələn, $3abc - 3abc^2 + a^2bc$ çoxhədlisinin *dərəcəsi* 4-dür.

Çoxhədlini təşkil edən birhədlilərin əmsalları bu çoxhədlinin əmsalları adlanır. Məsələn, $3abc - 3abc^2 + abc^3$ çoxhədlisinin əmsalları 3 , - 3 və 1-dir.

Çoxhədlini təşkil edən birhədlilər sırasındakı oxşar birhədlilər bu çoxhədlinin *oxşar hədləri* adlanır. Məsələn, $7abx^2 - 13ax^2b^2 + 2abx^2 + 3axb$ çoxhədlisində 1-ci və 3-cü hədlər oxşardır. Aydındır ki, çoxhədlidə yalnız oxşar hədlər islah oluna bilər.

Çoxhədlidəki bütün birhədlilər standart şəkildə olub, bu birhədlilərin sırasında eyni birhədli yoxdursa,onda belə çoxhədli *standart şəkilli çoxhədli* adlanır.
Məsələn, $9abx^2 - 13ax^2b^2 + 3axb$ çoxhədlisi standart şəkillidir. Çoxhədlinin tərifindən aydındır ki,bu anlayış bizə tamamilə yeni olan anlayış deyil. Mötərizənin açılması qaydasını artıq bilirik. Xatırlayaq ki:

a) $a(x - y) = ax - ay$, $- a (x + y) = - ax - ay$;
b) $- ab(ax - by + 2) = - a^2bx + ab^2y - 2ab$;
c) $(2a - b)(3b - a) = 6ab - 2a^2 - 3b^2 + ab = 7ab - 2a^2 - 3b^2$;
d) $(a - b - c)(a - b - c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$.

Bu eyniliklər: a) *birhədlinin ikihədliyə;* b) *birhədlinin üçhədliyə;*c) *ikihədlinin ikihədliyə* ; d) *üçhədlinin üçhədliyə vurulmasına* aid nümunələrdir.

Birhədlinin çoxhədliyə, çoxhədlinin çoxhədliyə vurulması, çoxhədlilərin toplanması və çıxılması, vuruqlara ayrılması cəbri ifadələr üzərindəki əməllər kimi yerinə yetirilir və oxşar hədlər varsa onlar islah olunur.

Çoxhədlinin *əmsalları cəmi* bütün dəyişənlərin yerinə 1 yazdıqda alınan qiymətə bərabərdir, yəni çoxhədlinin əmsalları cəmini hesablamaq üçün onu standart şəkildə yazmağa ehtiyac yoxdur. Məsələn:
$(a + b + 3c) (2a + b- c) - (a + 2b) (a + c)$ çoxhədlisinin əmsalları cəmi 4-dür, çünki $a = b = c =1$ olduqda ifadənin qiyməti $5 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 10 - 6 = 4$.

Misal nümunələri

Çoxhədlidir:
$2,3$; $\frac{x}{2}$; $- x + 2$; $3x^2 + 6x - 5$;
$1\frac{2}{3}xy^2 + 0,5x^3yx - 5y$; $a^3 - b^3$.

Çoxhədli deyildir:
$\frac{2}{x}$; $\frac{-x+2}{2y}$; $|x|$; $\sqrt{x}$; $x^2 + |x|$.

a) $x = 1, y= - 1$olduqda
$1\frac{2}{3}xy^2 + 0,5x^3yx - 5y = 1\frac{2}{3} + 0,5 + 5 =$
$= 6\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = 6\frac{4+3}{6} = 7\frac{1}{6}$;

b) $xy = -1$ olduqda çoxhədlinin qiymətini hesablayın:
$2x \cdot 3xy^2 + 0,5x^3y (5y)^2 - 7x^2y^2 =$
$= 12,5x^3y^3 - x^2y^2 = (xy)^2(12,5xy-1) =$
$= (-1)^2 \cdot (- 13,5) = -13,5$.

Məlum ədədlər 0 dərəcəli çoxhədlidir ;
$3x^2 + 6x - 5$ - iki dərəcəli çoxhədli, əmsalları 3, 6 , -5 -dir.
$1\frac{2}{3}xy^2 + 0,5x^3yx - 5y$ - beş dərəcəli çoxhədli , əmsalları $1\frac{2}{3}$, 0,5 , - 5 - dir.

$1\frac{2}{3}xy^2 + 0,5x^3yx - 5y$ çoxhədlisinin standart şəkili: $1\frac{2}{3}xy^2 + 0,5x^4y - 5y$;
$2x \cdot 3xy^2 + 0,5x^3y (5y)^2 - 7x^2y^2$ çoxhədlisinin standart şəkilini yazaq:
$12,5x^3y^3 - x^2y^2$.

Birhədlinin çoxhədliyə vurulması:
$3x^3y(4x^2- 5xy) = 12x^5y - 15x^4y^2$;
$(2x^5- x^7 y^3) \cdot (- 3x^3y) = 3x^{10}y^4 - 6x^8y$.

Çoxhədlinin çoxhədliyə vurulması:
$(3x^3y- 0,3xy)(4x^2 - 5xy) = 12x^5y -$
$- 15x^4y^2 - 1,2 x^3y + 1,5x^2y^2$.

Çoxhədlinin vuruqlara ayrılması:
a) $x(a - b) - a + b = x(a - b) - (a - b) =$
$= (a - b)(x -1)$;
b) $8a^2 - 4a - 2ab + b = 4a(2a -1) -$
$- b(2a -1) = (2a -1)(4a - b)$;
c) $x^2 + 3x + 2 = x^2 + x + 2x + 2 =$
$= x(x+1) + 2(x+1) = (x+1)(x+2)$.

§20. Çoxhədlilər üzərində əməllər

Çoxhədlilər üzərindəki əməlləri düzgün və vaxt itirmədən yerinə yetirmək üçün aşağıdakıları bir daha xatırlayaq . Mötərizəni açarkən:

- mötərizə qarşısında mənfi işarə olduqda mötərizə daxilindəki hədlərin işarəsi əksinə dəyişir;

- mötərizə qarşısında müsbət işarə olduqda mötərizə daxilindəki hədlərin işarəsi dəyişmir;

- mötərizənin solundakı və ya sağındakı vuruq mötərizə daxilindəki hər bir həddə vurulur ;

- oxşar hədlər islah olunur.

Qeyd. Çalışma həlli zamanı əməllərin düzgün yerinə yetirildiyini təkrarən nəzərdən keçirin. Ortaq vuruğun mötərizə xaricinə çıxarılmasını tərs əməllə, yəni mötərizənin açılması qaydası ilə yoxlamağı unutmayın.

Çalışma həlli nümunələri

1. Çoxhədlilərin: a) cəminin ; b) fərqinin standart şəklini yazıb onun dərəcəsini tapın:

$21x^3y + 25y^3 - 31yz + 7$ və $- 7x\cdot 3x^2y + 12x^2y - yz - 1$.

Həlli. a) $21x^3y + 25y^3 - 31yz + 7 + (- 7x\cdot 3x^2y + 12x^2y - yz - 1) = \cancel{21x^3y} + 25y^3 - 31yz + 7 - \cancel{21x^3y} + 12x^2y - yz - 1 = 25y^3 - 32yz + 12x^2y + 6$. **Cavab:** 3.

b) $21x^3y + 25y^3 - 31yz + 7 + 21x^3y - 12x^2y + yz + 1 = 42x^3y + 25y^3 - 12x^2y - 30yz + 8$. **Cavab:** 4.

2. A çoxhədlisini tapın:

$A + a^3b^3 + 2ac^3 - bc + 77 = - a^3b^3 + ac^3 - 13bc + 77$.

Həlli. $A + B = C \Rightarrow A = C - B$ mülahizəsinə əsasən

$A = - a^3b^3 + ac^3 - 13bc + \cancel{77} - a^3b^3 - 2ac^3 + bc - \cancel{77} =$

$= \mathbf{- 2a^3b^3 - ac^3 - 12bc}$.

3.Vuruqlara ayırın:

a) $(x-1)^2 + 5(x-1) + 6$; b) $\overline{abc} - \overline{acb}$.

Həlli. a) $(x-1)^2 + 5(x-1) + 6 = (x-1)^2 + 2(x-1) + 3(x-1) + 6 = (x-1)(x-1+2) + 3(x-1+2) = \mathbf{(x+1)(x+2)}$.

b) $\overline{abc} - \overline{acb} = \cancel{100a} + 10b + c - \cancel{100a} - 10c - b = 9b - 9c = \mathbf{9(b-c)}$.

4. * işarəsinin yerinə hansı standart şəkilli birhədlini yazmaq lazımdır ki, üçdərəcəli çoxhədli alınsın:

$ax^4 - 3x^3 + * - 5y + 8$ **?** **Cavab:** $- ax^4$.

5. a parametrinin hansı qiymətində

$(5x^2 - 7x - 4)(ax + 3)$

çoxhədlisinin standart şəklində x^2- nın əmsalı 0 -dır?

Həlli. $(5x^2 - 7x - 4)(ax - 3) = 5ax^3 - 7ax^2 - 4ax - 15x^2 + 21x + 12 = 5ax^3 - (7a + 15)x^2 - (4a - 21)x + 12$;

Şərtə görə $7a + 15 = 0 \Rightarrow \mathbf{a = - 2\frac{1}{7}}$.

6. İsbat edin ki:

$11^{14} - 11^{13} + 11^{12}$ ifadəsi 37-yə bölünür .

İsbatı. $11^{14} - 11^{13} + 11^{12} = 11^{12}(11^2 - 11 + 1) = 11^{12}\cdot 111 = 11^{12}\cdot \mathbf{37}\cdot 3$.

Çalışmalar

1. Çoxhədli şəklində göstərin və onun dərəcəsini tapın:

a) $ab(xy + a - b)$; b) $- 2a - a(2 - b)$ **;**

c) $a(x - a(x - (x - y) - y) + y)$;

d) $ax^3 - (xy - a(x - x^2(x - y) - x^2y))$;

e) $(a + 4)(a^2 - 4a + 16) - 2a^3 - 4$;

f) $(a - 3)(a^2 + 3a + 9) - a^3 - 4a^2$.

2. Çoxhədlilərin cəmi və fərqini standart şəkildə yazın:

$14x^3 + 22x^2 - 31x$ və $- 7x\cdot 2x^2 + 12x^2 - 7x$.

3. a parametrinin hansı qiymətində

$(x^3 - 4x^2 - 3x + 1)(ax - 2)$

çoxhədlisinin standart şəkildə yazılışında:

a) x^2- nın ; b) x^3-nun əmsalı 0 -dır;

c) çoxhədlinin dərəcəsi 3-dür?

4.* işarəsinin yerində hansı ifadəni yazmaq lazımdır ki, çoxhədli vuruqlara ayrılsın:

$ax^4 + bx^3 - * - a^2b$?

5. Sol tərəfdə mötərizələri elə yerdə qoyun ki, eynilik alınsın:

$ax^3 - 2ax^3 + x^2 - ax + 2 = 2x^2$.

6. Çoxhədlini vuruqlara ayırın:

a) $ab - b + 1 - a$; b) $34x^2 - 51xy + 10xz - 15yz$;

c) $4x^2y - 4xy^2 - 2y + 2x$; d) $x^3 + 3x^2 + 3x + 9$;

e) $x^2 + 3x + 2$; f) $x^2 - 6x + 5$; k) $a^{13} + a^{12} - a^{11}$;

l) $\overline{abc} - \overline{cba}$; m) $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$.

7. $x + y = 125$ olduqda çoxhədlinin qiymətini hesablayın: $(x + 4)(y + 4) - (x - 4)(y - 4)$.

8. İsbat edin ki, dəyişənin istənilən qiymətində çoxhədli müsbət qiymətlər alır**:**

$2x^{10} + 5x^6 + 7x^4 + x^2 + 1$.

9. A çoxhədlisini tapın:

$3a^5b^4 + ac^3 - cb + 3 - A = - 2a^3b^3a^2b + ac^3 - 3bc$.

10. Tilləri *a* , *b* və *c* olan düzbucaqlı paralelepipedin həcmini, yan səthini və tam səthini *a* , *b* , *c* ilə ifadə edin, alınan çoxhədlinin dərəcəsini və əmsalları cəmini tapın.

11. $3x^6 + 4x^5 - 5x + A + 7$ çoxhədlisində A-nın yerinə elə çoxhədli yazın ki, alınan çoxhədlinin standart şəkili:

a) 5-dərəcəli ; b) 7-dərəcəli ; c) 3-dərəcəli çoxhədli olsun.

12. Hansı mülahizə doğrudur?

a) ” $7^{14} + 7^{13} - 7^{12}$ ifadəsi 15-ə bölünür ” ;

b) “ $6^{10} + 4^{18} + 2^{36}$ ifadəsi 9-a bölünür ” ;

c) “$81^{15} - 27^{18} - 9^{27} - 3^{54}$ ifadəsi 11-ə bölünür” .

§21. Müxtəsər vurma eynilikləri

İki ədəd cəminin kvadratı:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2.$$

İsbatı. Mötərizənin açılması qaydasına əsasən
$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 =$
$= a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Beləliklə:

İki ədəd cəminin kvadratı bərabərdir: onların kvadratları cəmi üstə gəl onların hasilinin iki misli .

İki ədəd fərqinin kvadratı:

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = a^2 - 2ab + b^2 .$$

İsbatı. $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 =$
$= a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

Beləliklə:

İki ədəd fərqinin kvadratı bərabərdir: onların kvadratları cəmi çıx onların hasilinin iki misli .

Qeyd 1. Yuxarıdakı düsturlardan
$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ və ya $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$
köməkçi düsturlarını alırıq.

Bu düsturlardan bir çox praktiki əməliyyatlarda, o cümlədən ifadələrin vuruqlara ayrılmasında, ifadənin ən böyük və ya ən kiçik qiymətinin tapılmasında istifadə olunur.

Məsələn: a) $(a \pm b)^2$ ifadəsinində ən kiçik qiyməti 0-dır. Ona görə də $(a \pm b)^2 + c$ ifadəsinin ən kiçik qiyməti c-dir.
b) $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$ olduğu üçün $x^2 - 2x + 2$ ifadəsinin ən kiçik qiyməti 1-dir. c) $-(a \pm b)^2$ -ın ən böyük qiyməti 0 olduğu üçün $-(a \pm b)^2 + c$ ifadəsinin ən böyük qiyməti c-dir.
d) $-x^2 - 2x + 2 = -(x + 1)^2 + 3$ olduğu üçün $-x^2 - 2x + 2$ ifadəsinin ən böyük qiyməti 3-dür.

Çalışmalar

1) a) $(1,5a + 2b)^2$; b) $(1,5a - 2b)^2$; c) $(1\frac{2}{3}a - 2\frac{1}{2}b)^2$;

2) a) $(2a + \frac{3}{2a})^2$; b) $(a - \frac{2}{a})^2$; c) $(a^2 + b^2)^2$; d) $(a^2 - b^2)^2$;

3) a) $(\frac{2}{3}a + \frac{3}{2a})^2$; b) $(\frac{3}{5}a - \frac{5}{a})^2$; c) $(a^3 + b^2)^2$; d) $(0,5a^2 - 2b^4)^2$.

4) $0,09a^2 + 4b^2$ ifadəsinə hansı həddi əlavə etmək lazımdır ki, fərqin tam kvadratı alınsın.

5) $1,21a^2 + 0,25b^2$ ifadəsinə nə əlavə etmək lazımdır ki, cəmin tam kvadratı alınsın.

6) $\overline{ab5}^{\,2} = (\overline{ab} \cdot 10 + 5)^2 = \overline{ab} \cdot (\overline{ab} + 1) \cdot 100 + 25$
düsturundan istifadə edərək şifahi hesablayın:
105^2 , 115^2, 195^2, 995^2 , 495^2 , 505^2 .

7) İfadəni vuruqlarına ayırın:
a) $x^3 + xy^2 - 2x^2y$; b) $x^5 + xy^4 + 2x^3y^2$.

8) $a^2 + \frac{1}{a^2} = 27$, $a - \frac{1}{a} = ?$; **9)** $a^2 + \frac{1}{a^2} = 34$, $a + \frac{1}{a} = ?$

Qanunauyğunluqlar:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

1) $(2a + 3b)^2 = 4a^2 + 9b^2 + 12ab$;

2) $(a + \frac{1}{a})^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2$;

3) $(a + \frac{3}{a})^2 = a^2 + \frac{9}{a^2} + 6$;

4) $a + \frac{1}{a} = 3$, $a^2 + \frac{1}{a^2} = ?$

$a^2 + \frac{1}{a^2} = (a + \frac{1}{a})^2 - 2 = 9 - 2 = 7.$

5) $a + \frac{1}{a} = 3$, $a^4 + \frac{1}{a^4} = ?$

$a^4 + \frac{1}{a^4} = (a^2 + \frac{1}{a^2})^2 - 2 = 47.$

Qanunauyğunluqlar:

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

1) $(2a - 3b)^2 = 4a^2 + 9b^2 - 12ab$;

2) $(a - \frac{1}{a})^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} - 2$;

3) $(a - \frac{3}{a})^2 = a^2 + \frac{9}{a^2} - 6$;

4) $a - \frac{1}{a} = 3$, $a^2 + \frac{1}{a^2} = ?$

$a^2 + \frac{1}{a^2} = (a - \frac{1}{a})^2 + 2 = 11;$

5) $4a^2 + b^2 = 4ab$, $\frac{a-b}{a+b} = ?$

$4a^2 + b^2 - 4ab = 0 \Rightarrow (2a - b)^2 = 0$,
$2a - b = 0 \Rightarrow b = 2a.$

$\frac{a-b}{a+b} = \frac{a-2a}{a+2a} = \frac{-a}{3a} = -\frac{1}{3}$.

$\overline{a5}^{\,2} = (10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = a(a + 1) \cdot 100 + 25$
düsturundan istifadə edərək sonu 5 rəqəmi ilə ikirəqəmli ədədlərin kvadratlarını hesablayın:

$35^2 = 3 \cdot 4 \cdot 100 + 25 = 1225$;
$45^2 = 4 \cdot 5 \cdot 100 + 25 = 2025$;
$55^2 = 3025$; $65^2 = 4225$;
$75^2 =$ **...** ; $85^2 =$ **...** ; $95^2 =$ **...** ;
$195^2 = 19 \cdot 20 \cdot 100 + 25 = 38025$;
$995^2 = 990025$, . . .

§ 22. İki ədədin cəmi ilə fərqinin hasili:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

İsbatı. Mötərizənin açılması qaydasına əsasən $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$.

Beləliklə:

İki ədədin cəmi ilə fərqinin hasili bərabərdir: *birincinin kvadratı çıx ikincinin kvadratı.*

Tərs mülahizə. İki ədədin kvadratları fərqi bərabərdir: *birinci ədədlə ikincinin fərqi vur onların cəmi.*

Bu mülahizə düsturla belə yazılır:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Bu eynilik həm də $a^2 - b^2$ ifadəsinin vuruqlara ayrılışıdır.

Qeyd. $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ eyniliyində $2ab$ ifadəsi başqa bir ifadənin tam kvadratı, yəni $2ab = c^2$ olarsa, onda $a^2 + b^2$ ifadəsi vuruqlara ayrılır :

a) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - c^2 = (a + b - c)(a + b + c)$;

b) $a^4 + 4 = (a^2 + 2)^2 - 4a^2 = (a^2 - 2a + 2)(a^2 + 2a + 2)$.

Çalışmalar

1. İfadəni vuruqlarına ayırın :

a) $(2a - 3b)^2 - 4a^2$; b) $49x^2 - 4(x + y)^2$;

c) $25x^2 - 4a^2 - b^2 + 4ab$;

d) $(3a + 2b)^2 - (2a - 3b)^2 + 5a - b$;

e) $(a - b - 2)^2 - (a + b + 2)^2$;

f) $4x^2 - 4x - 5$; k) $9x^2 + 12x - 5$.

2. * işarəsinin yerinə elə ifadə yazın ki, eynilik alınsın:

a) $a^2 + 1 = (a + 1)^2 - *$; b) $a^2 + 1 = (a - 1)^2 - *$;

c) $a^2 - 1 = (a + 1)^2 - *$; d) $a^2 - 1 = (a - 1)^2 - *$.

3. İfadələri çoxhədli şəklində yazın:

a) $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$; b) $(a^3 + b^3)(a^3 - b^3)$;

c) $(a^4 - 2)(a^4 + 2) + 4$; d) $(a^5 - 5)(a^5 + 5) + 25$;

e) $(a + b - c)^2$; f) $(a + b + c + d)^2$;

k) $(a + b - c - d)^2$.

4. Hesablayın :

a) $(3 + 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)\cdot \ldots \cdot(3^{32} + 1) - 0{,}5\cdot 3^{64}$;

b) $(5 + 1)(5^2 + 1)(5^4 + 1)\cdot\ldots\cdot(5^{32} + 1) + 0{,}25$;

c) $\frac{12{,}7^2-12{,}3^2}{27{,}5^2-2{,}5^2}\cdot\frac{3}{4}$; d) $\frac{171^2-29^2+400\cdot 24}{163^2-27^2} - \frac{8}{17}$;

e) $\frac{2{,}7^2-2{,}1^2}{7^2-2{,}2^2}\cdot 2{,}3$; f) $\frac{31^2-6^2}{19^2+18^2+38\cdot 18}\cdot 2\frac{24}{25}$.

5. Vuruqlara ayırın:

a) $4a^4 + 1$; b) $4a^4 + b^4$; c) $16x^2 - y^2 - 24x - 6y$.

6. Tənliyi həll edin:

a) $(2x - 3)^2 = 9$; b) $(2 - x)^2 - 5 = 11$;

c) $(4 - 3y)^2 + 9 = -7$; d) $(4 - 3y)^2 + 9 = 25$.

Qanunauyğunluqlar:

$a^{\cancel{2}} - b^{\cancel{2}}$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Çalışma həlli nümunələri

1. Sadələşdirin:

$(2a + 2)(3a - 3) - 6 = 6a^2 - 12$.

2. İfadəni hasil şəklində göstərin :

a) $3a^2 - 48 = 3(a - 4)(a + 4)$;

b) $9a^4 - 25b^6 = (3a^2 - 5b^3)(3a^2 + 5b^3)$;

c) $x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1^2 = (x-3)(x-1)$;

d) $9x^2 + 6x - 3 = (3x+1)^2 - 2^2 = (3x-1)(3x+3)$.

3. Vuruqlara ayırın:

a) $9x^2 - (x - y)^2 = (3x - x + y)(3x + x - y) =$
$= (2x + y)(4x - y)$;

b) $(a + b)^2 - (a - b)^2 =$
$= (a + b - a + b)(a + b + a - b) = 4ab$;

c) $16x^2 - a^2 - b^2 + 2ab = (4x)^2 - (a - b)^2 =$
$= (4x - a + b)(4x + a - b)$;

d) $4a^2 - 9c^2 + 4a + 6c =$
$= (2a + 1)^2 - (3c - 1)^2 = (2a - 3c + 2)(2a + 3c)$;

e) $(a - b + 2)^2 - (a + b - 2)^2 =$
$= (a - b + 2 - a - b + 2)(a - b + 2 + a + b - 2) =$
$= 2a(4 - 2b) = 4a(2 - b)$.

4. Sadələşdirin:

$a \neq 1$ oldqda $(a + 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1) =$

$$= \frac{(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)}{a-1} = \frac{a^8-1}{a-1}.$$

5. Hesablayın:

a) $7{,}14^2 - 2{,}86^2 = (7{,}14 - 2{,}86)(7{,}14 + 2{,}86) =$
$= 4{,}28\cdot 10 = 42{,}8$;

b) $(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) =$
$= (2-1)(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) =$
$= 2^{32} - 1$;

c) $\frac{71^2-15^2+86\cdot 24}{63^2-23^2} = \frac{(71-15)(71+15)+86\cdot 24}{(63-23)(63+23)} =$
$= \frac{56\cdot 86+86\cdot 24}{40\cdot 86} = \frac{86\cdot(56+24)}{40\cdot 86} = \frac{80}{40} = 2$;

d) $\frac{77^2-23^2}{17^2+13^2+34\cdot 13} = \frac{100\cdot 54}{(17+13)^2} = \frac{100\cdot 54}{900} = 6.$

§23. İki ədədin kubları cəmi və fərqi

İki ədəd cəmi və fərqinin tam kvadratı 1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

İki ədəd cəminin natamam kvadratı: $a^2 + ab + b^2$

İki ədəd fərqinin natamam kvadratı: $a^2 - ab + b^2$

Bu bölmədə $\mathbf{a^3 + b^3}$ və $\mathbf{a^3 - b^3}$ ifadələrinin vuruqlara ayrılmasını öyrənəcəyik.

İki ədədin kubları cəmi:

$$\mathbf{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).}$$

İsbatı. Mötərizənin açılması qaydasına əsasən

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 =$

$= a^3 + b^3$.

Beləliklə:

İki ədədin kubları cəmi bərabərdir: ***onların cəmi vur onların fərqinin natamam kvadratı.***

$a^{\cancel{3}} + b^{\cancel{3}}$ $\quad$ $a^2 - \cancel{2}ab + b^2$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

İki ədədin kubları fərqi:

$$\mathbf{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$$

İsbatı. Mötərizənin açılması qaydasına əsasən

$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b -$

$- ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$.

Beləliklə:

$a^{\cancel{3}} - b^{\cancel{3}}$ $\quad$ $a^2 + \cancel{2}ab + b^2$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

İki ədədin kubları fərqi bərabərdir:

onların fərqi vur onların cəminin natamam kvadratı.

Çalışmalar

1. İfadəni vuruqlarına ayırın :

a) $a^3 + 64$; b) $125a^3 - 64$; c) $0{,}001x^6 - 1000$;

d) $3\frac{1}{8}x^9 + 27y^3$; e) $3\frac{3}{8}x^9 + 8y^3$; f) $0{,}125x^{12} - y^6$.

2. * işarəsinin yerinə elə çoxhədli yazın ki, eynilik alınsın:

a) $a^6 - 1 = (a^3 + 1)(*)$; b) $a^3 + 1 = (a + 1)(*)$;

c) $a^6 - 1 = (a - 1)(*)$; d) $a^6 - 1 = (a + 1)(*)$;

e) $a^8 - 1 = (a^2 - 1)(*)$; f) $a^8 - 1 = (a^2 + 1)(*)$.

3. Hesablayın :

a) $\frac{13^3+27^3}{13^2-13\cdot27+27^2}$; b) $\frac{113^3-13^3}{113^2+113\cdot13+13^2}$;

c) $\frac{6^3+8^3}{9^3+5^3}$; d) $\frac{4^3+9^3+16}{6^3+7^3}$; e) $\frac{2{,}7^3+2{,}1^3}{7^3-2{,}2^3}\cdot 7{,}4$;

f) $\frac{31^3+6^3}{19^3+18^3+37\cdot18}\cdot 14\frac{11}{25}$; k) $\frac{1035\cdot965+1225}{845\cdot755+2025}$.

4. Sadələşdirin:

a) $(x^2 + 4)^2 - x^2(x^2 + 8)$; b) $\frac{x^2-x+1}{x^4+x} + \frac{x^2+x+1}{x^4-x}$;

c) $(x^2 - 6x + 9)(x + 3)^2 + 18x^2$;

d) $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} + \frac{16}{1+a^{16}} + \frac{32}{1+a^{32}}$.

Çalışma həlli nümunələri
1) $a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1)$;
2) $a^3 + 8 = (a + 2)(a^2 - 2a + 4)$;
3) $a^3 + 27 = (a + 3)(a^2 - 3a + 9)$;
4) $(x^2 + 2x + 4)(x - 2)(x^3 + 8) =$ $= (x^3 - 8)(x^3 + 8) = x^6 - 64$;
5) $\frac{x^2-x+1}{x^4+x} = \frac{x^2-x+1}{x(x^3+1)} = \frac{1}{x^2+x}$;
6) $27a^3 - 1 = (3a - 1)(9a^2 + 3a + 1)$;
7) $8a^3 - 1 = (2a - 1)(4a^2 + 2a + 1)$;
8) $125a^3 - 27 = (5a - 3)(25a^2 + 15a + 9)$;
9) $(x^2 - 3x + 9)(x + 3)(x^3 - 27) =$ $= (x^3 + 27)(x^3 - 27) = x^6 - 729$;
10) $\frac{x^3+x^2+x}{x^4-x} = \frac{x(x^2+x+1)}{x(x^3-1)} = \frac{1}{x-1}$;
11) İsbat edin ki: $1^3 + 2^3 + \ldots + 39^3$ cəmi 40 - a bölünür; **İsbatı.** $(1^3 + 39^3) + (2^3 + 38^3) + \ldots +$ $+ (19^3 + 21^3) + 20^3 = 40k + 8000 =$ $= 40(k + 200)$.

§ 24. İki ədəd cəminin və fərqinin kubu

İki ədəd cəminin kubu :

$\mathbf{(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)} = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

İsbatı. $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = (a + b)(a^2 - ab + b^2) +$

$+ 3ab(a + b) = (a + b)(a^2 - ab + b^2 + 3ab) =$

$= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)^3$.

Beləliklə:

İki ədəd cəminin kubu bərabərdir: onların kubları cəmi üstə gəl onların hasili ilə cəminin üç misli.

İki ədəd fərqinin kubu :

$\mathbf{(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)} = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;

İsbatı. $a^3 - b^3 - 3ab(a - b) = (a - b)(a^2 + ab + b^2) -$

$- 3ab(a - b) = (a - b)(a^2 + ab + b^2 - 3ab) =$

$= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2) = (a - b)(a - b)^2 = (a - b)^3$.

Beləliklə:

İki ədəd fərqinin kubu bərabərdir: onların kubları fərqi çıx onların hasili ilə fərqinin üç misli.

Çalışmalar

1. Sadələşdirin:

a) $(2a - 3)^3 + (2a + 3)^3$; b) $(2a - 3)^3 - (2a + 3)^3$;

c) $\left(a - \frac{1}{a}\right)^3 - \left(a + \frac{1}{a}\right)^3$; d) $\left(a - \frac{1}{a}\right)^3 + \left(a + \frac{1}{a}\right)^3$.

2. $a + \frac{1}{a} = 4$, olduqda $a^3 + \frac{1}{a^3} = ?$

3. a) $a < 0$, $a^2 + \frac{1}{a^2} = 18$ olduqda $a^3 - \frac{1}{a^3} = ?$

b) $a^3 + \frac{1}{a^3} = 2$ olduqda $a - \frac{1}{a} = ?$

4. Hansı mülahizə doğrudur?

a) "$1^3 + 2^3 + \ldots + 998^3 + 999^3$ cəmi 1000-ə bölünür " ;

b) "$1^3 + 2^3 + \ldots + 98^3 + 99^3$ cəmi 100-ə bölünür" ;

c) "$1^3 + 2^3 + \ldots + 8^3 + 9^3$ cəmi 10-a bölünür" ;

d) " $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 \ldots + 997^3 - 998^3 + 999^3$ cəmi 1000-ə bölünür " .

e) " $51^3 + 52^3 + \ldots + 98^3 + 99^3$ cəmi 75-ə bölünür ".

5. Tənliyin natural həllərini tapın:

a) $x^2 - y^2 = 111$; b) $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$.

6. " $a + \frac{1}{a}$ cəmi tam ədəd olduqda $a^{81} + \frac{1}{a^{81}}$ cəmi də tam ədəddir " mülahizəsi doğrudurmu? Fikrinizi əsaslandırın.

Qanunauyğunluqlar:

$\mathbf{(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a + b)}$;

$\mathbf{(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b)}$.

Çalışma həlli nümunələri

1) $(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$;

2) $(a + 2)^3 = a^3 + 8 + 3 \cdot a \cdot 2\,(a + 2) =$
$= a^3 + 6a^2 + 12a + 8$;

3) $\left(a + \frac{1}{a}\right)^3 = a^3 + \left(\frac{1}{a}\right)^3 + 3a \cdot \frac{1}{a}\left(a + \frac{1}{a}\right) =$
$= a^3 + \frac{1}{a^3} + 3\left(a + \frac{1}{a}\right)$;

4) $x^3 + y^3 = 19$, $3xy(x+y) = 8$ olduqda $x + y = ?$
$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = 19 + 8 = 27$,
Cavab : $x + y = 3$

5) $(a - 1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1$;

6) $(a - 2)^3 = a^3 - 8 - 3 \cdot a \cdot 2\,(a - 2) =$
$= a^3 - 6a^2 + 12a - 8$;

7) $\left(a - \frac{1}{a}\right)^3 = a^3 - \left(\frac{1}{a}\right)^3 - 3a \cdot \frac{1}{a}\left(a - \frac{1}{a}\right) =$
$= a^3 - \frac{1}{a^3} - 3\left(a - \frac{1}{a}\right)$;

8) $a - \frac{1}{a} = 3$, olduqda $a^3 - \frac{1}{a^3} = ?$

Verilən bərabərliyin hər tərəfini kuba yüksəldək:

$\left(a - \frac{1}{a}\right)^3 = 27 \rightarrow a^3 - \frac{1}{a^3} - 3\left(a - \frac{1}{a}\right) = 27 \rightarrow$

$a^3 - \frac{1}{a^3} - 9 = 27 \rightarrow \mathbf{a^3 - \frac{1}{a^3} = 27 + 9 = 36.}$

9) $a > 0$, $a^2 + \frac{1}{a^2} = 14$, olduqda $a^3 + \frac{1}{a^3} = ?$

Verilən bərabərliyin hər tərəfinə 2 əlavə edək:

$a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 = 16 \rightarrow \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 16 \rightarrow a + \frac{1}{a} =$
$= \pm 4 \rightarrow a + \frac{1}{a} = 4$, çünki $a > 0$.

Sonuncu bərabərliyin hər tərəfini kuba yüksəldək:

$a^3 + \frac{1}{a^3} + 3\left(a + \frac{1}{a}\right) = 64 \rightarrow a^3 + \frac{1}{a^3} + 12 =$
$= 64 \rightarrow \mathbf{a^3 + \frac{1}{a^3} = 52}$.

§ 25. Xətti tənliklər sistemi

İkiməchullu xətti tənlik

Tərif: x və y - məchul ; a, b, m - parametrlər olmaqla

ax + by = m

şəklində olan tənliyə *ikiməchullu xətti tənlik* deyilir.

Bu tənliyi ödəyən (x;y) cütünə tənliyin həlli deyilir.

Məsələn, (1; - 2) ədədlər cütü 2x + 3y = - 4 tənliyinin həllidir, çünki $2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -4$.

- 1,2x + y = 5 , $0 \cdot x + 2y = 7$,
2x + $0 \cdot y = 0$, $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$
tənlikləri *xətti tənliklərdir*;
$x^2 + 2y = 7$, $\frac{2}{x} - 3y = 0$,
$x - |y| = 3$ tənlikləri isə
xətti tənliklər deyil.

ax + by = m tənliyinin araşdırılması

a) a ≠ 0 və b = 0 halında ax = m və yaxud a = 0 və b ≠ 0 halında by = m xətti tənlikləri alındığı üçün tənliyin *yeganə həlli* var.
b) a = 0 , b = 0 və m ≠ 0 olduqda *tənliyin həlli yoxdur* .
c) Qalan hallarda : a ≠ 0 və b ≠ 0 və yaxud a = b = m = 0 olduqda tənliyin *sonsuz sayda həlli* var.
Məsələn, 2x + 3y = - 4 tənliyinin sonsuz sayda həlli var , çünki x məchulunun yerinə istənilən k ədədi yazsaq bu tənlikdən $y = \frac{-4-2k}{3}$ alırıq, yəni 2x + 3y = - 4 tənliyinin ümumi həlli $(k ; \frac{-4-2k}{3})$ cütündən ibarətdir, burada $k \in R$.

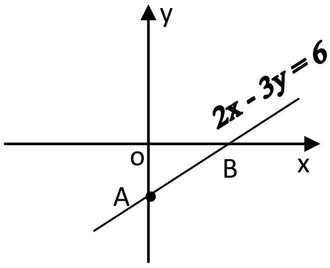
ax + by = m tənliyinin qrafiki

İki dəyişənli tənlik bir dəyişənin digər dəyişəndən asılılığını ifadə etdiyi üçün bu *tənliyin qrafiki* anlayışından söhbət gedə bilər.
Doğrudan da, b ≠ 0 olduqda ax + by = m və $y = -\frac{a}{b} \cdot x + \frac{m}{b}$ tənlikləri eynigüclüdür. Sonuncu tənlik *xətti funksiyanı* ifadə etdiyi üçün onun qrafiki ax + by = m *tənliyinin qrafiki* kimi qəbul edilir.
ax + by = m tənliyinin qrafiki bu tənliyi ödəyən (x;y) cütlər çoxluğunun düzbucaqlı koordinat sistemindəki *təsviridir*.

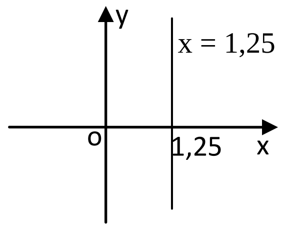
a ≠ 0 , b ≠ 0 və m ≠ 0 olduq-da ax + by = m tənliyinin qrafikini qurmaq üçün onun absis və ordinat oxları ilə kəsişmə nöqtəsini qurmaq kifayətdir:
$x = 0 \Rightarrow y = \frac{m}{b}$, yəni düz xətt ordinat oxunu $(0 ; \frac{m}{b})$ nöqtəsində;
$y = 0 \Rightarrow x = \frac{m}{a}$, yəni düz xətt absis oxunu $(\frac{m}{a} ; 0)$ nöqtəsində kəsir.
Bu nöqtələrdən keçən düz xətt ax + by = m tənliyinin qrafikidir.

Qeyd. a ≠ 0 və b = 0 olduqda ax = m tənliyinin qrafiki $x = \frac{m}{a}$ şəklindədir ki, bu da $(\frac{m}{a} ; 0)$ nöqtəsindən keçib OY oxuna paralel olan düz xəttdir.

Beləliklə, b ≠ 0 və ya a ≠ 0 olduqda ikidəyişənli xətti tənliyin qrafiki düz xəttdir.



Məsələn: a) 2x - 3y = 6 tənliyinin qrafiki A(0;-2) və B(3;0) nöqtələrindən keçən düz xəttdir.
b) 4x = 5 tənliyinə $4x + 0 \cdot y = 5$ şəklində ikidəyişənli tənlik kimi baxdıqda onun qrafiki x = 1,25 düz xəttidir.



a = 0, b = 0 və m ≠ 0 olduqda ax + by = m tənliyinin qrafiki yoxdur, yəni ikidəyişənli xətti tənliyin həllinin olmaması ilə onun qrafikinin olmaması *eyni mənalıdır.*
a = 0 , b = 0 və m = 0 ax + by = m tənliyinin qrafiki koordinat müstəvisinin bütün nöqtələr çoxluğunu əhatə edir.

Çalışmalar

1. Tənliyin qrafikini qurun:
a) 2x - 3y = 4 ; b) - x - y = 2 ; c) - x +2y = -1 ;
d) 3x = 0 ; e) 3y = 0 ; f) 3x + 2y = x + 2 .

2. (-1 ; 2) cütü 2ax - 7y = 6 tənliyinin həllidir. a-nı tapın.

3. (a ; 1,5) cütü ax - 2y = 13 tənliyinin həllidir. a-nı tapın.

4. a-nın hansı qiymətində (a+1) x - 2y = 13 tənliyinin qrafiki absis oxuna paralel olar?

5. a-nın hansı qiymətində (a+1) x - 2ay = 13 tənliyinin qrafiki ordinat oxuna paralel olar?

6. (a - 4) x - 3by = 3 tənliyinin qrafikinin (3;4) və (4;5) nöqtələrindən keçdiyini bilərək a + b cəmini tapın.

7. a və b-nin hansı qiymətlərində (2a - 3) x - 2(b + 2)y = 3b + 6 tənliyinin sonsuz sayda həlli var?

8. Tənliyi həll edin:
a) 2x + 3y = m ; b) 2x + by = 3 .

§ 26. Xətti tənliklər sisteminin araşdırılması

Tərif: x və y - məchullar, a, b, c, d, m, n - parametrlər olduqda

$$\begin{cases} ax + by = m, \\ cx + dy = n \end{cases} \qquad (*)$$

şəklində olan tənliklər sisteminə *xətti tənliklər sistemi* deyilir. *a, c - x* məchulunun; *b, d - y* məchulunun əmsalları ; *m, n* - sistemin *sərbəst hədləridir*.

Sistemin hər bir tənliyini ödəyən (x;y) cütü bu *sistemin həlli* adlanır. Məsələn, (1;-1) cütü

$$\begin{cases} x + 2y = -1, \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$$

sistemin həllidir.

Sistemin *yeganə* və ya *sonsuz sayda* həlli ola bilər və yaxud da *həlli olmaya* bilər. Bu mülahizələri aydınlaşdırmaq üçün x , y məchulların əmsallarından və sərbəst hədlərdən düzəlmiş uyğun nisbətləri nəzərdən keçirək:

$$\frac{a}{c} * \frac{b}{d} * \frac{m}{n};$$

a) Hər iki " * " işarəsinin yerinə " = " işarəsi olduqda: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{m}{n}$,
onda sistemin *sonsuz sayda* həlli var.

b) Soldakı " * " işarəsinin yerinə " = " , sağdakının yerinə " ≠ " işarəsi olduqda: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \neq \frac{m}{n}$,
onda sistemin *həlli yoxdur*.

c) Soldakı " * " işarəsinin yerinə " ≠ " işarəsi (sağdakı işarə nəzərə alınmır) olduqda: $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$,
onda sistemin *yeganə həlli* var.

İsbatı. a) Bu nisbətlərin ümumi qiymətini k (k ≠ 0, çünki k = 0 olduqda sistemin sonsuz sayda həlli var) ilə işarə edək:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{m}{n} = k ,$$

onda a = ck , b = dk , m = nk yaza bilərik. Bunları (*)sisteminin birinci tənliyində nəzərə alsaq

$$\begin{cases} ckx + dky = nk, \\ cx + dy = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cx + dy = n, \\ cx + dy = n \end{cases} \Rightarrow cx + dy = n,$$

xətti tənliklər sistemi ikiməchullu xətti tənliyə gətirilir ki, onun da *sonsuz sayda həlli* var, çünki c ≠ 0, d ≠ 0.

b) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = k$ $(k \neq \frac{m}{n})$ əvəz edək , onda a = ck , b = dk .
Bu qiymətləri (*) sistemində nəzərə alsaq

$$\begin{cases} ckx + dky = m, \\ cx + dy = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cx + dy = \frac{m}{k}, \\ cx + dy = n \end{cases} \Rightarrow \frac{m}{k} = n \Rightarrow k = \frac{m}{n},$$

şərtə görə $k \neq \frac{m}{n}$, yəni *sistemin həlli yoxdur*.

c) (*) sisteminin birinci tənliyinin hər bir həddini d-yə, ikinci tənliyinin hər bir həddini (-b)-yə vurub tərəf-tərəfə toplasaq

$$\begin{cases} adx + bdy = md, \\ -bcx - bdy = -bn \end{cases} \Rightarrow (ad - bc)\, x = md - bn ,$$

şərtə görə $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ ⇒ ad ≠ bc ⇒ ad - bc ≠ 0 ,
yəni x məchulu , o cümlədən y məchulu da yeganə qayda ilə tapıldığından sistemin *yeganə* həlli var.

Xətti tənliklər sistemidir:

$$\begin{cases} -x - 3y = 0, \\ 6x + 2{,}5y = 3; \end{cases}$$ a = -1, b = -3, c = 6, d = 2,5 , m= 0, n =3;

Xətti tənliklər sistemi deyildir:

$$\begin{cases} -x^2 - 3y = 0, \\ 6x + 2{,}5y = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{x} + 7y = 5, \\ -2x + 0{,}4y = 2 \end{cases}$$

Çalışma həlli nümunələri

1. k-nın hansı qiymətində sistemin yeganə həlli var?

$$\begin{cases} kx - 3y = 1, \\ 4x + 6y = 3; \end{cases}$$

Həlli. Şərtə görə $\frac{k}{4} \neq \frac{-3}{6}$ ⇒ **k ≠ - 2 .**

2. k-nın hansı qiymətində sistemin sonsuz sayda həlli var?

$$\begin{cases} 7x + 3ky = 1{,}5, \\ 14x - 6y = 3; \end{cases}$$

Həlli. Şərtə görə $\frac{7}{14} = \frac{3k}{-6} = \frac{1{,}5}{3} \Rightarrow$

⇒ **k = -1.**

3. k-nın hansı qiymətində sistemin həlli yoxdur?

$$\begin{cases} 25x + 3ky = 5, \\ 5x - 3y = 3; \end{cases}$$

Həlli. Şərtə görə $\frac{25}{5} = \frac{3k}{-3} \neq \frac{5}{3} \Rightarrow$

⇒ **k = - 5.**

Çalışmalar

1. k-nın hansı qiymətində sistemin yeganə həlli var?

a) $\begin{cases} kx - 9y = 10, \\ 4x + 6y = 13; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + ky = 7, \\ 2{,}4x - 0{,}3y = 4. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - ky = 10, \\ kx + 3y = 13; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + y = 7k, \\ 4x - 3y = 4. \end{cases}$

2. k-nın hansı qiymətində sistemin həlli yoxdur?

a) $\begin{cases} kx - 12y = 10, \\ 5x - 8y = 13; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3ky = 7, \\ 24x - 36y = 11. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + ky = -12, \\ kx + 3y = 12; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - 1{,}5y = 2k, \\ 4x - 3y = 4. \end{cases}$

3. k-nın hansı qiymətində sistemin sonsuz sayda həlli var?

a) $\begin{cases} kx - 2y = 10, \\ 15x - 18y = 90; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 5ky = 14, \\ 11x - 3y = 7. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + ky = -6, \\ kx + 9y = 6; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - 1{,}5y = 3k, \\ 4x - 3y = 6. \end{cases}$

§27. Xətti tənliklər sisteminin həlli

Tənliklər sistemi bir neçə üsulla həll olunur: *əvəzetmə , toplama , qrafik və xüsusi üsullar.*

Əvəzetmə üsulu

Bu üsulun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, sistemdəki tənliklərin birindən məchullardan biri digəri ilə əvəz edilərək ikinci tənlikdə yerinə yazılır və həll prosesi bildiyimiz qayda üzrə davam etdirilir.

Fikrimizi misal üzrə şərh edək :

$\begin{cases} x-2y=12, \\ 3x-4y=26; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y+12, \\ 3x-4y=26; \end{cases} \Rightarrow 3(2y+12)$ - 4y = 26,

6y + 36 - 4y = 26 ⇒ 2y = -10 ⇒ y = - 5, x = 2·(-5) +12 = 2.

Cavab: (2 ; -5).

Toplama üsulu

Bu üsulun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, sistemdəki tənliklərin eyni məchuldan birinin əmsalları əks ədədlərə gətirilərək (*bir tənliyin hər bir həddini eyni ədədə vurmaqla*) tərəf-tərəfə toplanılır və həll prosesi bildiyimiz qayda üzrə davam etdirilir.

Misallar: a) $\begin{cases} x-2y=12, \\ 3x-4y=26; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x+4y=-24, \\ 3x-4y=26; \end{cases} \Rightarrow x=2.$

x-in bu qiymətini I tənlikdə yerinə yazıb y-i tapırıq: y = -5.

Cavab: (2;-5)

b) $\begin{cases} 2x-3y=2, \\ 7x-5y=7; \end{cases} \left| \begin{matrix} 5 \\ -3 \end{matrix} \right| \Rightarrow \begin{cases} 10x-15y=10, \\ -21x+15y=-21; \end{cases} \Rightarrow$

-11x = -11, x = 1 ; 2·1 - 3y = 2 ⇒ 3y = 0 , y = 0.

Cavab: (1;0) .

Xüsusi üsullara aid nümunələr

a) $\begin{cases} x-2y=12, \\ 3x-4y=26; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=12, \\ x+2(x-2y)=26; \end{cases} \Rightarrow x+2\cdot 12=$

$=26 \Rightarrow x=2;\ \ y=-5.$

b) $\begin{cases} x+y=7, \\ x+4y=25; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=7, \\ x+y+3y=25; \end{cases} \Rightarrow 7+3y=25 \Rightarrow$

⇒ 3y = 18 ⇒ y = 6 ; x = 1 . Cavab: (1 ; 6) .

Qeyd. Bu üsul bəzi sistemlərə tətbiq olunduğu üçün onu xüsusi üsul adlandırırlar.

Qrafik üsul

Bu üsulun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, sistemdəki tənliklərin hər birinin qrafiki eyni koordinat sistemində qurulur.

- Qrafiklər kəsişdikdə bu xətti tənliklər sisteminin yeganə həlli var və kəsişmə nöqtəsinin koordinatları $((x_o;y_o))$ verilmiş sistemin həllidir;

- Qrafiklər kəsişmədikdə sistemin həlli yoxdur;

- Qrafiklər üst-üstə düşdükdə sistemin sonsuz sayda həlli var.

Çalışmalar

1. Tənliyi əvəzetmə üsulu ilə həll edin:

a) $\begin{cases} 3x-y=8, \\ 5x+8y=23; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y=6, \\ 10x-3y=14. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y=11, \\ x+3y=17; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-5y=3, \\ 4x-3y=6. \end{cases}$

2. Tənliyi toplama üsulu ilə həll edin:

a) $\begin{cases} 3x-2y=-1, \\ 7x+2y=10; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+y=6, \\ 10x-3y=4. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+3y=10, \\ x+5y=11; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-5y=-3, \\ 4x-3y=-1. \end{cases}$

3. Tənliyi xüsusi üsulla həll edin:

a) $\begin{cases} x-y=-1, \\ x-2y=18; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=16, \\ 4x+3y=14. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+3y=8, \\ 4x+7y=17; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-5y=3, \\ 4x-19y=5. \end{cases}$

4. Tənliyi qrafik üsulu ilə həll edin:

a) $\begin{cases} x+y=1, \\ x+2y=2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=3, \\ 2x-3y=12. \end{cases}$

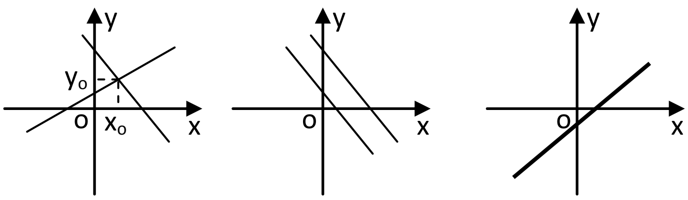
5. ax + 4y = 9x + 5 tənliyinin qrafiki absis oxunu kəsmir. a-nı tapın.

6. x + ky = 5k + 3 tənliyinin qrafiki ordinat oxunu kəsmir. k-nı tapın.

7. $\begin{cases} ax+y=6, \\ 2x+by=8 \end{cases}$ sistemindəki tənliklərin qrafiklərinin (3;5) nöqtəsində kəsişdiyini bilərək (a + b) -ni tapın.

8. $\begin{cases} ax-2y=16, \\ 2x+by=12 \end{cases}$ sistemindəki tənliklərin qrafiklərinin kəsişmə nöqtəsinin absis oxu üzərində olduğunu bilərək a -nı tapın.

9. $\begin{cases} ax-3y=9, \\ 2x-by=8 \end{cases}$ sistemindəki tənliklərin qrafiklərinin kəsişmə nöqtəsinin ordinat oxu üzərində olduğunu bilərək b -ni tapın.



Nəticə. y = ax + b və y = cx + d düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsini tapmaq üçün bu tənliklərin iştirak etdiyi sistem həll olunur.

§ 28. Cəbri kəsrlər və onlar üzərində əməllər

Tam cəbri ifadələr

Tərif : *Yalnız toplama , çıxma , vurma və ya sıfırdan fərqli ədədə bölmə ilə əmələ gələn cəbri ifadəyə tam cəbri ifadə deyilir.*

Məsələn, $1{,}3\,xy$; $3x + 2y$; $5a^3 + 4a^3b - 2a^2$; $\frac{a+b}{2}$ tam ifadələrdir.

Cəbri kəsrlər

Tərif : *Surət və məxrəci tam cəbri ifadə olan kəsrə cəbri kəsr deyilir.*

Məsələn, $\frac{1}{a}$; $\frac{2b}{a+1}$; $\frac{a+b}{2a-3}$ cəbri kəsrlərdir .

Cəbri ifadələrin müqayisəsi

Dəyişənli ifadələri müqayisə edərkən dəyişənin eyni bir mənfi, müsbət və sıfır qiymətlərini ayrılıqda nəzərdən keçirib ümumi nəticəyə gəlmək lazımdır.Məsələn,

ab , $\frac{a}{b}$ ifadələrini 0-la müqayisə edək :

a və b eyni işarəli ədədlər olduqda $ab > 0$, $\frac{a}{b} > 0$;

a və b müxtəlif işarəli ədədlər olduqda $ab < 0$, $\frac{a}{b} < 0$.

İfadənin qiymətlər çoxluğu (İQÇ)

Tərif: Dəyişənlərin bütün mümkün ədədi qiymətlərində ifadənin aldığı bütün qiymətlər çoxluğuna ifadənin *qiymətlər çoxluğu* və ya *dəyişmə oblastı* deyilir.

İfadənin qiymətlər çoxluğunu şərti olaraq İQÇ kimi işarə edəcəyik.

Onu da qeyd edək ki, $y = f(x)$ funksiyasının *qiymətlər çoxluğu* və ya *dəyişmə oblastı* $f(x)$ *ifadəsinin qiymətlər çoxluğudur*. Məsələn, $y = x^2 + |x|$ funksiyasının *qiymətlər çoxluğu (dəyişmə oblastı)* $x^2 + |x|$ ifadəsinin qiymətlər çoxluğudur: $[0 ; \infty)$

Bəzi ifadələrin qiymətlər çoxluğu asanlıqla təsəvvür edilir və yazılır. Məsələn:

x^2 , $|x|$ ifadələrinin ən kiçik qiyməti 0 olduğu üçün onların hər birinin qiymətlər çoxluğu $[0 ; \infty)$ aralığıdır: İQÇ: $[0 ; \infty)$. Eyni qayda ilə alırıq:

$|x| + 2$, İQÇ: $[2 ; \infty)$; $2x + 1$, İQÇ: $(- \infty ; \infty)$;

$- |x| + 1$, İQÇ: $(- \infty ; 1]$; $- a^2 - b^2$, İQÇ: $(- \infty ; 0]$;

$\frac{1}{1+x^2}$, İQÇ: $(0 ; 1]$.

Lakin elə ifadələr də vardır ki, onların qiymətlər çoxluğunu əsaslandırmaq lazımdır. Məsələn, $x^2 - x +1$ ifadəsinin qiymətlər çoxluğu $[\frac{3}{4} ; \infty)$ aralığıdır , çünki $x^2 - x +1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$.

Çalışma həlli nümunələri

Xatırlatma. İfadədəki dəyişənlərin bütün mümkün qiymətlər çoxluğuna *ifadənin təyin oblastı* deyilir.

1. İfadələrin təyin oblastını tapın:

a) $3\,xy + \frac{x}{5}$; b) $3x - 2y$; c) $\frac{2b}{4a-1}$;

d) $\frac{1}{a} - \frac{2b}{a+1}$; e) $\frac{a+b}{2a-3}$.

Həlli. a və b bəndlərindəki ifadələr tam ifadələrdir. Onların təyin oblastı R-dir;

c) $a \neq 0{,}25$; d) $a \neq 0$, $a \neq -1$;

e) $a \neq 1{,}5$.

2. İfadələri müqayisə edin:

a) $- a$ və a ; b) 2 və $2a$; c) $3a$ və $5a$;

d) a və a^2 .

Həlli. a) $a = 0$ olduqda $- a = a$;

$a < 0$ olduqda $- a > a$;

$a > 0$ olduqda $- a < a$.

b) $a \leq 1$ olduqda $2 \geq 2a$; $a > 1$ olduqda $2 < 2a$.

Çalışmalar

1. Dəyişənin mümkün qiymətlər çoxluğunu tapın :

a) $\frac{3b-2}{2a+1} + 2a$; b) $x^2y - \frac{x+y}{3}$;

c) $\frac{x+y}{|x|+1} - 4$; d) $\frac{x-y}{|x|-1} + 7xy$.

2. İfadələri müqayisə edin:

a) $3a$ və $-5a$; b) $-a$ və a^2 ;

c) a , a^2 , a^3 ; d) a və $\frac{1}{a}$.

3. İfadənin ən kiçik qiymətini tapın:

a) $x^2 - 4x + 2$; b) $\frac{x^2+1}{x} + 2$, $(x > 0)$.

4. İfadənin ən böyük qiymətini tapın:

a) $- x^2 + 3x + 2$; b) $-\frac{x^4+1}{x^2}$.

5. İfadənin qiymətlər çoxluğunu tapın:

a) $x^2 + x + 1$; b) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{|x|}$;

c) $|x| + \frac{1}{|x|}$; d) $x^2 - 4x + 3$;

e) $- x^2 + 4x - 5$; f) $- 2x^2 - 2x +3$.

k) $a^2 + b^2 -1$; *l*) $a + b -1$;

m) $a^2 + b^2 + a + b + 1$;

§29. İfadələrin işarələrinə görə araşdırılması

Sıfıra bərabər olan cəbri ifadələr

Cəbri ifadə dəyişənin bəzi və yaxud bütün mümkün qiymətlərində sıfıra çevrilə bilər. Məsələn, 2x + 3 ; 5xy - 7y; $\frac{x-y}{x+y}$; x + $|x|$ ifadələri dəyişənlərin bəzi qiymətlərində , lakin $0 \cdot x$; - x + x ; $\frac{6x-3}{2x-1}$ - 3 ; x(x - y) + xy - x^2 ifadələri isə dəyişənlərin bütün mümkün qiymətlərində 0-a çevrilir.

Dəyişənin (dəyişənlərin) bütün mümkün qiymətlərində sıfıra çevrilən ifadə *eyniliklə sıfıra bərabər olan ifadə* adlanır .

Eyniliklə bərabər olma, simvolik olaraq “ ≡ “ işarəsi ilə göstərilir. Məsələn:

$0 \cdot x \equiv 0$; $-x + x \equiv 0$; $a(x - y) \equiv ax - ay$.

İfadəni (-1) -ə vurduqda ona əks olan ifadə alınır. Məsələn: x və - x ; x(x - y) və xy - x^2 ; 3x - 4 və 4 - 3x əks ifadələrdir.

Əks ifadələrin cəmi eyniliklə 0-a bərabərdir.

Qeyd. Kəsrin sıfıra bərabər olması şərtinə əsasən

$$\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ və } b \neq 0.$$

Məsələn: a) x = 1 $\Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = 0$; b) $\frac{x-y}{x+y} = 0 \Rightarrow x = y \neq 0$;

c) $\frac{x^2-9}{2x+6} = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0$, $2x - 6 \neq 0 \Rightarrow x = -3$.

Sıfırdan fərqli ifadələr

Dəyişənin heç bir qiymətində sıfıra çevrilməyən ifadə sıfırdan fərqli ifadə adlanır.

Tərifdən aydındır ki, sıfırdan fərqli ifadələr yalnız *müsbət* və yaxud *mənfi* qiymətlər alır.

Məsələn, x-ın istənilən mümkün qiymətlərində

$x^2 + 1 \neq 0$, $\frac{1}{x} \neq 0$, $\frac{2}{x+3} \neq 0$, $-\frac{|x|+1}{x^2+1} \neq 0$.

Bildiyimiz kimi kəsrin mənası olması üçün onun məxrəci *sıfırdan fərqli ifadə* olmalıdır.

Məsələn, x + 3 ifadəsi $x \neq -3$ şərti daxilində *sıfırdan fərqli* ifadədir ; x(x-1) ifadəsi $x \neq 0$ və $x \neq 1$ şərti daxilində *sıfırdan fərqli* ifadədir

Sıfırdan fərqli ifadələrin öyrənilməsi, adətən, tənliklərin həllinin araşdırılmasında, ifadələrin (funksiyaların) təyin oblastlarının tapılmasında tətbiq olunur. Məsələn,

a) $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 + 1 = 0$

tənliyinin $x \leq 0$, $x \geq 1$ şərtlərini ödəyən kökü yoxdur , çünki bu şərtlər daxilində tənliyin sol tərəfindəki ifadə sıfıra çevrilmir;

b) y = $\frac{x+2}{x(x+5)}$ funksiyasının təyin oblastı $x \neq 0$ və $x \neq 1$ şərtini ödəyən x-lar çoxluğudur;

c) y = $\frac{x+2}{x^2+4}$ funksiyasının təyin oblastı R-dir.

Çalışmalar

1. Dəyişənin ifadəni sıfıra çevirən qiymətlərini tapın:
a) 2x + 3 ; b) $2x^2 + 3$; c) 5xy - 7y;
d) $\frac{x-y}{x+y}$; e) x + $|x|$; f) $2x^2 + 3y^2$.

2. Eyniliklə sıfıra bərabər olan ifadəni tapın:
a) 2x - 3x ; b) 2 + x^2 - x (2 + x) ;
c) 5xy - y(3x +2x) ; d) $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x+y}{y-x}$;
e) $2x^2 - 2|x|^2$; f) $3x^3 - 3|x|^3$.

3. a-nın hansı qiymətlərində ifadə eyniliklə sıfıra bərabərdir?
a) 3x - ax ; b) 2x + x^2 - x (a + x) ;
c) 7xy - a(3x + 4x) ; d) $\frac{x+2y}{x-3y} + \frac{x+2y}{ay-x}$;
e) $x^2 - 4|ax|^2$; f) $8ax^3 - |2x|^3$.

4. Əks ifadələr hansıdır:
a) $\frac{4}{x}$ və $\frac{-4}{-x}$; b) 3x - x^2 və x (3 + x) ;
c) 5xy və 5x(-y) ; d) $\frac{x+2y}{x-7y}$ və $\frac{-x-2y}{x-7y}$.

5. k-nın hansı qiymətlərində tənliyin sonsuz sayda həlli var?
a) $\frac{9}{x} = \frac{3k}{-x}$; b) 3x - x^2 = kx (x - 3) .

6. İfadənin təyin oblastını tapın:
a) $\frac{4}{x} - \frac{x-4}{x+2}$; b) $\frac{3x-x^2}{3-x}$; c) $\frac{3x-x^2}{x(3+x)}$.

7. Fuksiyanın təyin oblastını tapın:
a) y = $\frac{4}{x^2} - \frac{x+3}{x^2-9}$; b) y = $\frac{4x-x^2}{4-x^2}$;
c) y = $\frac{3x-x^3}{x^2-3x}$; d) y = $|x| + x^2$.

8. Tənliyi həll edin:
a) $\frac{4x}{x^2} = \frac{x+3}{x^2-9}$; b) $\frac{4x-8x^2}{x-2x^2} = \frac{3x-x^3}{x^2-3}$;
c) $x + |x| = \frac{x^2+1}{|x|}$; d) $2 - |x| = \frac{x^2}{|x|+2}$.

9. Bərabərsizliyi həll edin:
a) $\frac{5x-x^2}{5-x} > 2$; b) $\frac{x^2-16}{4-x} > -5$;
c) $x < |x|$; d) $x + |x| < 1 - |x|$.

10. y = $|x-2|$ funksiyasının qrafikinin y = 3 düz xəttindən aşağıda qalan nöqtələrin absislər çoxluğunu tapın.

11. y = $|0{,}5x - 1|$ funksiyasının qrafikinin hansı nöqtəsinin absisi ordinatından üç vahid böyükdür?

§30. Cəbri kəsrlər üzərində əməllər

Kəsrlərin ixtisarı

Adi kəsrlərin xassələrindən bilirik ki,kəsrin surət və məxrəcini sıfırdan fərqli eyni ədədə vurduqda və yaxud böldükdə kəsrin qiyməti dəyişmir. Bu xassə cəbri kəsrlərə də aiddir: $\frac{ab}{ac}=\frac{b}{c}$; $\frac{x}{y}=\frac{xk}{yk}$.

Məsələn, $\frac{3b}{3c}=\frac{b}{c}$; $\frac{5x^2y}{3xy}=\frac{5x}{3}$; $\frac{(a-b)^2}{(b-a)^3}=\frac{1}{b-a}$.

Kəsrlərin toplanması

a) *Məxrəcləri eyni olan cəbri kəsrlərin toplanması adi kəsrlərdəki kimidir:* $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$.

b) Məxrəcləri ortaq vuruğa malik olmayan cəbri kəsrlərin toplanması məxrəcləri qarşılıqlı sadə ədədlər olan adi kəsrlərdəki kimidir: $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{ad+bc}{cd}$.

c) Məxrəcləri ortaq vuruğa malik olan cəbri kəsrlərin toplanması a və b bəndlərdəki qaydaların qarışığı kimi yerinə yetirilir: $\frac{a}{cd}+\frac{b}{ck}=\frac{ak+bd}{cdk}$.

Kəsrlərin çıxılması

a) Məxrəcləri eyni olan cəbri kəsrlərin toplanması adi kəsrlərdəki kimidir: $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$.

b) Məxrəcləri ortaq vuruğa malik olmayan cəbri kəsrlərin toplanması məxrəcləri qarşılıqlı sadə ədədlər olan adi kəsrlərdəki kimidir: $\frac{a}{c}-\frac{b}{d}=\frac{ad-bc}{cd}$.

c) Məxrəcləri ortaq vuruğa malik olan cəbri kəsrlərin toplanması a və b bəndlərindəki qaydaların qarışığı kimi yerinə yetirilir: $\frac{a}{cd}-\frac{b}{ck}=\frac{ak-bd}{cdk}$.

Kəsrlərin vurulması. Cəbri kəsrlərin vurulması adi kəsrlərdəki kimidir: $\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}=\frac{ab}{cd}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

Mümkün olduqda kəsrlər ixtisar edilməlidir. Məsələn,

$$\frac{a\cancel{d}}{c\cancel{k}}\cdot\frac{b\cancel{k}}{\cancel{d}m}=\frac{ab}{cm};\quad \frac{x^3-y^3}{x+y}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+xy+y^2}=$$

$$=\frac{(x-y)\cancel{(x^2+xy+y^2)}}{\cancel{x+y}}\cdot\frac{(x-y)\cancel{(x+y)}}{\cancel{x^2+xy+y^2}}=(x-y)^2.$$

Tərs ifadələr. Hasili eyniliklə 1-ə bərabər olan iki ifadə tərs ifadələr adlanır.

Məsələn, a və $\frac{1}{a}$; $\frac{x}{y}$ və $\frac{y}{x}$ tərs ifadələrdir.

Kəsrlərin bölünməsi. Cəbri kəsrləri bölmək üçün 1-ci kəsri 2-ci kəsrin tərsinə vurmaq lazımdır:

$$\frac{a}{c}:\frac{b}{d}=\frac{a}{c}\cdot\frac{d}{b}.$$

$$\frac{am}{cn}:\frac{ab}{ck}=\frac{\cancel{a}m}{\cancel{c}n}\cdot\frac{\cancel{c}k}{\cancel{a}b}=\frac{mk}{nb};\quad \frac{x^3+y^3}{x-y}:\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}=(x+y)^2.$$

Çalışmalar

1. Kəsrləri ixtisar edin:

a) $\frac{3x+3y}{x^2-y^2}$; b) $\frac{(3y-4x)^2}{16x^2-9y^2}$;

c) $\frac{3x^2-7x+2}{2-6x}$; d) $\frac{5x^2-12x+4}{6+3x}$.

2. Toplamanı yerinə yetirin:

a) $\frac{4x}{4x^2-y^2}+\frac{2}{y-2x}$; b) $x-5+\frac{16-x^2}{5+x}$;

c) $\frac{6+x^2}{3-x}+x+3$; d) $\frac{13+x^2}{4-x}+x-3$.

3. Çıxmanı yerinə yetirin:

a) $\frac{b}{b+a}-\frac{b-a}{b}$; b) $x-3-\frac{6+x^2}{3+x}$;

c) $\frac{6-x^2}{3-x}-x-3$; d) $x-3-\frac{12+x^2}{4+x}$.

4. Vurmanı yerinə yetirin:

a) $\frac{2xa}{6a+6x}\cdot\frac{ax+x^2}{a^2}$; b) $\frac{4x+3a}{3xa}\cdot\frac{x-a}{9a+12x}$;

c) $\frac{2x^3-2y^3}{x^2-y^2}\cdot\frac{3y^2+3xy}{x^2+xy+y^2}\cdot\frac{4x^2-4xy}{6xy}$.

5. Bölməni yerinə yetirin:

a) $\frac{6x+6y}{a}:\frac{3x^2-3y^2}{a^2}$;

b) $\frac{18xy}{x-3y}:\frac{9xy}{x^2-9y^2}$;

c) $\frac{2x^4-2y^4}{x^3+y^3}:\frac{3y^2+3xy}{x^2-xy+y^2}:\frac{4x^2+4x^2}{6xy}$.

6. Əməlləri yerinə yetirin:

a) $\frac{2a+2b}{b}\cdot\left(\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}\right)-\frac{1}{a-b}$;

b) $\left(\frac{1}{m-n}-\frac{1}{m+n}\right):\frac{2}{3m-3n}+\frac{3m}{m+n}$;

c) $x-2\left(\frac{4x}{x+2}+2x\right)\cdot\frac{x+2}{4x^2}-\frac{2}{x}$;

d) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{2ab}{a^2-b^2}-\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right):\frac{b^2-a^2}{ab^2}$;

e) $\frac{x-2}{x}-\frac{x^2-4}{x}\cdot\frac{1}{x+2}+\frac{x+2}{x}$.

7. $\frac{x-y}{y}=4$ olduğunu bilərək, $\frac{4x-5y}{3x}$ ifadəsinin qiymətini tapın.

8. $x^2+y^2=10xy$ olduğunu bilərək $\left|\frac{x-y}{x+y}\right|$ ifadəsinin qiymətini tapın.

9. $4a^2+b^2=4ab$ olduğunu bilərək $\frac{3a+2b}{3a-2b}$ ifadəsinin qiymətini tapın.

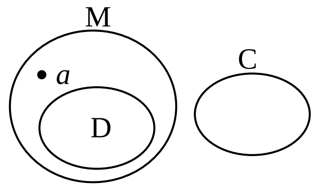
10. $\frac{53}{a-7}$ ifadəsini tam ədədə çevirən a-ların mümkün qiymətlər cəmini tapın.

§31. Çoxluqlar

Çoxluqlarla tanış olsaq da bəzi *xatırlamaları* nəzərdən keçirək.

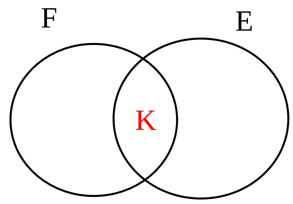
Elementin çoxluğa daxil olması $\in$, daxil olmaması $\notin$ işarəsi ilə göstərilir. Məsələn, $a \in$ M , $a \notin$ D .

Çoxluğun çoxluğa daxil olması $\subset$, daxil olmaması $\not\subset$ işarəsi ilə göstərilir. Məsələn, D $\subset$ M , C $\not\subset$ M .

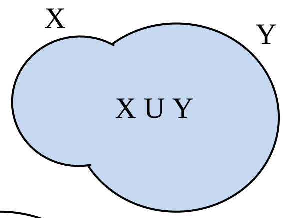


Bütün elementləri eyni olan iki çoxluq bərabər çoxluq adlanır.

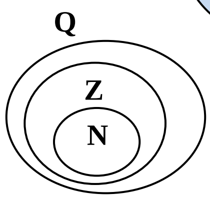
İki çoxluğun kəsişməsi. İki çoxluğun bütün ortaq elementlərindən təşkil olunmuş çoxluq həmin iki çoxluğun kəsişməsi adlanır və ∩ simvolu ilə işarə olunur: F∩E = K , M∩D = D .



İki çoxluğun birləşməsi. İki çoxluğun bütün elementlərindən təşkil olunan çoxluq həmin iki çoxluğun birləşməsi adlanır və U simvolu ilə işarə olunur: N U Z = Z , Z U Q = Q .



Alt çoxluq. Bir çoxluğun elementlərindən təşkil olunan çoxluq həmin çoxluğun alt çoxluğu adlanır. Məsələn, N natural ədədlər çoxluğu Z tam ədədlər çoxluğunun , Z isə Q rasional ədədlər çoxluğunun alt çoxluqlarıdır.



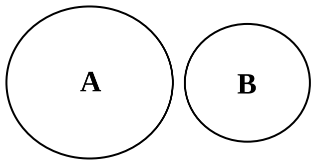
Hər bir çoxluq da özünün alt çoxluğudur.

Elementlərinin sayı n olan çoxluğun bütün alt çoxluqlarının sayı 2^n *-dir.*

Məsələn, rəqəmlər çoxluğunun bütün *alt çoxluqlarının sayı* 2^{10} = 1024-dür.

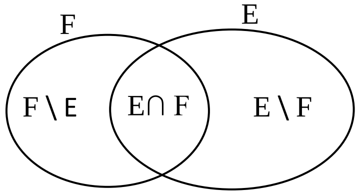
Boş çoxluq. Elementi olmayan çoxluğa boş çoxluq deyilir və Ø kimi işarə olunur. Boş çoxluq istənilən çoxluğun alt çoxluğudur.

Məsələn, x^2 = - 1 tənliyinin köklər çoxluğu Ø-dur.



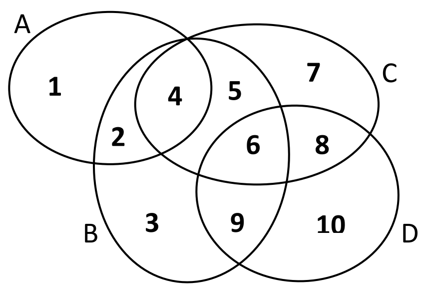
A∩B = ∅

İki çoxluğun fərqi - bir çoxluqdan digər çoxluğun bütün elementlərini kənar etdikdə alınan çoxluqdur. İki çoxluğun fərqi \ simvolu ilə işarə olunur .



Məsələn, Z \ N = { 0, -1,-2,-3, ... }.

Elementlərinin sayı sonlu olan çoxluq sonlu, elementlərinin sayı sonsuz olan çoxluq isə sonsuz çoxluq adlanır. Məsələn, bildiyimiz *rəqəmlər çoxluğu* sonlu çoxluq , natural ədədlər (N) , tam ədədlər (Z) və rasional ədədlər çoxluğu (Q) sonsuz çoxluqlardır . n elementli A çoxluğunun elementlərinin sayı A(n) ilə işarə olunur.



Əsas xassələr:

1. n(XUY) = n(X) + n(Y) - n(X∩Y) ;
2. X∩Y = X ⇔ X ⊂ Y ; X∩X = X ;
3. XUY = Y ⇔ X ⊂ Y; **Y**UY = Y;
4. X ∩ Y = ∅ olduqda X \ Y = X;
5. X \ X = ∅.

Çalışma

Nömrələnmiş zolaqları A , B , C , D çoxluqları ilə ifadə edin. Məsələn, 1 = A\ B ; 2 = A∩ B \ C ; ... .

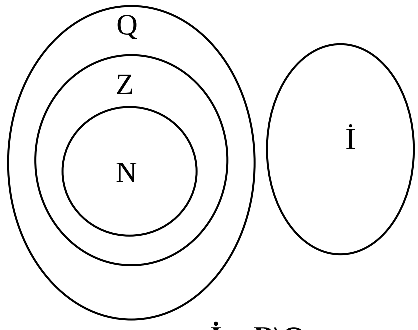
§32. Həqiqi ədədlər

Həqiqi ədədlər çoxluğu iki hissədən ibarətdir: *rasional ədədlər və irrasional ədədlər.*

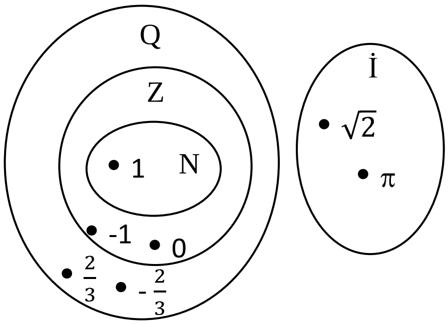
***Rasional ədədlər** - adi kəsr şəklində göstərilə bilən ədədlərə deyilir.*

Bu tərifdən aydındır ki, bütün adi kəsrlər, sonlu onluq kəsrlər , sonsuz dövrü onluq kəsrlər rasional ədədlərdir. Hər bir *tam ədədə məxrəci 1 olan adi kəsr* kimi baxmaq mümkün olduğundan bütün tam ədədlər də rasional ədədlərdir .

Məsələn, -2 , $-0{,}5$, 1 , 0 , $-\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $-0{,}(3)$, $1{,}2(5)$ rasional ədədlərdir.



İ = R\Q



Xatırlayaq ki, natural ədədlər çoxluğu **N** , tam ədədlər çoxluğu **Z** , rasional ədədlər çoxluğu **Q** , həqiqi ədədlər çoxluğu **R** , irrasional ədədlər çoxluğu **İ** hərfi ilə işarə olunur , onda

$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{İ}$ ($\mathbf{Q} \cap \mathbf{İ} = \varnothing$) , $\mathbf{Q} = \{ \frac{m}{n}$, $n \in N$, $m \in Z$ },

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

***İrrasional ədədlər** - adi kəsr şəklində göstərilə bilməyən ədədlərə deyilir.*

Dövrü olmayan sonsuz onluq kəsrlər adi kəsr şəklində göstərilə bilmədiyindən belə onluq kəsrlər irrasional ədədlərdir. Məsələn, $\pi = 3{,}14... \in$ İ ; $0{,}123456789101112... \in$ İ ; $\sqrt{3} \in$ İ .

Rasional və irrasional ədədlərin xassələri

1. İki rasional ədədin cəmi və fərqi rasional ədəddir:

$a , b \in Q \Rightarrow a \pm b \in Q.$

İsbatı. Şərtə görə $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{p}{q}$, $m , p \in Z$, $n , q \in N$, onda

$a \pm b = \frac{m}{n} \pm \frac{p}{q} = \frac{mq \pm np}{nq} \in Q$, çünki $mq \pm np \in Z$, $nq \in N$.

Eyni qayda ilə 2-ci və 3-cü xassələr isbat olunur.

2. İki rasional ədədin hasili rasional ədəddir:

$a , b \in Q \Rightarrow a \cdot b \in Q.$

3. İki rasional ədədin nisbəti rasional ədəddir:

$a , b \in Q \Rightarrow a : b \in Q , \; b \neq 0.$

4. Biri rasional, digəri irrasional olan iki ədədin cəmi və fərqi irrasional ədəddir:

$a \in Q$, $b \in$ İ $\Rightarrow a \pm b \in$ İ.

İsbatı. Əksini fərz edək. Tutaq ki, $a \in Q$, $b \in$ İ $\Rightarrow a \pm b \in Q$,

onda $a = \frac{m}{n}$, $\frac{m}{n} \pm b = \frac{p}{q} \Rightarrow \pm b = \frac{p}{q} \pm \frac{m}{n} \Rightarrow b = \frac{p}{q} \pm \frac{m}{n} \in Q$

bu isə ola bilməz ,çünki şərtə görə $b \in$ İ.

Eyni qayda ilə 5-ci xassə isbat olunur.

5. Biri rasional, digəri irrasional olan iki ədədin hasili və nisbəti irrasional ədəddir:

$a \in Q$, $b \in$ İ $\Rightarrow a \cdot b \in$ İ ; $a : b \in$ İ ($b \neq 0$) .

İki irrasional ədədin cəmi, fərqi, hasili, nisbəti rasional və yaxud irrasional ədəd ola bilər. Məsələn:

I. $a = 1 - \pi$, $b = \pi \in$ İ qəbul edək, onda $a + b = 1 \in Q$.

II. $a = \pi$, $b = \pi \in$ İ qəbul edək, onda $a + b = 2\pi \in$ İ.

III. $a = 1 + \pi$, $b = \pi \in$ İ qəbul edək, onda $a - b = 1 \in Q$.

IV. $a = \pi$, $b = \frac{1}{\pi} \in$ İ qəbul edək, onda $a \cdot b = 1 \in Q$.

V. $a = \pi$, $b = \pi \in$ İ qəbul edək, onda $a : b = 1 \in Q$.

Çalışmalar

1. $a \in Q$, $b \in$ İ olarsa hansı təkliflər doğru bilər?

a) $2ab^2 \in Q$; b) $3a - 2b \in Q$;

c) $\frac{2b}{4a-1} \in$ İ ; d) $\pi (a - b) \in Q$.

2. a , b ∈ İ olarsa hansı təkliflər yanlışdır?

a) $16ab + \frac{a}{25} \in Q$; b) $3a - 2 \in$ İ;

c) $\frac{9}{4a-1} \in$ İ ; d) $\pi (a - b) \in Q$;

e) $\pi - b \in Q$; f) $\pi + ab \in Q$.

3. “Mən o vaxt o ədədi bilmirdim” cümləsində söhbət hansı məlum ədəddən gedir?

§33. Kvadrat köklər və onların xassələri

Kvadrat kökalma. Hesabi kvadrat kök

Tərif: *Kvadratı a-ya ($a \geq 0$) bərabər olan mənfi olmayan ədədə a ədədinin hesabi kvadrat kökü deyilir və $\sqrt{a}$ kimi işarə olunur .*

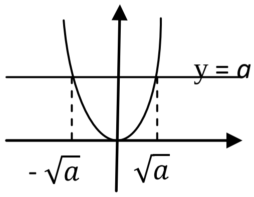
Kvadratı a-ya ($a \geq 0$) bərabər olan ədədi b ilə ($b \geq 0$) işarə etsək, onda $b^2 = a \leftrightarrow \sqrt{a} = b$.

Məsələn,

a) 4-ün iki kvadrat kökü vardır: - 2 və 2 . Yalnız 2 ədədi 4-ün hesabi kvadrat köküdür;

b) 3-ün hesabi kvadrat kökü $\sqrt{3}$, kvadrat kökləri isə $\pm\sqrt{3}$-dür .

Müsbət a ədədinin iki müxtəlif kvadrat kökünün olması $y = x^2$ və $y = a$ funksiyaları qrafiklərinin iki nöqtədə kəsişməsindən alınır.



a) $a = 0$ olduqda $x = 0$; b) $a < 0$ olduqda $x = \varnothing$;
c) $a > 0$ olduqda isə $y = x^2$ və $y = a$ funksiyaları qrafiklərinin kəsişmə nöqtələrinin absisləri $x^2 = a$ tənliyinin kökləri olduğu üçün $x = \pm\sqrt{a}$. Məsələn, $x^2 = 0$; $x^2 = 9$; $x^2 = 7$; $x^2 = -9$ tənliklərinin kökləri, uyğun olaraq, belədir:

$x = 0$; $x = \pm 3$; $x = \pm\sqrt{7}$; $x = \varnothing$.

Kvadrat köklərin xassələri

1. $\sqrt{a} = b \leftrightarrow a = b^2$, ($b \geq 0$, $a \geq 0$) ;
2. $(\sqrt{a})^2 = a$, ($a \geq 0$) ;
3. $\sqrt{a^2} = |a|$, ($a \in R$) ;
4. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, ($a \geq 0$, $b \geq 0$) ;
5. $(\sqrt{a})^m = \sqrt{a^m}$, ($a \geq 0$) ;
6. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, ($a \geq 0$, $b > 0$) .

Çalışma həlli nümunələri

1. Mənası olan ifadə hansıdır**:**

a) $\sqrt{(-4)^2}$; b) $\sqrt{\frac{3{,}14-\pi}{2-\sqrt{5}}}$; c) $\sqrt{\frac{\pi-3{,}14}{5-\sqrt{30}}}$.

Cavab: a) , b) .

2. Dəyişənin hansı qiymətlərində ifadənin mənası yoxdur: a) $\sqrt{(-x)^2}$; *b)* $\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

Həlli.
a) $\Rightarrow (-x)^2 < 0 \Rightarrow x^2 < 0 \Rightarrow \boldsymbol{x = \varnothing}$ **;**
b) $\boldsymbol{x < 0}$ **.**

3. İfadənin təyin oblastını (İTO) tapın:
a) $\sqrt{-x^2-2x-2}$; b) $\sqrt{x} + \sqrt{-x}$.

Həlli. a) $\Rightarrow -x^2-2x-2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 2 \leq 0 \Rightarrow (x+1)^2 + 1 \leq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x+1)^2 \leq -1 \Rightarrow$ İTO: $\varnothing$ **;**
b) $\sqrt{x} + \sqrt{-x} \Rightarrow$ İTO: $x = 0$.

4. Hesablayın:
a) $(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}})(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}})$;

b) $(\sqrt{2})^{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}}$; c) $(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}})^2$.

Həlli. a) $\Rightarrow (\sqrt{2+\sqrt{3}})^2 - (\sqrt{2-\sqrt{3}})^2 = 2 + \sqrt{3} - (2 - \sqrt{3}) = \boldsymbol{2\sqrt{3}}$. b) $\Rightarrow (\sqrt{2})^2 = \boldsymbol{2}$.
c) $(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}})^2 = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} - 2\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} = 4 - 2\sqrt{4-3} =$ **2 .**

5. Sadələşdirin:
a) $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$; b) $\sqrt{a+2\sqrt{a}+1}$.

Həlli. a) $\Rightarrow \sqrt{(3-\sqrt{3})^2} = |3-\sqrt{3}| = 3 - \sqrt{3}$;

b) $\Rightarrow \sqrt{(1+\sqrt{a})^2} = |1+\sqrt{a}| = \boldsymbol{1+\sqrt{a}}$, ($a \geq 0$)

6. Tənliyi həll edin:
a) $4\sqrt{x} + 5\sqrt{4x+3} = \sqrt{9x}$;
b) $2\sqrt{(x-1)^2} - 6 = |x-1|$.

Həlli. a) $\Rightarrow \sqrt{x} + 5\sqrt{4x+3} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 0$ və $4x+3 = 0 \Rightarrow x = 0$ və $x = -\frac{3}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow \boldsymbol{x = \varnothing}$, çünki x eyni zamanda 0 və $-\frac{3}{4}$ ola bilməz ; b) $\Rightarrow 2|x-1| - 6 = |x-1| \Rightarrow$
$|x-1| = 6 \Rightarrow x = 1 \pm 6$, $x_1 = 7$, $x_2 = -5$.

7. Bərabərsizliyi həll edin:

a) $\sqrt{x} \leq \sqrt{9x}$; b) $\sqrt{x^2} < 4 - |x|$.

Həlli. a) $\Rightarrow \sqrt{x} \leq 3\sqrt{x} \Rightarrow 2\sqrt{x} \geq 0$, $\boldsymbol{x \geq 0}$ **.**

b) $\Rightarrow |x| < 4 - |x| \Rightarrow 2|x| < 4 \Rightarrow \boldsymbol{-2 < x < 2}$ **.**

8. a-nın hansı qiymətlərində $\sqrt{2x-3} > 3 + a$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğu $[1{,}5 ; \infty)$-dur ?

Həlli. **3** + a < 0 ⇒ **a** < - **3** .

9. $a = \sqrt{15} - \sqrt{10}$, $b = \sqrt{11} - \sqrt{6}$, $c = \sqrt{8} - \sqrt{3}$ olduqda a, b , c ədədlərini artan sıra ilə düzün.

Həlli. $a = \frac{(\sqrt{15}-\sqrt{10})(\sqrt{15}+\sqrt{10})}{\sqrt{15}+\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{15}+\sqrt{10}}$;
$b = \frac{(\sqrt{11}-\sqrt{6})(\sqrt{11}+\sqrt{6})}{\sqrt{11}+\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{11}+\sqrt{6}}$;
$c = \frac{(\sqrt{8}-\sqrt{3})(\sqrt{8}+\sqrt{3})}{\sqrt{8}+\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{8}+\sqrt{3}}$.

Cavab: a < b < c .

§34. Çalışmalar

1. Mənası olan ifadə hansıdır**:**

a) $-\sqrt{3}$; b) $\sqrt{-3}$; c) $-\sqrt{a^2}$; d) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$;

e) $\sqrt{3-\sqrt{10}}$; f) $(\sqrt{-3})^2$; k) $\sqrt{(-4)^2}$.

2. Dəyişənin hansı qiymətlərində ifadənin mənası yoxdur:

a) $-\sqrt{a-2}$; b) $\sqrt{-b^2}$ + b -1 ; c) $-\sqrt{c^2}$ + c ;

d) $\sqrt{1+\sqrt{b}}$; e) $\sqrt{1-\sqrt{b}}$; f) $(\sqrt{-x})^2$.

3. İfadənin təyin oblastını (İTO) tapın:

a) $\sqrt{\frac{3{,}14-\pi}{2-\sqrt{x}}}$; b) $\sqrt{\frac{\pi-3{,}14}{x-\sqrt{2}}}$; c) $\sqrt{x^2-2x+2}$;

d) $\sqrt{1-|x|}$.

4. Hesablayın:

a) $\sqrt{1+\sqrt{9}}$; b) $\sqrt{169-\sqrt{625}}$; c) $\sqrt{36\sqrt{256}}$;

d) $\sqrt{3^2+4^2+12^2} + \sqrt{39-\sqrt{196}}$;

e) $\sqrt{32{,}4} - \sqrt{6{,}4} - \sqrt{19{,}6 \cdot 2{,}5} + 3$.

5. Sadələşdirin:

a) $\sqrt{8} + \sqrt{0{,}5} - \sqrt{\frac{1}{8}}$; b) $5\sqrt{0{,}1} + \sqrt{0{,}4} + \sqrt{0{,}9}$.

6. Tənliyi həll edin:

a) $3\sqrt{x} + 5\sqrt{4x+3} = \sqrt{4x}$;

b) $297\sqrt{3x-4} = -2{,}1$;

c) $\sqrt{8x} + 5\sqrt{2x} + 7 = 2\sqrt{32x}$; d) $\sqrt{x} = x$.

7. Bərabərsizliyi həll edin:

a) $\sqrt{2x-4} \le 0$; b) $9{,}7\sqrt{3x+4} < 0$;

c) $\sqrt{8x} + 5\sqrt{2x} - 7 \le \sqrt{32x}$.

8. a-nın hansı qiymətlərində

$\sqrt{x-1} \le 2 - a$

bərabərsizliyinin həlli boş çoxluqdur?

9. Hesablayın:

a) $(\sqrt{3})^{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}}$; b) $(\sqrt{5})^{(\sqrt{5})^{\sqrt{5}}}$; c) $\sqrt{1\frac{9}{16} \cdot 2\frac{1}{4} \cdot 5\frac{4}{9}}$ **;**

d) $\sqrt{48{,}4} - \sqrt{14{,}4} + 2 - \sqrt{10}$;

e) $(3-\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{3}}$;

f) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{3}}$;

k) $\sqrt{98\sqrt{\sqrt{225}+309}} - \sqrt{8\sqrt{\sqrt{121}-7}}$;

e) $(3-\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{18+6\sqrt{3}}$.

10. İfadənin qiymətini tapın:

a) $(\sqrt{108} - \sqrt{48} + \sqrt{75}) \cdot 2\sqrt{3} + 6$;

b) $(\sqrt{18} - \sqrt{8} + \sqrt{50}) : 3\sqrt{2} + 2$;

c) $(2-\sqrt{3})^2 - (2+\sqrt{3})^2 + 14$;

d) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 - 13$;

e) $(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}})^2 - 4$;

f) $(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}})^4$;

k) $(\sqrt{5+\sqrt{21}} - \sqrt{5-\sqrt{21}})^6$.

11. Hesablayın:

a) $\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}$;

b) $\sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}} + 5$;

c) $\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$;

d) $\sqrt{7+\sqrt{13}} - \sqrt{7-\sqrt{13}}$;

e) $\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2}$;

f) $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{6} + 1$.

12. Vuruqlara ayırın:

a) $a + 2\sqrt{a} + 1$; b) $a - 6\sqrt{a} + 9$; c) $a^2 + 4$;

d) $a - 6\sqrt{a} + 8$; e) $a + 2\sqrt{a} - 3$; f) $a + \sqrt{a} - 2$;

k) $(a+\sqrt{2})^2 + a^2 - 2$; m) $(\sqrt{a}+2)^2 - a + 4$;

n) $a + 2\sqrt{a} - b + 6\sqrt{b} - 8$.

13. Tənliyi həll edin:

a) $4\sqrt{x} + 5\sqrt{4x} = \sqrt{16x} + 18$; b) $\sqrt{x} = -x$;

c) $4\sqrt{3x-4} + 15 = 7$; d) $x\sqrt{x} = |x|$;

e) $\sqrt{27x} + 3\sqrt{75x} - 17 = \sqrt{3x}$;

f) $3\sqrt{4x} - 4\sqrt{4x-3} = 2\sqrt{x}$;

k) $5\sqrt{(2-x)^2} - 16 = |x-2|$.

14. Bərabərsizliyi həll edin:

a) $5\sqrt{3x-4} \le 0$; b) $2\sqrt{4-x} < 0$;

c) $3\sqrt{1-x} + 5\sqrt{x-1} + 6 \le 14$;

d) $\sqrt{x^2} \le x\sqrt{x}$; e) $\sqrt{x^2} < 4 - |x|$.

15. $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olduqda $\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-x} - \frac{1+\sqrt{1+x}}{1+x}$ ifadəsinin qiymətini tapın.

16. Sahəsi 36 m^2 olan düzbucaqlının bir tərəfi digər tərəfinin 25%-dir. Bu düzbucaqlının perimetrini tapın.

17. Kvadratının iki misli özündən üç dəfə kiçik olan ədədi tapın.

18. Üç ardıcıl tam ədədin hasili ortadakı ədəddən 24 dəfə böyükdür. Böyük ədədi tapın.

19. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ədədinin onluq kəsrlə yazılışıdakı 2-ci onluq işarəsi hansı rəqəmdir?

20. İsbat edin ki, $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbf{İ}$.

§35. Kvadrat kökün xassələri

(davamı)

Vuruğun kvadrat kök işarəsi xaricinə çıxarılması

Məlum qaydaları misallar üzrə şərh edək.

$\sqrt{a^2\cdot b} = \sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b} = |a|\sqrt{b}$.

$\sqrt{a^3} = \sqrt{a^2\cdot a} = |a|\sqrt{a}$.

$\sqrt{a^5} = \sqrt{a^4\cdot a} = a^2\sqrt{a}$.

Buradan alırıq ki,

$\sqrt{a^2\cdot b} = a\sqrt{b}$, *əgər* $a \geq 0$;

$\sqrt{a^2\cdot b} = -a\sqrt{b}$, *əgər* $a \leq 0$.

Məsələn: $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$; $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$;

$\sqrt{-a^3} = \sqrt{-a^2\cdot a} = |a|\sqrt{-a} = -a\sqrt{-a}$,

çünki $\sqrt{-a^3}$ ifadəsinin təyin oblastı $a \leq 0$ şərtini ödəyən a-lardan ibarət olduğu üçün $|a| = -a$.

Vuruğun kvadrat kök işarəsi altına daxil edilməsi

$a \geq 0$, $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2\cdot b}$,

$a \leq 0$, $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2\cdot b}$,

Məsələn: $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$; $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$;

$-2\sqrt{3} = -\sqrt{12}$; $-3\sqrt{5} = -\sqrt{45}$;

Kəsrin məxrəcinin irrasionallıqdan azad edilməsi

Kvadrat kökün $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ xassəsindən istifadə edərək kəsrin məxrəcini (bəzən də suratini) kök işarəsindən (*irrasionallıqdan*) azad etmək olar.

Misallar üzrə fikrimizi izah edək.

a) $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{2\cdot 6} = \frac{\sqrt{6}}{4}$;

c) $\frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} = \frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1} =$

$= \frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{3-1} = \sqrt{3} - 1$;

d) $\frac{1}{\sqrt{18}+\sqrt{32}-7} + \frac{1}{\sqrt{98}+7} + \frac{5\sqrt{2}}{7} =$

$= \frac{1}{3\sqrt{2}+4\sqrt{2}-7} + \frac{1}{7\sqrt{2}+7} + \frac{5\sqrt{2}}{7} =$

$= \frac{1}{7\left(\sqrt{2}-1\right)} + \frac{1}{7\left(\sqrt{2}+1\right)} + \frac{5\sqrt{2}}{7} =$

$= \frac{\sqrt{2}+1}{7} + \frac{\sqrt{2}-1}{7} + \frac{5\sqrt{2}}{7} = \frac{7\sqrt{2}}{7} = \sqrt{2}$;

e) $\frac{\sqrt{a}}{b} = \frac{a}{b\sqrt{a}}$; $\sqrt{a} - 1 = \frac{a-1}{\sqrt{a}+1}$.

Çalışmalar

1. Vuruğu kök işarəsi xaricinə çıxarın:

a) $\sqrt{27}$; $-3\sqrt{18}$; $\sqrt{98}$; $9\sqrt{28}$; $-3\sqrt{48}$;

b) $\sqrt{a^3}$; $\sqrt{a^5}$; $\sqrt{-a^7}$; $\sqrt{-a^9}$; $\sqrt{a^6}$; $\sqrt{a^8}$;

c) $a\sqrt{a^{14}}$, $a < 0$; $\sqrt{a^{10}}$, $a \geq 0$; $\sqrt{a^8}$, $a < 0$.

2. Vuruğu kök işarəsi altına daxil edin:

a) $2\sqrt{5}$; $3\sqrt{12}$; $-4\sqrt{5}$; $12\sqrt{0,5}$; $-3\sqrt{1,2}$;

b) $2a\sqrt{a}$; $-a\sqrt{-a}$; $0,2a\sqrt{\frac{2}{a}}$; $3a\sqrt{-a}$;

c) $(4-a)\sqrt{\frac{4}{a-4}}$; $(3-a)\sqrt{\frac{a^2}{2a-6}}$; $(4-2a)\sqrt{\frac{|a|}{a-2}}$.

3. Kəsrin məxrəcini kök işarəsindən azad edin:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{4}{5\sqrt{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{a}}$; $\frac{a}{\sqrt{a}}$; $\frac{b}{a\sqrt{a}}$;

b) $\frac{2}{\sqrt{3}+2}$; $\frac{2}{2-\sqrt{5}}$; $\frac{4}{5\sqrt{2}-5}$; $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

c) $\frac{1}{\sqrt{12}+\sqrt{27}-5\sqrt{2}}$; d) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{48}+5\sqrt{2}}$.

4. Kəsrin suratini kök işarəsindən azad edin:

a) $\frac{\sqrt{5}}{10\sqrt{3}}$; $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\frac{4\sqrt{2}}{5}$; $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}$; $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$; $\frac{b\sqrt{2}}{a}$;

b) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$; $\frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{\sqrt{5}-1}$; $\frac{5\sqrt{2}+5}{\sqrt{2}-1}$; $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

5. Hansı ifadə rasional ədəddir?

a) $\frac{2}{\sqrt{2}-1} - \frac{4}{\sqrt{8}+2}$; b) $\frac{3}{\sqrt{3}+2} - \frac{3}{2-\sqrt{3}}$;

c) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2 + \sqrt{6}$; d) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 - \sqrt{24}$.

6. Tənliyi həll edin:

a) $\sqrt{(x-2)^2} = 4$; b) $\sqrt{2x^2+18} = -2x$;

c) $\sqrt{5x^2-4} = 2|x|$; d) $\sqrt{x+8} + x^2 = 0$;

e) $\sqrt{3x^2+4} = 2x$; f) $|x| = -\sqrt{x}$.

7. Sadələşdirin:

a) $\frac{a}{1-2a}\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{4}{a} + 4}$, $(a > 0,5)$;

b) $\frac{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^4}+\sqrt{x^6}}{x^3+1}$, $(x < 0)$;

c) $\sqrt{a^3-b^3+a^2b-ab^2}$, $a > b > 0$.

§36. Kvadrat tənliklər

Kvadrat tənliyin tərifi və növləri

Tərif: $a \neq 0$ şərti ilə $ax^2 + bx + c = 0$ şəklində olan tənliyə *kvadrat tənlik* deyilir.

a , b , c ədədləri kvadrat tənliyin əmsallarıdır.

c - sərbəst hədd adlanır.

Kvadrat tənliyin tərifindəki $a \neq 0$ şərti *əsas şərtdir*, çünki $a = 0$ olduqda $bx + c = 0$ xətti tənliyi alınır.

$b \neq 0$, $c \neq 0$, yəni kvadrat tənliyin bütün əmsalları sıfırdan fərqli olduqda, belə tənlik *tam kvadrat* tənlik adlanır. Məsələn, $3x^2 + 7x - 6 = 0$ tam kvadrat tənlikdir.

b və c ədədlərindən biri və ya hər ikisi 0-a bərabər olduqda belə kvadrat tənliyə *natamam kvadrat tənlik* deyilir.

Natamam kvadrat tənliklərin ümumi şəkilləri:

a) $b \neq 0$ və $c = 0$ olduqda $ax^2 + bx = 0$;

b) $b = 0$ və $c \neq 0$ olduqda $ax^2 + c = 0$;

c) $b = 0$ və $c = 0$ olduqda $ax^2 = 0$.

Natamam kvadrat tənliklərin həlli

I. $a \neq 0$, $b \neq 0$, onda $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0$:

1) $x = 0$, 2) $x = -\frac{b}{a}$; Cavab: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$;

Məsələn: a) $2x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(2x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{2} = 1{,}5$;

b) $5x^2 + 2{,}5x = 0 \Rightarrow x(5x + 2{,}5) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = -2{,}5 : 5 = -0{,}5$.

II. $a \neq 0$, $c \neq 0$, onda $ax^2 + c = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$:

a və c əks işarəli ədədlər olduqda $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$,

a və c eyni işarəli ədədlər olduqda $x = \varnothing$.

Məsələn: a) $2x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$,

b) $5x^2 + 5 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \varnothing$ .010

III. $a \neq 0$, onda $ax^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.

Məsələn: a) $2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$,

b) $-4x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.

Çalışma həlli nümunələri

Bir çox kvadrat tənliklərin həlli natamam kvadrat tənliklərin həllinə gətirilir. Məsələn:

a) $(x-2)^2 = 9 \Rightarrow x - 2 = \pm 3 \Rightarrow x = 2 \pm 3$, $\mathbf{x_1 = 5 , x_2 = -1;}$

b) $2(x-3)^2 - 4 = 0 \Rightarrow 2(x-3)^2 = 4 \Rightarrow (x-3)^2 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x-3 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = 3 \pm \sqrt{2}$;

c) $4x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow (2x-1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (2x-1)^2 = 4 \Rightarrow$

$2x-1 = \pm 2 \Rightarrow 2x = 1 \pm 2$, $\mathbf{x_1 = 1{,}5 , x_2 = -0{,}5;}$

c) bəndində tətbiq olunan üsul *ikihədlinin tam kvadratının ayrılması* üsulu ilə kvadrat tənliyin həlli adlanır.

Çalışmalar

1. Sırada neçə natamam kvadrat tənlik var?

$2x^2 + 4 = 0$; $-x^2 + 7x = 0$; $x^2 = 0$;

$4x + 5 = 0$; $-2x^2 + 4x - 5 = 0$;

$4x^2 = 7$; $x^2 = -5x$; $4x^2 = 7x$.

2. Tənliyi həll edin:

a) $(x + 2)^2 - 9 = 0$; b) $(3x - 2)^2 = 16$ **;**

c) $x^2 - 4x - 3 = 0$ **;** d) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$;

e) $x^2 + x + \frac{3}{4} = 0$; f) $x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$;

k) $(3x - 2)^2 + 3x - 2 = 0$ **;** *l*) $x^2 = a^2$.

3. a-nın hansı qiymətində tənlik:

a) kvadrat tənlikdir; b) xətti tənlikdir ?

1) $(a + 3)x^2 - 4x + 5 = 0$;

2) $4x^2 - ax + 5 = 0$;

3) $4ax^2 - x + 5a = 0$;

4) $(2a - 1)x^2 - ax - 3 = \frac{2}{x}$;

5) $(a - 1)x^2 - ax + 5 = x^2$.

4. Tənliyi həll edin:

a) $(x + 2)^2 - (x - 2)^2 = 5$;

b) $(5x - 2)^2 + (5x - 2)^2 = 6$;

c) $x^2 - 4x - (x-1)^2 = 0$;

d) $(x - \frac{1}{2})^2 - (2x - \frac{1}{2})^2 = 0$.

5. k-nın hansı qiymətində $x = 2$ verilmiş tənliyin köküdür ?

a) $(3x - 1)^2 - 5k = 10$;

b) $(k + 2)^3 - (x - 2)^3 = -27$;

c) $(k + 1)^3 + (0{,}5kx - 1)^3 = 2k^3$.

6. Hansı ədəd böyükdür ?

a) $\sqrt{12} + \sqrt{15}$ və ya $\sqrt{13} + \sqrt{14}$;

b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ və ya 0,6 ; c) $3{,}1 - \sqrt{2}$ və ya $\sqrt{3}$;

d) $\sqrt{12} - \sqrt{11}$ və ya $\sqrt{11} - \sqrt{10}$.

d) $(x-2)^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x - 2 + 1) = 0$,

$(x-2)(x - 1) = 0$, $\mathbf{x_1 = 2 , x_2 = 1;}$

e) $5(x + 1)^2 - 2(x + 1) = 0 \Rightarrow (x + 1)(5x + 5 - 2) = 0$, $(x + 1)(5x + 3) = 0$,

$\mathbf{x_1 = -1 , x_2 = -0{,}6 ;}$

f) $9x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow (3x-1)^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$;

k) $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow (x + \frac{1}{2})^2 = 0$, $x = -\frac{1}{2}$.

§37. Kvadrat tənliyin həlli

Tam kvadrat tənliyin ən əlverişli həll üsullarından biri *diskrimnantın* köməyi ilə həllidir.

Bəs diskrimnant nədir?

$ax^2 + bx + c = 0$ şəklində olan kvadrat tənliyin diskrimnantı $\mathbf{D = b^2 - 4ac}$ düsturu ilə təyin olunur.

Məsələn:

a) $x^2 - x + 4 = 0$ tənliyində $a = 1, b = -1, c = 4$ olduğu üçün $D = (-1)^2 - 16 = 1 - 16 = -15$;

b) $3x^2 + 5x - 1 = 0$ tənliyində $a = 3, b = 5, c = -1$ olduğu üçün $D = 25 + 4\cdot3\cdot1 = 25 + 12 = 37$;

c) $-2x^2 - 3x + 5 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 5 = 0$ tənliyində $a = 2$, $b = 3$, $c = -5$ olduğu üçün $D = 9 + 40 = 49$.

Kvadrat tənliyin köklər düsturu

$ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat tənliyini həll etmək üçün əvvəlcə onun diskrimnantı hesablanır. Əgər $\mathbf{D < 0}$ olarsa , onda bu tənliyin kökü yoxdur , əgər $\mathbf{D \geq 0}$ olarsa , onda

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \; x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Aydındır ki, $D = 0$ olduqda $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

Beləliklə**:**

a) $D < 0$ olduqda kvadrat tənliyin kökü yoxdur ($x = \varnothing$) ;

b) $D = 0$ olduqda kvadrat tənliyin kökləri bərabərdir və yaxud onun bir kökü var**:** $x = -\frac{b}{2a}$;

c) $D > 0$ olduqda kvadrat tənliyin iki müxtəlif kökü var**:**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Kvadrat tənliyin köklər düsturunun çıxarılışı

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} =$$

$$= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{D}{4a^2}.$$

Beləliklə**:** $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}$.

a) $D < 0$ olduqda $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 < 0$ olduğu üçün kvadrat tənliyin kökü yoxdur ($x = \varnothing$) ;

b) $D = 0$ olduqda $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = 0$, $x = -\frac{b}{2a}$, yəni kvadrat tənliyin kökləri bərabərdir ;

c) $D > 0$ olduqda $x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{D}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Qeyd. Tənliyi kəsrdən azad etmək üçün onun hər bir həddi ortaq məxrəcə vurulur. Məsələn:

a) $\frac{1}{2}x^2 - 3x - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - 18 = 0$ **;**

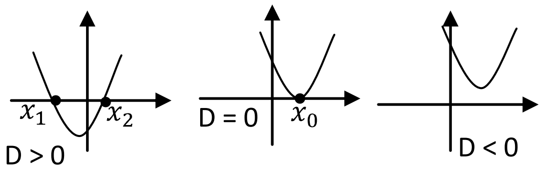
b) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x - 2 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 12 = 0.$

Müxtəlif tam kvadrat tənliklərin diskrimnantları:

1) $ax^2 + bx + c = 0$, $D = b^2 - 4ac$;
2) $ax^2 - bx + c = 0$, $D = b^2 - 4ac$;
3) $ax^2 - bx - c = 0$, $D = b^2 + 4ac$;
4) $ax^2 + bx - c = 0$, $D = b^2 + 4ac$;
5) $-ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 - bx - c = 0$, $D = b^2 + 4ac$;
6) $-ax^2 + bx - c = 0 \Rightarrow D = b^2 - 4ac$.

Köklərin həndəsi mənası

$y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) *kvadrat üçhədlisinin* qrafiki paraboladır. Bu parabola absis oxunu $ax^2 + bx + c = 0$ tənliyinin köklərinə uyğun nöqtələrdə ($a > 0$) kəsir:



Çalışmalar

1. Neçə tənliyin kökü yoxdur?
$x^2 - 3x - 9 = 0$; $3x^2 + 6x + 2 = 0$;
$x^2 - x + 0{,}25 = 0$; $x^2 - x - \frac{1}{4} = 0$;
$x^2 + x + 1 = 0$; $x^2 - x + 1 = 0$;
$x^2 - 2a^2x + a^4 = 0$.

2. Neçə tənliyin bir kökü var?
$3x^2 + x + 2 = 0$; $-x^2 - 5x + 3 = 0$;
$x^2 - x - 1 = 0$; $-ax^2 + 2x - \frac{1}{a} = 0, (a \neq 0)$;
$-2x^2 + x + 4 = 0$; $ax^2 - x - a = 0, (a \neq 0)$.

3. Neçə tənliyin iki müxtəlif kökü var?
$x^2 + x - 2 = 0$; $2x^2 - 3x + 1 = 0$;
$3x^2 - x - 1 = 0$; $-ax^2 + 2x + a = 0$;
$-5x^2 + x + 1 = 0$; $x^2 - x - a^2 = 0$.

4. Tənliyi həll edin:
a) $x^2 - x - 2 = 0$; b) $5x^2 + 4x = 1$;
c) $2x^2 - 4x = x + 7$; d) $x^2 - 2x = 3x - 5$;
e) $3x^2 - 15x - 1 = x^2 + x - 2$;
f) $(x + 2)^2 - (x - 2)^2 = 3x^2$;
k) $(x + 1)^2 + (x - 1)^2 = 2x^3$.

5. a-nın hansı qiymətində tənliyin bir kökü var?
a) $ax^2 + 2x + a = 0$; b) $x^2 + ax + a = 0$;
c) $ax^2 + ax + 1 = 0$; d) $ax^2 - 1 = x^2$;
e) $ax - 1 = a^2x^2$; f) $x - a^2 = x^2$.

6. Funksiyanın qrafikini koordinat sistemində sxematik təsvir edin:
a) $y = x^2 - x - 2$; b) $y = 3x^2 + x + 2$;
c) $y = x^2 - x + 0{,}25$; d) $y = -x^2 + x - 1$.

§38. Çalışmalar

1. İki ardıcıl cüt ədədin fərqinin kubu ilə digər iki ardıcıl tək ədədin fərqinin kvadratı cəmini tapın.

2. İki ardıcıl tam ədədin hasili 12 , fərqinin modulu 1-dir.Bu ədədləri tapın.

3. Üç ardıcıl cüt ədədin hasilinin onların cəminə nisbəti 20-dir. Bu ədədləri tapın.

4. Üç ardıcıl tək ədədin hasilinin onların cəminə nisbəti 15-dir. Bu ədədləri tapın.

5. Qatar 80 km-lik yolda sürətini 20 $\frac{km}{saat}$ artırmaqla yarım saatlıq gecikməni nəinki aradan qaldırdı hətta mənzil başına nəzərdə tutulan vaxtdan 10 dəqiqə tez çatdı. Qatarın əvvəlki sürətini tapın.

6. Yolda 20 dəqiqə gecikən qatar 70 km-lik yolda sürətini 20 $\frac{km}{saat}$ artırmaqla son stansiyaya vaxtdan 4 dəqiqə gec çatdı. Qatarın əvvəlki sürətini tapın.

7. Buraxılış zamanı hərə öz şəklini digər şagirdlərə hədiyyə etməklə cəmi 552 şəkil paylanmışdırsa sinifdə neçə şagird var idi?

8. Böyük qardaş ortancıl qardaşdan 3 yaş böyük, ortancıl qardaş kiçik qardaşdan 3 dəfə böyükdür. Onların yaşları hasili ortancıl qardaşın yaşından 36 dəfə böyükdür. Qardaşların yaşları cəmini tapın.

9. Sahəsi 72 m^2 olan düzbucaqlı qazona 36 m uzunluğunda çəpər çəkilmişdir. Qazonun eni neçə metrdir?

10. Onluqlar rəqəminin sayı təkliklər rəqəminin sayından 2 vahid böyük olan ədədin öz rəqəmləri cəminə hasili 900-dür. Bu ədədi tapın.

11. İki ildə şəhər əhalisinin sayı 20000-dən 22050-ə qədər artmışdır. Əhalinin orta illik faiz artımını tapın.

12. Bir fəhlə 60 detalı ikinci fəhlədən 3 saat tez hazırlayır. Bu fəhlələr 30 detalı 1 saata hazırlayır. İkinci fəhlə 90 detalı neçə saata hazırlayar?

13. Birmərhələli şahmat yarışında 276 oyun oynanılmışdırsa, yarışda neçə nəfər iştirak etmişdir?

14. İndi ikimizin yaşları cəmi 50-dir. Mənim indiki yaşım mən sən yaşda olandakı yaşından üç dəfə çoxdur. İndi sənin neçə yaşın var?

15. Tənliyi həll edin:

a) $\frac{x-1}{x+1} - \frac{2}{x} = -2$; b) $\frac{4x}{3-x} - \frac{5x}{3+x} = 6$;

c) $\frac{5}{2-x} + \frac{4}{3-x} = \frac{8}{3}$; d) $\frac{15}{x} + \frac{10}{x+2} = \frac{28}{x+3}$;

e) $(x + \frac{1}{x})^2 + (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 = 8$.

16. a-nın hansı qiymətlərində $\frac{ax^2+2x-3}{x+3} = 0$ tənliyinin yalnız bir kökü var?

17. Qrafiklərin kəsişmə nöqtələrini tapın;

a) $y = 3x^2 - 4x + 1$ və absis oxu;

b) $y = 3x^2 + x + 2$ və $y = x^2 + x + 4$

18. b-nin hansı qiymətlərində $y = x^2 - x$ parabolası $y = b$ düz xəttinə toxunur?

19. k-nın hansı qiymətlərində $y = x^2 - kx$ parabolası $y = 1$ düz xəttinə toxunur?

20. a-nın hansı qiymətlərində $y = ax^2 + x$ parabolası $y = -1$ düz xəttini iki müxtəlif nöqtədə kəsir?

21. k-nın hansı qiymətlərində $y = x^2 - kx-1$ parabolası $y = -2$ düz xəttini kəsmir?

22. k-nın hansı qiymətlərində $y = x^2 + kx$ parabolası $y = -1$ düz xəttini iki müxtəlif nöqtədə kəsir?

23. b-nin hansı qiymətlərində $y = x^2 + bx$ və $y = 2x^2 - x +1$ parabolaları iki müxtəlif nöqtədə kəsişir?

24. n-in hansı qiymətində

$(n + 2x^2 - x - 1)(|x-3| + n) = 0$

tənliyinin yalnız üç kökü var?

25. n-in hansı qiymətində

$x^2 - (n + 1)x + n - 2 = 0$

tənliyinin köklərinin kvadratları cəmi ən kiçik olar?

26. n-in hansı natural qiymətində

$x^2 - 2x - n - 2 = 0$

tənliyinin köklərinin kvadratları cəmi ən böyük olar?

27. $y = ax^2 + bx + c$ parabolasının təpə nöqtəsinin absisi ilə $ax^2 + bx + c = 0$ tənliyinin kökləri arasındakı əlaqəni müəyyən edin.

28. $y = x^2 + 3x + 2$ parabolasının təpə nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

29. M(1;2) $y = x^2 + bx + c$ parabolasının təpə nöqtəsidir. b və c parametrlərini tapın.

30. $y = x^2 - 4x + 3$ parabolasının təpə nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

31. M(-2;3) $y = x^2 + bx + c$ parabolasının təpə nöqtəsidir. b və c parametrlərini tapın.

32. $y = ax^2 + bx + c$ parabolası M(1;3) nöqtəsindən keçir. a + b + c cəmini tapın.

33. $x^2 - 3x + c$ ifadəsi hasil şəklində göstərildikdə vuruqlardan biri (x+1)-dirsə, c-ni tapın.

34. $y = x^2 - 3x + 5$ funksiyasının qrafiki üzərində ordinatı absisindən üç dəfə böyük olan nöqtəni tapın.

§39. Viyet teoremi

Çevrilmiş kvadrat tənlik

Tərif: $x^2 + px + q = 0$ şəklində olan tənliyə çevrilmiş kvadrat tənlik deyilir.

Məsələn, $x^2 + 3x + 1 = 0$; $x^2 - 2x + 3 = 0$; $x^2 - x - 1 = 0$ çevrilmiş kvadrat tənliklərdir. Lakin $2x^2 + 3x + 1 = 0$; $- x^2 - 3x + 2 = 0$; $4x^2 - 2x - 1 = 0$ tənlikləri çevrilmiş kvadrat tənliklər deyildir.

Qeyd edək ki, hər bir kvadrat tənliyi *çevrilmiş kvadrat* tənliyə gətirmək mümkündür. Bunun üçün tənliyin hər bir həddini x^2-nın əmsalına bölmək lazımdır:

$2x^2 + 3x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$;

$- x^2 - 3x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + 3x - 2 = 0$;

$4x^2 - 2x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0.$

Beləliklə: $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ şəklində olan tənliyi çevrilmiş kvadrat tənlik şəklində yazmaq olar:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0, \quad \left(p = \frac{b}{a},\ q = \frac{c}{a}\right).$$

Viyet teoremi

Tutaq ki, $\mathbf{x^2 + px + q = 0}$ çevrilmiş kvadrat tənliyinin kökləri var, yəni $D = p^2 - 4q \geq 0$, bu kökləri x_1 və x_2 ilə işarə edək. Onda *Viyet teoremi* belə ifadə olunur:

Teorem. Çevrilmiş kvadrat tənliyin *köklər cəmi* əks işarə ilə götürülmüş ikinci əmsala, *hasili* isə sərbəst həddə bərabərdir:

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q.}$$

İsbatı. $x^2 + px + q = 0$ $(D = p^2 - 4q \geq 0)$ tənliyinin köklər düsturunu yazaq:

$$x_1 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2}, \quad x_2 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2}.$$

Buradan alırıq ki, $x_1 + x_2 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2} + \frac{-p+\sqrt{D}}{2} = -p$;

$$x_1 x_2 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p+\sqrt{D}}{2} = \frac{(-p)^2 - (\sqrt{D})^2}{4} = \frac{p^2 - D}{4} = \frac{p^2 - p^2 + 4q}{4} = q.$$

Beləliklə: $\boldsymbol{x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q.}$

Məsələn, $x^2 - 5x + 2 = 0$, $(D = 25 - 8 \geq 0)$ tənliyində

$$x_1 + x_2 = 5, \quad x_1 x_2 = 2.$$

Qeyd. $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ şəklində olan tənlik üçün Viyet teoremi belə ifadə olunur:

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.}$$

Məsələn, $3x^2 + 4x - 7 = 0$ $(D > 0)$ tənliyi üçün

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -\frac{4}{3}, \quad x_1 x_2 = -\frac{7}{3}.}$$

Çalışma həlli nümunələri

$x^2 + px + q = 0$ tənliyinin kökləri x_1 və x_2 olduqda:
a) $x_1^2 + x_2^2$; b) $x_1^3 + x_2^3$; c) $x_1^4 + x_2^4$; d) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ ifadələrini p və q ilə ifadə edin.

Həlli. a) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-p)^2 - 2q = \mathbf{p^2 - 2q}$;

b) $x_1 + x_2 = -p$ bərabərliyinin hər tərəfini kuba yüksəldək:

$(x_1 + x_2)^3 = -p^3 \Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2) = -p^3 \Rightarrow x_1^3 + x_2^3 = \mathbf{3qp - p^3}$;

c) $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (p^2 - 2q)^2 - 2q^2 = \mathbf{p^4 - 4p^2q + 2q^2}$.

d) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = -\boldsymbol{\frac{p}{q}}$.

Çalışmalar

1. $x^2 - 3x - 2 = 0$ tənliyinin kökləri x_1 və x_2 olduqda:
a) $x_1^2 + x_2^2$; b) $x_1^3 + x_2^3$; c) $x_1^4 + x_2^4$; d) $x_1^2 - x_2^2$, $(x_1 \geq x_2)$; e) $x_1x_2^2 + x_1^2x_2$ ifadələrinin qiymətlərini tapın.

2. $x^2 - kx + 1 = 0$ tənliyinin köklərindən biri 2-dir. Digər kökü tapın.

3. $kx^2 - x + 1 = 0$ tənliyinin köklərindən biri (-2)-dir. Digər kökü və k-nı tapın.

4. $x^2 - 2x + k = 0$ tənliyinin köklər fərqi 5-dir. k-nı tapın.

5. $2x^2 + kx + 3 = 0$ tənliyinin köklərindən biri digərindən 2 dəfə kiçikdir. k-nı tapın.

6. $x^2 - x + k = 0$ tənliyinin kökləri $2x_1 - 3x_2 = 1$ şərtini ödəyir. k-nı tapın.

7. $- x^2 - mx + 2 = 0$ tənliyinin kökləri x_1 və x_2 olduqda: a) $x_1^2 + x_2^2$; b) $x_1^4 + x_2^4$ ifadəsinin ən kiçik qiymətini tapın.

8. Tənliyin köklər cəmini 0-a çevirən k-ların qiymətləri hasilini tapın:

$x^2 - (2k^2 - 3k - 5)x + k^2 + 1 = 0.$

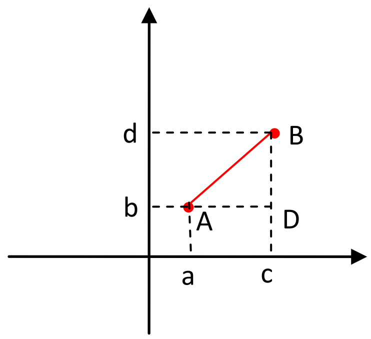
9. $x^2 - 7x - 13 = 0$ tənliyinin x_1, x_2 kökləri üçün $x_1^2 - x_2^2$ $(x_1 \geq x_2)$ ifadəsinin qiymətini tapın.

§40. İki nöqtə arasındakı məsafə. Çevrənin tənliyi

Düzbucaqlı koordinat sistemində A(a;b) və B(c;d) nöqtələri arasındakı məsafəni tapmaq üçün əsasən Pifaqor teoremindən istifadə olunur:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = (c - a)^2 + (d - b)^2,$$

$$\mathbf{AB = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}.}$$



Məsələn: a) A(3;5) və B(4;-2) nöqtələri arasındakı məsafə $AB = \sqrt{(3-4)^2 + (5+2)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

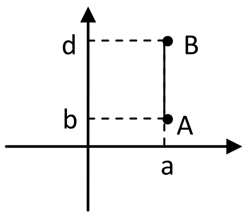
b) A(-3;5) və B(- 4;2) nöqtələri arasındakı məsafə $AB = \sqrt{(-3+4)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{10}$.

Xüsusi halda:

a) A(a;b) və B(a;d) nöqtələri üçün $AB = |b - d|$;

Məsələn, A(3;8) və B(3;13) nöqtələri üçün

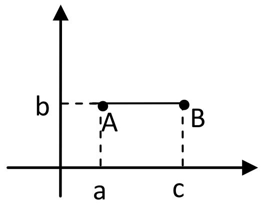
$AB = |8 - 13| = 5$;



b) A(a;b) və B(c;b) nöqtələri üçün $AB = |a - c|$.

Məsələn, A(-7;8) və B(-3;8) nöqtələri üçün

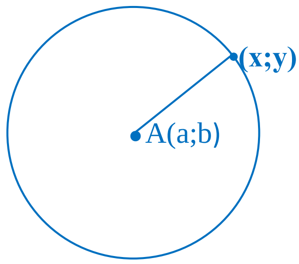
$AB = |-7 + 3| = 4$.



Çevrənin tənliyi. Tərifə əsasən *çevrə mərkəz adlanan nöqtədən bərabər məsafədə olan nöqtələr çoxluğudur.* Ona görə də mərkəzi A(a;b) nöqtəsində radiusu R olan çevrənin tənliyi

$$\mathbf{(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2} \qquad \mathbf{(*)}$$

şəklindədir.



Məsələn, mərkəzi (3;-5) nöqtəsində , radiusu 7-yə bərabər olan çevrənin tənliyi belədir: $\mathbf{(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 49}$ **.**

Çevrənin tənliyi $\mathbf{x^2 + y^2 + mx + ny + k = 0}$ şəklində də verilə bilər. Bu halda çevrənin mərkəzinin koordinatlarını və radiusunu tapmaq üçün bu tənliyi **(*)** şəklində yazmaq lazımdır.

Misal 1. a-nın hansı qiymətində $(x - 1)^2 + (y -3)^2 = 8$ çevrəsi (3 ; a) nöqtəsindən keçir?

Həlli. Çevrə (3; a) nöqtəsindən keçdiyi üçün x = 3, y = a qiymətləri tənliyi ödəməlidir: $(3 - 1)^2 + (a -3)^2 = 8 \Rightarrow$ $\Rightarrow (a -3)^2 = 4 \Rightarrow a - 3 = \pm 2 \Rightarrow a = 3 \pm 2$, **a = 5 və ya a = 1.**

Misal 2. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ tənliyi ilə verilmiş çevrənin mərkəzini və radiusunu tapmaq üçün bu tənliyi $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ şəklində yazırıq. Buradan aydındır ki, çevrənin **mərkəzi** (-1;2) nöqtəsində , **radiusu isə 2**-dir.

Çalışmalar

1. A(-3;6) və B(7;3) nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.

2. a-nın hansı qiymətində A(a;1) və B(4;5) nöqtələri arasındakı məsafə 5-ə bərabərdir?

3. a-nın hansı qiymətlərində A(-1;1) və B(-2;2a) nöqtələri arasındakı məsafə 3a-ya bərabərdir?

4. Mərkəzi (-6;- 9) nöqtəsində , radiusu 2-yə bərabər olan çevrənin tənliyini yazın.

5. Mərkəzi (3;3) nöqtəsində , radiusu $\sqrt{13}$-ə bərabər olan çevrənin tənliyini yazın.

6. Mərkəzi (-2;1) nöqtəsində olub koordinat başlanğıcından keçən çevrənin radiusunu tapın.

7. Mərkəzi (2;5) nöqtəsində , radiusu 1-ə bərabər olan çevrənin koordinat başlanğıcından məsafəsini tapın.

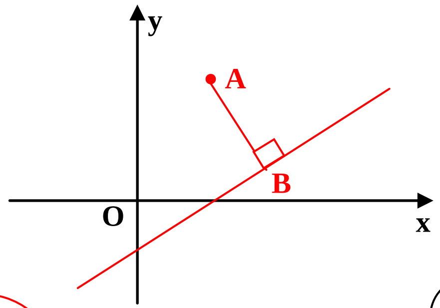
8. Radiusu 5-ə bərabər olan çevrə koordinat oxlarına toxunur. Çevrənin koordinat başlanğıcından məsafəsini tapın.

9. Koordinat oxlarına və y = 3 - 0,75x düz xəttinə toxunan çevrənin tənliyini yazın.

10. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ çevrəsi ilə y = 3x + 1 düz xəttinin kəsişmə nöqtəsini tapın.

§41. Nöqtədən fiqura qədər məsafə

Nöqtədən düz xəttə qədər məsafə



Nöqtədən düz xəttə qədər olan məsafəni misal üzrə şərh edək.

Misal . A(2;3) nöqtəsindən $y = 2x - 1$ düz xəttinə qədər olan məsafəni tapın.

Həlli. Düz xətlərin perpendikulyarlıq şərtinə görə $y = 2x - 1$ düz xəttinə perpendikulyar olan düz xətt $y = -\frac{1}{2}x + b$ şəklindədir və bu düz xətt A(2;3) nöqtəsindən keçdiyi üçün $3 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + b \Rightarrow b = 4$.

B(x_o; y_o) nöqtəsinin koordinatlarını tapaq:

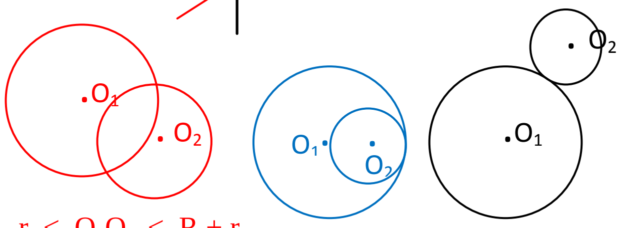
$2x - 1 = -\frac{1}{2}x + 4 \;\Rightarrow\; 4x - 2 = -x + 8$, $x_o = 2$.

$y_o = 2 \cdot x_o - 1 = 3 \;\Rightarrow\;$ B(2 ; 3) .

Beləliklə:

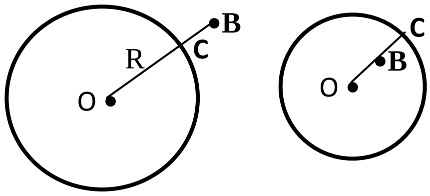
$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (9-3)^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} =$

$= \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. **Cavab:** $3\sqrt{5}$.



R - r < O_1O_2 < R + r R - r = O_1O_2 R + r = O_1O_2

Nöqtədən çevrəyə qədər məsafə

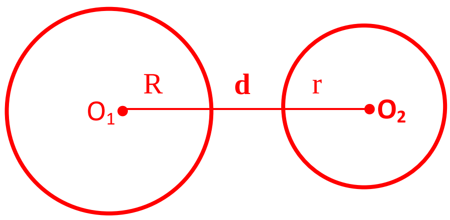


Şəkildəki BC parçasının uzunluğu B nöqtəsindən çevrəyə qədər məsafədir. Buradan aydındır ki,

$BC = |OB - R|$.

Məsələn, B(2;4) nöqtəsindən mərkəzi A(-1;-3) nöqtəsində və radiusu 5-ə bərabər olan çevrəyə qədər məsafəni tapaq. Axtarılan məsafəni x ilə işarə etsək, onda $x = |AB - 5| =$

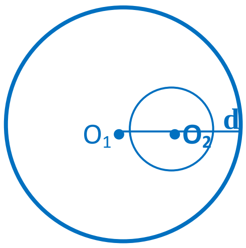
$\left|\sqrt{(2+1)^2 + (4+3)^2} - 5\right| = \sqrt{58} - 5$.



O_1O_2 > R + r

İki çevrə arasındakı məsafə

R radiuslu , O_1 mərkəzli və r radiuslu , O_2 mərkəzli ($R \geq r$) iki çevrənin qarşılıqlı vəziyyəti şəkillərdə təsvir edilmişdir. Hər bir şəkilin altında ***çevrələrin kəsişməsi, daxildən və ya xaricdən toxunmaları, çevrələrdən birinin digərinin xaricində və ya daxilində yerləşməsi*** şərtləri verilmişdir.



O_1O_2 < R - r

İki çevrə arasındakı məsafəni d ilə işarə etsək ,onda çevrələrdən biri digərinin xaricində olduqda $d = O_1O_2 - (R + r)$;

çevrələrdən biri digərinin daxilinə olduqda $d = R - r - O_1O_2$.

Çalışmalar

1. a) A(1;0) nöqtəsindən $y = 2x$ düz xəttinə qədər olan məsafəni tapın.

b) A(-2;5) nöqtəsindən $y = x - 1$ düz xəttinə qədər olan məsafəni tapın.

c) A(2;3) nöqtəsindən $y = -x + 1$ düz xəttinə qədər olan məsafəni tapın.

2. a) $y = 3x - 1$ və $y = 3x + 4$ düz xətləri arasındakı məsafəni tapın.

b) $y = -x + 1$ və $y = -x + 2$ düz xətləri arasındakı məsafəni tapın

3. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ çevrəsinin koordinat başlanğıcından məsafəsini tapın.

4. A(2;5) nöqtəsindən $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$ çevrəsinə qədər olan məsafəni tapın.

5. A(-2;1) nöqtəsindən $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$ çevrəsinə qədər olan məsafəni tapın.

6. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$ və $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 3$ çevrələri arasındakı məsafəni tapın.

7. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$ və $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 3$ çevrələri arasındakı məsafəni tapın.

8. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$ və $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ çevrələri arasındakı məsafəni tapın.

9. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ və $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ çevrələri arasındakı məsafəni tapın.

10. $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 8$ və $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$ çevrələri arasındakı məsafəni tapın.

§42. Kub kökalma

Kub kökün tərifi

Tili 3 sm olan kubun həcmi $3\cdot3\cdot3 = = 27$ sm^3 .

Bəs, həcmi 125 sm^3 olan kubun tili neçə santimetrdir?

Həcmi 125 sm^3 olan kubun tili 5 sm-dir, çünki 5-in kubu 125-ə bərabərdir. Onda deyirlər ki, " 125 ədədi 5-in kubu , 5 isə 125-in kub köküdür", yəni kub kökalma əməli kuba yüksəltmə əməlinin tərsidir, başqa sözlə kubun həcmi verildikdə tilinin tapılması əməli kub kökalmadır.

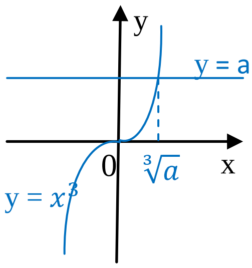
Beləliklə:

$\sqrt[3]{0} = 0$, çünki $0^3 = 0$; $\sqrt[3]{1} = 1$, çünki $1^3 = 1$; $\sqrt[3]{8} = 2$, çünki $2^3 = 8$; $\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt[3]{64} = 4$; $\sqrt[3]{125} = 5$; $\sqrt[3]{0{,}027} = 0{,}3$ və s.

Onu da qeyd edək ki, kvadrat kökdən fərqli olaraq mənfi ədədin kub kökü var. Məsələn, $\sqrt[3]{-1} = -1$, çünki $(-1)^3 = -1$; $\sqrt[3]{-8} = -2$, çünki $(-2)^3 = -8$.

Tərif: Kubu a-ya bərabər olan ədədə *a-nın kub kökü* deyilir və $\sqrt[3]{a}$ kimi işarə olunur:

$$b^3 = a \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{a} ;$$



İxtiyari *a* ədədinin yalnız bir kub kökünün olması $y = x^3$ və $y = a$ funksiyaları qrafiklərinin yalnız bir nöqtədə kəsişməsindən alınır, yəni $a \in R$ olduqda, $x^3 = a$ tənliyinin bir kökü var:

$$x = \sqrt[3]{a}.$$

Məsələn, $x^3 = 0$; $x^3 = 1$; $x^3 = 8$; $x^3 = -8$ tənliklərinin kökləri sağ tərəfdəki ədədlərin kub kökləri ilə təyin olunduğu üçün bu tənliklərin kökləri uyğun olaraq belədir:

$x = 0$; $x = 1$; $x = 2$; $x = -2$.

Kub kökün xassələri

Kub kökün kubu kökaltı ifadəyə bərabərdir:

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a , \ (a \in R).$$

Məsələn, $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$; $(\sqrt[3]{3})^3 = 3$; $(\sqrt[3]{-8})^3 = -8$.

Kub kökün bu xassəsinə əsasən kəsrin məxrəcini irrasionallıqdan azad edə bilərik:

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$; b) $\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}} = \frac{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{(1+\sqrt[3]{2})(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})} = \frac{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{1+(\sqrt[3]{2})^3} = \frac{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{3}$; c) $\frac{2}{3-\sqrt[3]{2}} = \frac{2(9+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})}{(3-\sqrt[3]{2})(9+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})} = \frac{2(9+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})}{3^3-(\sqrt[3]{2})^3} = \frac{2(9+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})}{25}$.

İxtiyari $a \in R$ üçün

$$\sqrt[3]{a^3} = (\sqrt[3]{a})^3 = a ,$$

Məsələn, $\sqrt[3]{-1} = -1$; $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$; $\sqrt[3]{(3-\pi)^3} = 3-\pi$.

Hasilin kökü köklər hasilinə bərabərdir:

$$\sqrt[3]{a\cdot b} = \sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b} , (a, b \in R)$$

Məsələn, $\sqrt[3]{8\cdot27} = \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{27} = 6$; $\sqrt[3]{27\cdot64} = \sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{64} = 3\cdot4 = 12$.

Nəticə. $\sqrt[3]{a^m} = (\sqrt[3]{a})^m$, $a \in R$,

yəni kub kökaltı ifadənin dərəcəsini kök işarəsi xaricinə çıxarmaq olar.

Kəsrin kökü surətlə məxrəcin kökləri nisbətinə bərabərdir:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} , (a \in R , b \neq 0)$$

Məsələn, $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4}$; $\sqrt[3]{15\frac{5}{8}} = \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2} = 2{,}5$.

Vuruğun kök işarəsi altına salınması və çıxarılması:

$$\sqrt[3]{a^3\cdot b} = a\sqrt[3]{b}, \ (a , b \in R)$$

Bu düsturda soldan sağa keçid vuruğun kök xaricinə çıxarılması, sağdan sola keçid isə vuruğun kök işarəsi altına daxil edilməsidir.

$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8\cdot2} = 2\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27\cdot2} = 3\sqrt[3]{2}$.

Beləliklə:

1. $\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow a = b^3$, $(a , b \in R)$;
2. $\sqrt[3]{a^3} = a$, $(a \in R)$;
3. $(\sqrt[3]{a})^3 = a$, $(a \in R)$;
4. $\sqrt[3]{a\cdot b} = \sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}$, $(a , b \in R)$;
5. $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, $(a \in R , b \neq 0)$;
6. $\sqrt[3]{a^m} = (\sqrt[3]{a})^m$, $(a \in R)$;
7. $\sqrt[3]{a^3\cdot b} = a\sqrt[3]{b}$, $(a , b \in R)$.

§43. Çalışma həlli

1. Hesablayın:

a) $\sqrt[3]{(-2)^3} + \sqrt{\left(\sqrt{2}-2\right)^2} = -2 + 2 - \sqrt{2} = -\sqrt{2}$;

b) $\sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{64\cdot 2} - \sqrt[3]{8\cdot 2} +$

$+ \sqrt[3]{27\cdot 2} = 4\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2}$;

c) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} - \sqrt[3]{2\frac{10}{27}} + \sqrt[3]{1{,}331} = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + 1{,}1 = 1\frac{1}{2} -$

$-1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{10} = 1\frac{15-10+3}{30} = 1\frac{8}{30} = 1\frac{4}{15}$.

2. Sadələşdirin:

a) $\sqrt[3]{(a-b)^3} + \sqrt{(a-b)^2} + b - a = a - b +$
$+ |a-b| + b - a = |a-b|$;

b) $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\left(1+\sqrt{3}\right)^3} +$

$+ \sqrt[3]{\left(1-\sqrt{3}\right)^3} = 1+\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 2$;

c) $\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4\sqrt[3]{3}}}\right)^3 = \frac{2^3\sqrt{27}}{\sqrt{4^3\cdot 3}} = \frac{2^3\cdot 3\sqrt{3}}{2^3\cdot\sqrt{3}} = 3$.

3. Məxrəci kök işarəsindən azad edin:

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3} = \frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{2} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$;

c) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{2\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)} = \frac{2\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-1} =$

$= \frac{2\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)}{2-1} = 2\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)$.

4. Tənliyi həll edin:

a) $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} = \sqrt[3]{5} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x}\right)^3 = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 - x + 1 + x + 3\sqrt[3]{1-x^2}\cdot\sqrt[3]{5} = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3\sqrt[3]{5-5x^2} = 3 \Rightarrow 5 - 5x^2 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

5. Bərabərsizliyi həll edin:

a) $(2-x)\sqrt[3]{x-2} > 0 \Rightarrow (2-x)^3(x-2) > 0 \Rightarrow$
$-(x-2)^4 > 0 \Rightarrow (x-2)^4 < 0 \Rightarrow$ **$x = \varnothing$;**

b) $(1+x)\sqrt[3]{x+1} < 1 \Rightarrow (1+x)^3(x+1) < 1 \Rightarrow$
$(x+1)^4 < 1 \Rightarrow |x+1| < 1 \Rightarrow -1 < x+1 < 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ **$-2 < x < 0$.**

Çalışmalar

1. Hesablayın:

a) $\sqrt[3]{-3^3} + \sqrt[3]{(-2)^3} - \left(\sqrt[3]{3}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{-2}\right)^3$;

b) $\sqrt[3]{54\cdot 32} + \sqrt{\sqrt[3]{64}} - \sqrt[3]{42\frac{7}{8}}$;

c) $1{,}5\sqrt[3]{512} - \sqrt[3]{256\cdot 250} + \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{64}}}$.

2. Sadələşdirin:

a) $\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\sqrt{5}-2\right)^3}$;

b) $\sqrt[3]{\left(26-15\sqrt{3}\right)^2} - 7 + 4\sqrt{3}$.

3. Məxrəci kök işarəsindən azad edin:

a) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$; b) $\frac{14}{\sqrt[3]{-49}}$; c) $\frac{2}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$.

4. Vuruğu kök işarəsi xaricinə çıxarın:

$\sqrt[3]{16a^3}$; $-2\sqrt[3]{16}$; $\sqrt[3]{375}$; $2\sqrt[3]{32}$; $2\sqrt[3]{24}$.

5. Vuruğu kök işarəsi altına daxil edin:

$-2\sqrt[3]{3}$; $3\sqrt[3]{-2}$; $-a\sqrt[3]{-a}$; $-3a\sqrt[3]{a}$; $3\sqrt[3]{2}$.

6. Ədədləri artma sırası ilə düzün:

a) $0{,}2$; $\sqrt{0{,}2}$; $\sqrt[3]{0{,}2}$; b) $1{,}2$; $\sqrt{1{,}2}$; $\sqrt[3]{1{,}2}$.

7. İfadənin təyin oblastını tapın:

a) $\sqrt[3]{\frac{x-1}{|x|-1}}$; b) $\sqrt{\frac{x-1}{|x|+1}}$; c) $\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}$.

8. Tənliyi həll edin:

a) $\sqrt{9+\sqrt[3]{x^2-3x}} = 3$; b) $(x-3)\sqrt{4-x^2} = 0$;

c) $\sqrt[3]{8-\sqrt{x^2-4x}} = 2$; d) $(x-3)\sqrt[3]{4-x^2} = 0$;

e) $\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1$;

f) $\sqrt[3]{54-\sqrt{x}} + \sqrt[3]{54+\sqrt{x}} = \sqrt[3]{18}$;

k) $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1+\sqrt{x}} = 2$.

9. Bərabərsizliyi həll edin:

a) $(x-3)\sqrt[3]{3-x} < 0$; b) $(x-4)\sqrt{4-x} < 0$;

c) $5 - \sqrt[3]{x-2} < 7$; d) $5 + \sqrt[3]{\sqrt{x}-2} < 7$.

10. $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 3$ olduğunu bilərək: a) $x + \frac{1}{x}$;

b) $x^2 + \frac{1}{x^2}$; c) $x - \frac{1}{x}$ ifadəsinin qiymətini hesablayın.

§44. Ədədi bərabərsizliklər

Məntiqi düşünmə qabiliyyətimizi sürətlə inkişaf etdirən ən yaxşı və çox tətbiq olunan bölmələrdən biri də bərabərsizliklər bölməsidir. Ona görə ki, bu bölmədə bizi diqqətli olmağa sövq edən incə məqamlar çoxdur. Tətbiq sahəsi isə çox genişdir. Gələcəkdə onlarla daha ətraflı tanış olacağıq.

Bilirik ki, ədəd, dəyişən, ifadə və kəmiyyətlərin bir-biri ilə və yaxud sıfırla müqayisəsində
“ = “, “ ≠ “, “ > “, “ ≥ “, “ < “, “ ≤ “
işarələrindən istifadə olunur. Bu işarələrlə bağlı münasibətlərin xarakterik xüsusiyyətləri ilə tanış olaq:

Tərif: $a - b$ fərqi müsbət ədəd olduqda deyirlər ki, a böyükdür b və belə yazılır: $a > b$ və ya $b < a$;

$a - b$ fərqi mənfi ədəd olduqda deyirlər ki, a kiçikdir b və belə yazılır: $a < b$ və ya $b > a$;

$a - b$ fərqi müsbət ədəd və ya 0-a bərabər olduqda deyirlər ki, a böyükdür və ya bərabərdir b və belə yazılır: $a \geq b$ və ya $b \leq a$;

$a - b$ fərqi mənfi ədəd və ya 0-a bərabər olduqda deyirlər ki, a kiçikdir və ya bərabərdir b və belə yazılır: $a \leq b$ və ya $b \geq a$;

$a - b = 0 \Rightarrow a = b$; $a - b \neq 0 \Rightarrow a \neq b$.

“ > “ və “ < “ bərabərsizlikləri “ ciddi” , “ ≥ “ və “ ≤ “ bərabərsizlikləri isə “ ciddi olmayan” bərabərsizliklər adlanır.

Xüsusi halda: $0 - b > 0 \Leftrightarrow 0 > b$ və ya $b < 0$, yəni (-b) müsbət ədəddirsə,onda b mənfi ədəddir ;

$0 - b < 0 \Leftrightarrow 0 < b$ və ya $b > 0$, yəni (- b) mənfi ədəddirsə, onda b müsbət ədəddir ;

$- b > 0 \Leftrightarrow b < 0$; $- b < 0 \Leftrightarrow b > 0$.

Xatırlatma. $a < b$ və $b < c$ bərabərsizliklərinin eyni zamanda doğru olması $a < b < c$ kimi ikiqat bərabərsizlik şəklində yazılır və belə oxunur: “ b böyükdür a, kiçikdir c “ .

Eyni mühakimə ilə $a \leq b < c$, $a < b \leq c$, $a \leq b \leq c$ ikiqat bərabərsizlikləri mənalandırılır və oxunur.

Məntiqi mühakimələrdə ən çox işlənən bağlayıcılar “ və” , “ və ya” bağlayıcılarıdır. Bir daha xatırlayaq ki, “ və” bağlayıcısı “ münasibətlərdən hər ikisinin eyni zamanda mövcud olması”, “ və ya” bağlayıcısı isə “münasibətlərdən heç olmasa birinin mövcud olması” anlamında işlədilir. Məsələn, doğruluq mülahizəsi ilə yanaşmada “ a > b və c > d “ o deməkdir ki, a > b , c > d bərabərsizlikləri eyni zamanda doğrudur; “ a > b və ya c > d “ o deməkdir ki, a > b , c > d bərabərsizliklərindən heç olmasa biri doğrudur .

Xatırlatma

1. a ədədi müsbətdir : $a > 0$;
2. a ədədi mənfidir : $a < 0$;
3. a ədədi mənfi deyil : $a \geq 0$;
4. a ədədi müsbət deyil : $a \leq 0$;
5. a ədədi sıfırdan fərqlidir : $a \neq 0$;
6. **...** olarsa, onda **...** : $\Rightarrow$;
7. **...** olarsa, onda və əksinə **...** : $\Leftrightarrow$.

Doğru mülahizələr:

1. $a = 0 \Rightarrow a \geq 0$, $a \leq 0$;
2. $a > 0 \Rightarrow a \geq 0$;
3. $a < 0 \Rightarrow a \leq 0$;
4. $a \neq 0 \Leftrightarrow a > 0$ və ya $a < 0$;
5. $a \geq 0 \Leftrightarrow a > 0$ və ya $a = 0$;
6. $a \leq 0 \Leftrightarrow a < 0$ və ya $a = 0$;
7. $0 \geq 0$, $2 \geq 0$, $-2 \leq 0$, $a \geq a$, $a \leq a$.

Yalan mülahizələr:

1. $a \geq 0 \Rightarrow a > 0$;
2. $a \geq 0 \Rightarrow a = 0$;
3. $a \leq 0 \Rightarrow a < 0$;
4. $a \leq 0 \Rightarrow a = 0$;
5. $a \neq 0 \Rightarrow a > 0$;
6. $a \neq 0 \Rightarrow a < 0$;
7. $0 > 0$, $-2 < -2$, $a < a$, $a > a$.

Çalışmalar

1. Verilənlərə əsasən a və b ədədlərini müqayisə edin:
a) $a - b = (-1)^{2009}$; b) $a - b = (-1)^{2010}$;
c) $a - b = -2^{14} + (-2)^{14}$; d) $a - b = 3,14 - \pi$;
e) $a = c^2 + b + 1$; f) $a - b = 1 + b^2$.

2 . $a > 3$ olduqda ifadəni 0-la müqayisə edin:
a) $3a - 9$; b) $15 - 5a$; c) $(a - 1)(8 - a)$;
d) $6a - 24$; e) $(a - 2)^2 (6 - a)$; f) $\frac{a-3}{1-a}$.

3. $a < 4$ olduqda ifadəni 0-la müqayisə edin:
a) $3a - 12$; b) $15 - 30a$; c) $(a - 7)(8 - a)$;
d) $6a - 24$; e) $(a-2)^2 (6 - a)$; f) $\frac{a-5}{(7-a)(a-4)}$?

4. Hansı mülahizələr doğrudur:
a) $a > b \Rightarrow \frac{a}{b} > 1$; b) $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Rightarrow ad > bc$;
c) $\frac{a}{2} > \frac{b}{3} \Rightarrow 3a > 2b$; d) $\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \frac{a-b}{b} > 0$?

5. Hansı mülahizələr yanlışdır:
a) $(a-1)^2 > 0 \Rightarrow a > 1$; b) $(a-1)^2 > 0 \Rightarrow a \neq 1$;
c) $(a-1)^2 > 0 \Rightarrow a < 1$; d) $(a-1)^3 > 0 \Rightarrow a > 1$;
e) $(a-1)^2 < 0 \Rightarrow a < 1$; f) $(a-1)^2 \leq 0 \Rightarrow a = 1$?

§45. Ədədi bərabərsizliklərin xassələri

Bilirik ki:

a) *İki müsbət ədədin cəmi , hasili , nisbəti müsbət ədəddir:* $a > 0$ və $b > 0 \Rightarrow a + b > 0$; $ab > 0$; $\frac{a}{b} > 0$;

b) *İki mənfi ədədin cəmi mənfi ; hasili və nisbəti isə müsbət ədəddir:* $a < 0$ və $b < 0 \Rightarrow a + b < 0$; $ab > 0$; $\frac{a}{b} > 0$;

c) Müxtəlif işarəli ədədlərin hasili və nisbəti *mənfi ədəddir:* $a < 0$ və $b > 0 \Rightarrow ab < 0$; $\frac{a}{b} < 0$;

d) *İki vuruqdan biri sıfırdırsa, onda onların hasili də sıfırdır:* $a = 0$ və ya $b = 0 \Rightarrow ab = 0$.

Ədədlərin işarələrinə görə bu qısa şərh və ədədi bərabərsizliklərin tərifindən istifadə edərək bərabərsizliklərin əsas xassələri və onların isbatları ilə tanış olaq.

Eyni və əks işarəli bərabərsizliklər. $a < b$, $c < d$ (və ya $a > b$, $c > d$) bərabərsizlikləri *eyni işarəli* ; $a < b$, $c > d$ (və ya $a< b$, $c > d$) bərabərsizlikləri isə *əks işarəli* bərabərsizliklər adlanır.

Bərabərsizlik işarəsinin sağ və sol tərəfindəki ədədlər *bərabərsizliyin hədləri* adlanır

Xassə 1. $a > b$, $b > c \Rightarrow a > c$.

İsbatı. $a - c = (a - b) + (b - c) > 0 \Rightarrow a > c$.

Bu xassədən ikiqat bərabərsizlik alınır: $a > b > c$.

Xassə 2. *Bərabərsizliyin hər tərəfinə ixtiyari eyni bir ədəd əlavə etdikdə bərabərsizliyin işarəsi dəyişmir:*

$$a > b \Rightarrow a + c > b + c ,\ (c \in R).$$

İsbatı. $(a + c) - (b + c) = a - b > 0$.

Məsələn, $a + 5 > 2 \Rightarrow a + 5 + (-5) > 2 + (-5) \Rightarrow a > -3$.

Nəticə. *Hər hansı toplanan bərabərsizliyin bir tərəfindən digər tərəfinə əks işarə ilə keçirilir və bu halda bərabərsizliyin işarəsi dəyişmir:* $a + b > c \Rightarrow a > c - b$.

İsbatı. $a + b > c \Rightarrow a > b + (- b) > c +(- b) \Rightarrow a > c - b$.

Məsələn, $a + 4 > 0 \Rightarrow a > 0 - 4 \Rightarrow a > - 4$.

Xassə 3. a) *Bərabərsizliyin hər tərəfini eyni bir müsbət ədədə vurduqda və ya böldükdə bərabərsizliyin işarəsi dəyişmir:* $a > b$, $c > 0 \Rightarrow ac > bc$ və $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

İsbatı. Tutaq ki, $a > b$ və $c > 0$. Onda

$ac - bc = c(a-b) > 0$; $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{ac-bc}{c} > 0$

Məsələn, $\frac{a}{7} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{7}\cdot 7 > \frac{1}{2}\cdot 7 \Rightarrow a > 3,5$.

b) *Bərabərsizliyin hər tərəfini eyni bir mənfi ədədə vurduqda və ya böldükdə bərabərsizliyin işarəsi əksinə dəyişir:* $a > b$, $c < 0 \Rightarrow ac < bc$ və $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Məsələn, $- 3a > 27 \Rightarrow a < - 9$; $-\frac{a}{7} > -\frac{1}{2} \Rightarrow a < 3,5$.

Tərs mülahizələr

1. $ab > 0 \Rightarrow a > 0$ və $b > 0$ və ya $a < 0$ və $b < 0$;

2. $ab < 0 \Rightarrow a > 0$ və $b < 0$ və ya $a < 0$ və $b > 0$;

3. $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ və ya $b = 0$

Məsələn, $a^2 > 0 \Rightarrow a \neq 0$; $3a < 0 \Rightarrow a < 0$; $- 2 a > 0 \Rightarrow a < 0$; $a^2b < 0 \Rightarrow a \neq 0, b < 0$.

Deyilən xassələr digər ciddi və ya ciddi olmayan bərabərsizliklər üçün də doğrudur. Məsələn,

$a \geq 0 , b > 0 \Rightarrow a + b > 0$; $ab \geq 0$; $\frac{a}{b} \geq 0$;

$a > 0 , b \geq 0 \Rightarrow a + b > 0$; $ab \geq 0$;

$a \leq 0 , b \leq 0 \Rightarrow a + b \leq 0$; $ab \geq 0$;

$a \leq b$, $b < c \Rightarrow a \leq b < c$;

$a \geq b \Rightarrow a + c \geq b + c$;

$a \leq b \Rightarrow a - c \leq b - c$;

$c > 0 , a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$;

$c < 0 , a \leq b \Rightarrow ac \geq bc$.

Çalışmalar

1. $a > 0$ və $b < 0$ olduqda hansı ifadə yalnız müsbət qiymətlər alır?

a) $a + b$; b) $a - b$; c) $2b - 3a$; d) $3a - 5b$; e) $\frac{a-b}{2ab}$; f) $\frac{2a-5b}{4a-7b}$; k) $\frac{3ab}{4b-2a}$.

2. $a < 0$ və $b < 0$ olduqda hansı ifadə yalnız mənfi qiymətlər alır?

a) $a + b$; b) $7a - 5b$; c) $-2b - 3a$; d) $2a - 3b$; e) $\frac{a+b}{3ab}$; f) $\frac{2a-5b}{4a-7b}$; k) $\frac{3ab}{3b+9a}$; l) $\frac{2a+3b}{3ab}$.

3. $a \leq 4$ olduqda hansı doğrudur?

a) $a + 1 < 6$; b) $7a - 5 \leq 16$; c) $2 - 3a \leq - 9$; d) $2a - 3 > 5$; e) $2 - 3a \geq -10$; f) $7 - 2a \leq -1$.

4. $a > 5$ olduqda hansı doğrudur?

a) $a + 1 \geq 6$; b) $7a - 5 \geq 23$; c) $4 - 5a \leq 10$; d) $2a + 3 > 5$; e) $2 - 3a \geq 13$; f) $7 - 5a \leq -3$.

5. $a > b > 3$ olduqda hansı yanlışdır?

a) $a + 1 \geq 4$; b) $2a \geq 2b \geq 6$; c) $14 - 5a \leq 15$; d) $3a > 4b > 9$; e) $2a > b > 2$; f) $\frac{a-b}{b-3} < 0$.

6. a-nın hansı qiymətlərində $x < 5$ və $x > a$ bərabərsizliklərini ikiqat bərabərsizlik şəklində göstərmək olar?

§46. Ədədi bərabərsizliklərin xassələri

(davamı)

Xassə 4. Eyni işarəli bərabərsizlikləri tərəf-tərəfə topladıqda onlarla eyni işarəli olan bərabərsizlik alınır**:**

$$a > b \text{ və } c > d \;\Rightarrow\; a + c > b + d .$$

Məsələn, $a > 3$ və $c > -2 \;\Rightarrow\; a + c > 1$;

$2 < a < 4$ və $-3 < c < 5 \;\Rightarrow\; -1 < a + c < 9$.

Xassə 5. Müsbət hədli eyni işarəli bərabərsizlikləri tərəf-tərəfə vurduqda onlarla eyni işarəli olan bərabərsizlik alınır:

$$a > b > 0 \text{ və } c > d > 0 \;\Rightarrow\; ac > bd .$$

İsbatı. $a > b > 0 \;\Rightarrow\; ac > bc$; $c > d > 0 \;\Rightarrow\; bc > bd.$

$ac > bc$ və $bc > bd \;\Rightarrow\; ac > bd$.

Məsələn, $a > 3$ və $c > 2 \;\Rightarrow\; ac > 6$;

$2 < a < 4$ və $3 < c < 5 \;\Rightarrow\; 6 < ac < 20$.

Xassələrdən bir sıra nəticələr alınır:

Nəticə 1. a və b eyni işarəli ədədlər olduqda

$$a > b \;\Rightarrow\; \frac{1}{a} < \frac{1}{b} .$$

İsbatı. $a > b$ bərabərsizliyinin hər tərəfini ab-yə bölək. ab müsbət ədəd olduğu üçün

$$a > b \;\Rightarrow\; \frac{a}{ab} > \frac{b}{ab} \;\Rightarrow\; \frac{1}{b} > \frac{1}{a} \;\Rightarrow\; \frac{1}{a} < \frac{1}{b} .$$

Məsələn, $3 > 2 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$; $-8 < -5 \Rightarrow -\frac{1}{8} > -\frac{1}{5}$;

$\frac{1}{a} > 2$, $a > 0 \;\Rightarrow\; 0 < a < \frac{1}{2}$.

Nəticə 2. $a > 1$ olduqda $\boldsymbol{a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a}}$ **;**

$0 < a < 1$ olduqda $\boldsymbol{a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a}}$ **.**

Məsələn, $64 > 8 > 4$; $\frac{1}{64} < \frac{1}{8} < \frac{1}{4}$.

Nəticə 3. a və b müsbət ədədlər olduqda

$$\boldsymbol{a > b \;\Rightarrow\; \sqrt{a} > \sqrt{b} \;\text{ və }\; \sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}} .$$

İsbatı. $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} > 0$;

$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} > 0$.

Məsələn,

a) $a^2 > 4 \Rightarrow \sqrt{a^2} > 2 \Rightarrow |a| > 2 \Rightarrow a < -2$ və ya $a > 2$ **;**

b) $a^3 > 64 \;\Rightarrow\; \sqrt[3]{a^3} > \sqrt[3]{64} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{a > 4}$;

c) $a^2 \le 16 \;\Rightarrow\; |a| \le 4 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{-4 \le a \le 4}$ **;**

d) $a^3 \le 125 \Rightarrow a \le 5$; e) $(a-2)^2 \le 2 \;\Rightarrow |a-2| \le \sqrt{2}$,

$-\sqrt{2} \le a - 2 \le \sqrt{2} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{2 - \sqrt{2} \le a \le 2 + \sqrt{2}}$ **.**

İkiqat bərabərsizliklər

a)
$$\begin{array}{r} a \ge x \ge b \\ +\; c \ge y \ge d \\ \hline a + c \ge x + y \ge b + d ; \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} a \le x < b \\ +\; -c \le -y \le -d \\ \hline a - c \le x - y < b - d ; \end{array}$$

c) a, b, c, d müsbət ədədlər olduqda:

$$\begin{array}{r} a \le x \le b \\ \times\; c \le y \le d \\ \hline ac \le xy \le bd ; \end{array}$$

$c \ge y \ge d \;\Rightarrow\; \frac{1}{c} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{d}$.

$2 \le a \le 5$, $3 \le b \le 7$ verildikdə $2a + 3b$, $3a - 4b$, $2ab$, $\frac{3a}{b}$ ifadələrini qiymətləndirin.

Həlli. $4 \le 2a \le 10$, $9 \le 3b \le 21 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boldsymbol{13 \le 2a + 3b \le 31}$ **;**

$6 \le 3a \le 15$, $-28 \le -4b \le -12 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boldsymbol{-22 \le 3a - 4b \le 3}$ **;**

$6 \le ab \le 35 \;\Rightarrow \boldsymbol{12 \le 2ab \le 70}$ **;**

$2 \le a \le 5$, $\frac{1}{7} \le \frac{1}{b} \le \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\frac{6}{7} \le \frac{3a}{b} \le 5}$ **.**

Çalışmalar

1. Hansı mülahizə doğrudur:

a) $\frac{1}{a} > 0 \Rightarrow a > 0$; b) $\frac{1}{a} > 3 \Rightarrow a > 0$ və $a < \frac{1}{3}$;

c) $\frac{1}{a} < 0 \Rightarrow a < 0$; d) $\frac{1}{a} < 3 \Rightarrow a < 0$ və $a > \frac{1}{3}$;

e) $\frac{1}{a} < 2 \;\Rightarrow\; a < 0$ və ya $a > \frac{1}{2}$;

f) $(2a+3)^2 > 0 \Rightarrow a \ne -1\frac{1}{2}$.

2. $-4 \le a \le 6$, $-5 \le b \le -3$ verildikdə $4a + 5b$, $3a - 7b$ ifadələrini qiymətləndirin.

3. $2 \le a \le 6$, $3 \le b \le 5$ verildikdə $3ab$, $\frac{5a}{2b}$ ifadələrini qiymətləndirin.

4. $-4 < a \le -2$, $3 \le b \le 8$ verildikdə $a^2 + b^2$, $a^2 - b^2$ ifadələrini qiymətləndirin.

5. $4 < a < 5$, $3 \le b \le 4$ verildikdə $a^3 + b^3$, $a^3 - b^3$ ifadələrini qiymətləndirin.

6. $4 < a < 9$, $8 < b < 27$ verildikdə $\sqrt{a} - \sqrt[3]{b}$ ifadəsini qiymətləndirin.

7. İsbat edin ki, $a , b \in R$ olduqda

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + ac + bc .$$

8. İsbat edin ki, $a , b > 0$ ədədləri üçün

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \ge 2 .$$

§47. Məchullu bərabərsizliklər

Ədədi bərabərsizliklərdə iştirak edən dəyişənin müxtəlif ədədi qiymətlərinə görə bərabərsizliklərin əsas xassələrini öyrəndik.

Bu bölmədə isə həmin xassələrin tətbiqi ilə məchullu bərabərsizliklərin bir qisminin həlli ilə tanış olacağıq.

Bərabərsizlikdə iştirak edən dəyişənin həmin bərabərsizliyi ödəyən qiymətlərinin axtarılması tələb olunduqda belə dəyişən *məchul* adlanır.

Məchulun bərabərsizliyi ödəyən qiymətinə *bərabərsizliyin həlli* deyilir. Həllər çoxluğu bərabərsizliyin bütün həllərini əhatə edir.

Həllər çoxluğu eyni olan (üst-üstə düşən) bərabərsizliklər *eynigüclü* (ekvivalent) bərabərsizliklər adlanır. Həlləri olmayan bərabərsizliklər də eynigüclüdür.

Bərabərsizliyi həll etmək - bərabərsizliyin həllər çoxluğunu tapmaq və yaxud həllin olmamasını isbat etmək deməkdir.

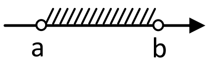
Bərabərsizlikdə məchuldan başqa digər dəyişən də iştirak etdikdə , belə dəyişən *verilən ədəd* və yaxud *parametr* adlanır.

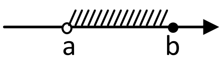
Adətən , məchulları x , y , z , t , u , v hərfləri , parametrləri isə a,b,c ,d, m,n ,k hərfləri ilə işarə edirlər.

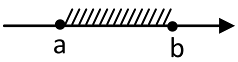
Ədədi aralıqlar və onların həndəsi təsviri

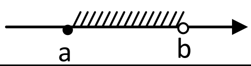
Ədəd oxu üzərində ədədi aralıqlarının təsviri ilə artıq tanışıq. Ədədi aralıqlar və onların həndəsi təsvirlərini daha ətraflı öyrənmək üçün əlavə işarələmələrlə tanış olaq.

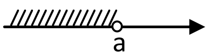
Ədəd oxunun sol uzaqlaşmış hissəsini $-\infty$ (mənfi sonsuzluq), sağ uzaqlaşmış hissəsini $+\infty$ (∞) (müsbət sonsuzluq) ilə işarə etsək , onda aşağıdakı çərçivələrin hər birindəki yazılışlar eyni mənalıdır ($a < b$ verilmiş ədədlər , x dəyişəndir) **:**

$a < x < b$; $x \in (a ; b)$; 

$a < x \le b$; $x \in (a ; b]$; 

$a \le x \le b$; $x \in [a ; b]$; 

$a \le x < b$; $x \in [a ; b)$; 

$x < a$; $-\infty < x < a$; $x \in (-\infty ; a)$; 

Çalışma həlli nümunələri

1. 1; - 2; 3; - 4; 5 ədədlərindən $x^2 - |x| \le 6$ bərabərsizliyini ödəyən ədədlərin cəmini tapın .

Həlli. Yalnız 1 ; -2 ; 3 ədədləri verilmiş bərabərsizliyi ödəyir. *Cavab*: $1 - 2 + 3 = 2$.

2. Eynigüclü bərabərsizlikləri göstərin:

a) $|x-1| \le 0$ və $\sqrt{x-1} \le 0$;

b) $(x - 2)^2 > 0$ və $\frac{1}{x-2} > 0$;

c) $x^2 - x + 1 \le 0$ və $|x-1| < 0$.

Həlli. a) $|x-1| \le 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$;

$\sqrt{x-1} \le 0 \Rightarrow x = 1$.

b) $(x - 2)^2 > 0 \Rightarrow x \ne 2$;

$\frac{1}{x-2} > 0 \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$;

c) $x^2 - x + 1 \le 0 \Rightarrow (x - 0{,}5)^2 + 0{,}75 \le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \varnothing$; $|x-1| < 0 \Rightarrow x = \varnothing$.

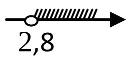
Cavab: a) , c) .

3. Bərabərsizliyi həll edin:

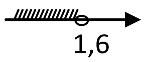
a) $\frac{3x+2}{8} - \frac{x-1}{6} > 1 \Rightarrow 24 \cdot \frac{3x+2}{8} - 24 \cdot \frac{x-1}{6} >$

$> 24 \Rightarrow 3(3x+2) - 4(x-1) > 24 \Rightarrow 9x + 6 -$

$- 4x + 4 > 24 \Rightarrow 5x + 10 > 24 \Rightarrow x > 2{,}8$.

Cavab: $x \in (2{,}8; \infty)$; 

b) $\frac{2\sqrt{2}-3}{5x-8} \ge 0 \Rightarrow 5x - 8 < 0 \Rightarrow x < 1{,}6$.

Cavab: $x \in (-\infty; 1{,}6)$; 

4. Funksiyanın təyin oblastını tapın:

a) $y = \sqrt{4-8x} \Rightarrow 4 - 8x \ge 0 \Rightarrow -8x \ge -4$

$\Rightarrow x \le 0{,}5$; *Cavab*: $D(y) = (-\infty ; 0{,}5]$.

b) $y = \frac{x-2}{\sqrt{x}-1} \Rightarrow x \ge 0 , \sqrt{x} - 1 \ne 0 \Rightarrow$

$x \ge 0$ və $x \ne 1$, $D(y) = [0 ; 1) \cup (1 ; \infty)$.

c) $y = \sqrt[3]{4-12x} \Rightarrow x \in R$, $D(y) = R$.

5. Bərabərsizliyi həll edin:

$7x - a < ax - 2$.

Həlli. $2 - a < ax - 7x \Rightarrow (a-7)x > 2 - a$;

I hal. $a-7 > 0$, $a > 7 \Rightarrow \mathbf{x} > \frac{2-a}{a-7}$ **;**

II hal. $a-7 = 0$, $a = 7 \Rightarrow 0 \cdot x > -5 \Rightarrow \mathbf{x \in R}$**;**

III hal. $a - 7 < 0$, $a < 7 \Rightarrow \mathbf{x} < \frac{2-a}{a-7}$ **.**

6. Natural həllərin cəmini tapın:

$(2x-3)^2 - 4(x-2)^2 \le 23$.

Həlli. $4x^2 - 12x + 9 - 4x^2 + 16x - 16 \le 23 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x \le 30 \Rightarrow x \le 7{,}5$;

Cavab: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$.

§48. Bərabərsizliklər sistemi və külliyyatı

Bu bölmədə xətti bərabərsizliklər sistemi ilə bərabərsizliklər külliyyatını müqayisəli şəkildə nəzərdən keçirəcəyik ki, həll prosesində onlar qarışıq salınmasın.

Bərabərsizliklər sistemini və külliyyatını aydın təsəvvür etmək üçün eyni məchullu iki bərabərsizlik nəzərdən keçirək:

$2x - 3 > 5$; $4x - 5 < 19$.

Qarşıya iki məqsəd qoyula bilər:

1. *Məchulun bərabərsizliklərin hər birini ödəyən qiymətlərini, yəni bərabərsizliklərin həllər çoxluğunun kəsişməsini tapmaq;*

2. *Məchulun bərabərsizliklərdən birini ödəyən qiymətlərini, yəni bərabərsizliklərin həllər çoxluğunun birləşməsini tapmaq.*

Qarşıya 1-ci məqsəd qoyulduqda, deyirlər ki, bərabərsizliklər *sistem* təşkil edir və belə yazılır:

$$\begin{cases} 2x - 3 > 5, \\ 4x - 5 < 19. \end{cases}$$

Qarşıya 2-ci məqsəd qoyulduqda ,deyirlər ki, bərabərsizliklər *külliyyat* təşkil edir və belə yazılır:

$$\left[\begin{array}{l} 2x - 3 > 5, \\ 4x - 5 < 19. \end{array}\right.$$

Aydındır ki, "{" , "⋂" işarələri "və" bağlayıcısı ilə , " [" , "U" işarələri isə " və ya" bağlayıcısı ilə sıx bağlıdır. Məsələn: a) " x-ın $2x - 3 > 5$ və $4x - 5 < 19$ bərabərsizliklərini ödəyən qiymətlərini tapın" çalışmasının həlli

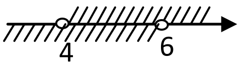
$\begin{cases} 2x - 3 > 5, \\ 4x - 5 < 19. \end{cases}$ bərabərsizliklər sisteminin həllinə;

b) " x-ın $2x - 3 > 5$ və ya $4x - 5 < 19$ bərabərsizliyini ödəyən qiymətlərini tapın" çalışmasının həlli isə

$\left[\begin{array}{l} 2x - 3 > 5, \\ 4x - 5 < 19. \end{array}\right.$ bərabərsizliklər külliyyatının həllinə gətirilir.

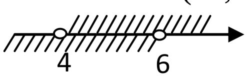
Bərabərsizliklər sistemi və külliyyatının həlli həndəsi sxemlərlə daha aydın təsvir edilir:

$$\begin{cases} 2x - 3 > 5, \\ 4x - 5 < 19. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x > 8, \\ 4x < 24. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 4, \\ x < 6. \end{cases}$$



$(-\infty ; 6) \cap (4 ; \infty) = (4 ; 6)$; **Cavab:** $x \in (4 ; 6)$.

$$\left[\begin{array}{l} 2x - 3 > 5, \\ 4x - 5 < 19. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4, \\ x < 6. \end{array}\right.$$



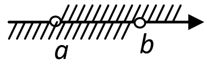
$(-\infty ; 6) \cup (4 ; \infty) = (-\infty ; \infty) = R$; **Cavab:** $x \in R$

Çalışma həlli nümunələri

1. Bərabərsizliklər sistemini həll edin:

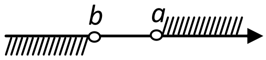
a) $\begin{cases} x > a, \\ x < b, \end{cases}$ $\left(\begin{cases} x \geq a, \\ x \leq b, \end{cases}\right)$

a < *b* olduqda



$x \in (a ; b)$;

a > *b* olduqda

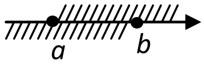


$x = \varnothing$.

Aydındır ki, $a = b \Rightarrow x = \varnothing$.

Eyni mühakimə ilə $\begin{cases} x \geq a, \\ x \leq b, \end{cases}$ sistemi üçün

$a < b \Rightarrow x \in [a ; b]$;

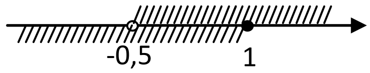


$a > b \Rightarrow x = \varnothing$;

$a = b \Rightarrow x = a$;

b) $\begin{cases} 2x + 3 > 2, \\ 2x + 3 \leq 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x > -1, \\ 2x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x > -0{,}5, \\ x \leq 1 \end{cases}$



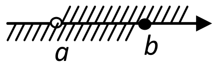
Cavab: $x \in (-0{,}5 ; 1]$.

c) $\begin{cases} 4x - 1 < 1, \\ 3x + 2 > 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x < 2, \\ 3x > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0{,}5, \\ x > 1. \end{cases}$

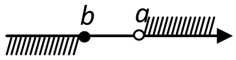
Cavab: $x = \varnothing$.

2. Bərabərsizliklər külliyyatını həll edin:

a) $\left[\begin{array}{l} x > a, \\ x \leq b \end{array}\right.$

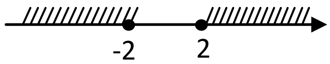


$a \leq b \Rightarrow x \in R$;



$a > b \Rightarrow x \in (-\infty ; b] \cup (a ; \infty)$;

b) $\left[\begin{array}{l} x \geq 2, \\ x \leq -2. \end{array}\right.$



Cavab: $x \in (-\infty ; -2] \cup [2 ; \infty)$.

Çalışmalar

1. Hansı münasibətləri külliyyat isarəsi altında yazmaq olar:

a) $x < 2$ və $x > 0{,}3$; b) $x < 2$ və ya $x > 3$;
c) $x < 2$ və $x < 0{,}3$; d) $x \geq 2$ və $x > 3$;
e) $x \leq 2$ və ya $x > 0{,}3$; f) $|x - 3| < 5$;
k) $x < 2$ və $x < 0{,}3$; *l*) $x \geq -3$ və ya $x \geq 3$.

2. Bərabərsizlilər sistemi şəklində yazın:

a) $0 < 4x < 2$; b) $5 \geq 3x - 4 > -3$;
c) $1 < x^2 < 4$; d) $-1 \leq x^3 \leq 8$.

3. Tənliyin həllini tənliklər sisteminə və ya külliyyatına gətirib həll edin :

a) $(2x - 3)(3y + 2) = 0$; b) $(4x - 5)(7x + 2) = 0$;
c) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 0$; d) $x^2 + |y - 1| = 0$;
e) $|4x + 2| + |7x - y + 4| = 0$.

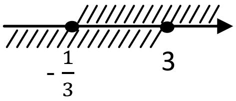
§49. Bərabərsizliklər sisteminin həllinə gətirilən çalışma nümunələri

Bu bölmədə bərabərsizliklər sisteminin həlli nümunələri ilə tanış olacağıq.

1. Bərabərsizliyi həll edin: $|3x-4| \le 5$.

$|3x-4| \le 5 \Rightarrow \begin{cases} 3x-4 \ge -5, \\ 3x-4 \le 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x \ge -1, \\ 3x \le 9. \end{cases}$

Cavab: $[-\frac{1}{3}; 3]$.



2. Bərabərsizliyi həll edin: $\frac{x-5}{2-x} \le 0$.

$\frac{x-5}{2-x} \le 0 \Rightarrow \begin{cases} x-5 \ge 0, \\ 2-x < 0. \end{cases}$ və ya $\begin{cases} x-5 \le 0, \\ 2-x > 0. \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x \ge 5, \\ x > 2. \end{cases}$ və ya $\begin{cases} x \le 5, \\ x < 2. \end{cases} \Rightarrow x \ge 5$ və ya $x < 2$.

Cavab: $x \in (-\infty; 2) \cup [5; \infty)$.

3. Ədəd oxu üzərində 7 ədədindən məsafəsi 3-dən kiçik olan ədəd hansı aralıqdadır?

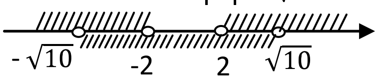
Axtarılan ədədi x ilə işarə edək. Onda şərtə görə $|x-7| < 3 \Rightarrow -3 < x-7 < 3 \Rightarrow 4 < x < 10$.

Cavab: $x \in (4;10)$.

4. Bərabərsizliyi həll edin: $|x^2-7| < 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3 < x^2 - 7 < 3 \Rightarrow 4 < x^2 < 10 \Rightarrow 2 < |x| < \sqrt{10}$

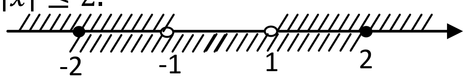
$\Rightarrow \begin{cases} |x| > 2, \\ |x| < \sqrt{10} \end{cases}$.



Cavab: $x \in (-\sqrt{10}; -2) \cup (2; \sqrt{10})$.

5. Bərabərsizliyi həll edin:

$1 < |x| \le 2 \Rightarrow \begin{cases} |x| > 1, \\ |x| \le 2. \end{cases}$

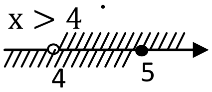


Cavab: $x \in [-2;-1) \cup (1;2]$.

6. Cavidan bir mağazadan eyni qiymətə 15 dəftər və 15 qəpiklik qələm aldı , digər mağazadan da həmin qiymətə 20 dəftər və 12 qəpiklik pozan aldı. Onun birinci mağazada xərclədiyi pulun miqdarı 90 qəpikdən çox deyildi, ikinci mağazada xərclədiyi pulun miqdarı isə 92 qəpikdən çox idi. Cavidan ikinci mağazada nə qədər pul xərcləmişdi?

Həlli. Dəftərin qiyməti x qəpik olsun. Onda şərtə görə

$\begin{cases} 15x + 15 \le 90, \\ 20x + 12 > 92 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x \le 75, \\ 20x > 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 5, \\ x > 4 \end{cases}$.



Qəpiklər tam ədədlə ifadə olunduğu üçün x = 5 (qəp).

Cavab: $20 \cdot 5 + 12 = 112$ qəp = 1man 12 qəp.

Çalışmalar

1. Eynigüclü bərabərsizlikləri göstərin:

a) $|x+4| \ge 0$ və $\sqrt{(x-4)^2} \ge 0$;

b) $(x-2)^3 > 0$ və $\frac{1}{x-2} > 0$;

c) $|x| + \frac{1}{|x|} \ge 2$ və $x^2 > 0$.

2. Bərabərsizliyi həll edin:

a) $\frac{\sqrt{2}-1,4}{5-8x} \ge 0$; b) $|2-3x| \le 4$; c) $x^2 > x$;

d) $|2-4x| > 6$; e) $\frac{3x+2}{3} - \frac{x-1}{4} < 2$.

3. Bərabərsizliyi həll edin:

a) $4x + 2a < ax - a$; b) $a - 4x \ge ax + a$;

c) $a(3x-2) \le 2ax + 5$; d) $a^2x > 2 - x$.

4. Bərabərsizliyin natural həllər cəmini tapın:

a) $(x-2)^2 - (x-3)^2 \le 22$; b) $|8 + 3x^2| < 29$.

5. Bərabərsizliklər sistemini həll edin:

a) $\begin{cases} 2x-6 > 0, \\ 4x-20 < 0. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3 \ge 0, \\ 4x-12 < 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x-8 > 0, \\ 6x+5 < 0. \end{cases}$ d) $\begin{cases} 12x+6 \ge 0, \\ x-25 \le -19. \end{cases}$

6. Bərabərsizliklər sisteminin natural həllər cəmini tapın:

a) $\begin{cases} 3(x-3) - 2(x+4) > -15, \\ 4(x-5) - 2(x-3) < 9. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5(x+2) - 9(x+1) < 1 - 4(x+3), \\ 4(x+5) - 2(x-3) < 9 - 2(3-x). \end{cases}$

7. Funksiyanın təyin oblastını tapın:

a) $y = \frac{\sqrt{4-2x}}{x-1}$; b) $y = \frac{2x-2}{\sqrt{x}+1} - \frac{2}{x-3}$;

c) $y = \sqrt{4-x^2} + \frac{x}{x-1}$; d) $y = \frac{x}{|x|+1} - \sqrt[3]{x}$.

8. İkiqat bərabərsizliyi həll edin:

a) $5 \le 2x + 7 < 15$; b) $5 \le 2x^2 + 7 < 15$.

9. Bərabərsizliklər sistemini ödəyən ən böyük tam ədədlə ən kiçik tam ədədin cəmini tapın:

a) $\begin{cases} 7x-8 > 3x+4, \\ 6x+5 < 30+4x; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 12x-17 \ge 10x-9, \\ 8x-51 < -9x. \end{cases}$

10. a-nın hansı qiymətlərində sistemin həlli var:

a) $\begin{cases} x > 5, \\ x < a; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \le 2, \\ x \ge a; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \ge a, \\ x > 4. \end{cases}$

11. a-nın hansı qiymətlərində sistemin həlli yoxdur:

a) $\begin{cases} x > -3, \\ x < a; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \le -2, \\ x \ge a; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \ge a, \\ x \le -4. \end{cases}$

§50. Mənfi olmayan ifadələr

Tərif: *Dəyişənin bütün mümkün qiymətlərində mənfi qiymət almayan ifadə* ***mənfi olmayan ifadə*** *adlanır.*

Məsələn, $x^2 \ge 0$; $|x| \ge 0$; $x^4 \ge 0$; $|x| + 2 \ge 0$; $\sqrt{x} \ge 0$; $x^4 + 1 \ge 0$; $\frac{1}{x^2} + 2 \ge 0$; $x^2 - x + 1 \ge 0$.

Dəyişənin bütün mümkün qiymətlərində doğru olduğu üçün bu bərabərsizliklərin sol tərəfindəki ifadələr *mənfi olmayan ifadələrdir*.

Qeyd edək ki, ifadə təyin oblastının bir hissəsində də *mənfi olmayan ifadə* ola bilər.

Məsələn, $x > 0$ olduqda $x + \frac{1}{x} - 2$

ifadəsi mənfi deyil , çünki $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2-2x+1}{x} =$

$= \frac{(x-1)^2}{x} \ge 0$.

Mənfi olmayan ifadələrin xassələri

Xassə 1. *İki mənfi olmayan dəyişənin cəmi və hasili də mənfi deyil:* $a \ge 0$, $b \ge 0 \Rightarrow a + b \ge 0$, $ab \ge 0$;
Mənfi olmayan dəyişənin müsbət dəyişənə nisbəti də mənfi deyil:

$$a \ge 0 , b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \ge 0 ;$$

Bu xassələrin isbatı aydındır.

Xassə 2. *Mənfi olmayan iki dəyişənin (ifadənin) cəmi sıfırdırsa,onda onların hər biri eyni zamanda sıfırdır:*
$a \ge 0$, $b \ge 0$, $a + b = 0 \Rightarrow a = 0$ və $b = 0$.

İsbatı. İki ədədin cəmi sıfırdırsa, onda həmin ədədlər əks ədədlərdir . Bu ədədlər sıfırdan fərqli olsalar, onda onlardan biri mənfi ədəd olmalıdır ki, bu da ola bilməz, çünki şərtə görə a və b mənfi olmayan ədədlərdir.Ona görə də onların hər biri eyni zamanda sıfırdır:
$a \ge 0$, $b \ge 0$, $a + b = 0 \Rightarrow$ **$a = 0$ və $b = 0$.**

Çalışma həlli nümunələri

1. Tənliyi həll edin:

a) $(a - 1)^2 + (b - 2)^2 = 0$;

b) $(a - 1)^2 + (a - 2)^2 = 0$.

Həlli. Tənliyin sol tərəfindəki ifadələr mənfi olmayan ifadələr olduğundan 2-ci xassəyə əsasən toplananların hər biri eyni zamanda sıfıra bərabər olmalıdır:

a) $(a-1)^2 + (b-2)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$ və $b = 2$;

b) $(a - 1)^2 + (a - 2)^2 = 0 \Rightarrow (a - 1)^2 = 0$ və $(a - 2)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$ və $a = 2$. $1 \ne 2$ olduğundan tənliyin kökü yoxdur, çünki a məchulu eyni zamanda 1 və 2-yə bərabər qiymət ala bilməz.

Xatırlatma. a və b ($a \ge 0$, $b \ge 0$) ədədlərinin ədədi və həndəsi ortası uyğun olaraq $\frac{a+b}{2}$ və $\sqrt{ab}$ ifadələridir.

2. İsbat edin ki, $a \ge 0$ və $b \ge 0$ olduqda

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} ,$$

yəni iki ədədin *ədədi ortası*, bu ədədlərin *həndəsi ortasından* kiçik deyil.

İsbatı. $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \ge 0 \Rightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \ge 0$,

$a + b \ge 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$.

İsbatın gedişindən aydındır ki, bərabərlik halı yalnız $a = b$ olduqda alınır.

Çalışmalar

1. İsbat edin ki: a) $\min(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}) = 2$;

b) Əks işarəli a və b ədədləri üçün $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \le -2$;

c) $a^4 + \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a} \ge 4$; d) $a^{10} + \frac{3}{a^2} + \frac{4}{a} \ge 8$.

2. İfadənin ən kiçik qiymətini tapın:

a) $x + \frac{324}{x}$, ($x > 0$) ; b) $\frac{(x+2)(x+8)}{x}$, ($x > 0$) ;

c) $\frac{2x^2-7x+50}{x}$, ($x > 0$) ; d) $\frac{b^4+b^2+1}{b^2+1}$.

3. Tənliyi həll edin:

a) $x^2 + 3|x| + \sqrt{x} = 0$;

b) $(2x - 3)^2 + \sqrt{5y+7} + |3z-2| = 0$;

c) $x^2 + 3(x-1)^2 = 0$; d) $x^2 - 4(x-1)^2 = 0$.

4. $3a + 4b = 12$, ($a > 0$, $b > 0$) olduqda ab hasilinin ən böyük qiymətini tapın.

5. $ab = 4$, ($a > 0$) olduqda $2a + b$ cəminin ən kiçik qiymətini tapın.

6. Vahidə hansı yaxındır: düzgün $\frac{a}{b}$ kəsri , yoxsa düzgün olmayan $\frac{b}{a}$ kəsri ? ($a > 0$, $b > 0$).

7. $m , n \in N$ olduqda hansı kəsr böyükdür:

$\frac{m}{n}$ kəsri , yoxsa $\frac{m+1}{n+1}$ kəsri ?

§51. Mənfi olmayan ifadənin ən kiçik qiyməti

Yuxarıdakı çalışma həllərindən belə nəticəyə gəlirik ki, mənfi olmayan ifadə 0-a bərabər qiymət alırsa, onda bu ifadənin ən kiçik qiyməti 0-dır.

Bəs, mənfi olmayan və 0-a bərabər qiymət ala bilən iki ifadənin cəminin ən kiçik qiyməti sıfır ola bilərmi?

Məsələn, $x^2 + (x - 1)^2$ ifadəsinin mənfi olmadığı aşgardır, lakin bu ifadə dəyişənin heç bir qiymətində 0-a çevrilmir, çünki $x^2 + (x - 1)^2 = x^2 + x^2 - 2x + 1 =$ $= 2x^2 - 2x + 1 = 2(x^2 - x + \frac{1}{2}) = 2(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} > 0$.

Buradan alırıq ki, x^2 və $(x - 1)^2$ ifadələrinin hər birinin ən kiçik qiyməti 0 olsa da, onların cəminin ən kiçik qiyməti 0,5-dir.

Fikrimizi yekunlaşdıraraq belə nəticəyə gəlirik:

Nəticə 1. Mənfi olmayan ifadə dəyişənin heç bir qiymətində 0-a bərabər qiymət ala bilmirsə, onda bu ifadənin ən kiçik qiyməti sıfır ola bilməz.

Nəticə 2. Eyni dəyişənli iki ifadədən hər birinin ən kiçik qiyməti sıfırdırsa, onda onların cəminin də ən kiçik qiymətinin sıfır olması haqqında hökm vermək olmaz.

Nəticə 3. Mənfi olmayan ifadə dəyişənin hər hansı qiymətində sıfıra bərabər qiymət alırsa, onda bu ifadənin ən kiçik qiyməti sıfırdır.

Nəticə 4. Mənfi olmayan f(x) ifadəsinin ən kiçik qiyməti 0-dırsa, onda f(x) + a ifadəsinin ən kiçik qiyməti a-dır.

Misal 1. $(x^2 + 3)^2 + y^2 - 2y + 2$ ifadəsinin ən kiçik qiymətini tapın.

Həlli. $(x^2 + 3)^2 + (y - 1)^2 + 1 \geq 10$. Cavab: 10.

Misal 2. $x > 0$ olduqda $x + \frac{1}{x} - 1$ ifadəsinin ən kiçik qiymətini tapın.

$x > 0$ olduqda $x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$ və $x = 1$ olduqda bərabərlik halı alınır, yəni $x > 0$ olduqda $x + \frac{1}{x} - 2$ ifadəsinin ən kiçik qiyməti 0-dır. Ona görə də $x > 0$ olduqda $x + \frac{1}{x} - 1$ ifadəsinin ən kiçik qiyməti 1-dir.

Eyni qayda ilə, $a \neq 0$ olduqda $a^2 + \frac{1}{a^2} - 0{,}5$; $|a| + \frac{1}{|a|} - 1$ ifadələrinin ən kiçik qiymətlərini tapa bilərik: 1,5 və 1.

Misal 3. a və b eyni işarəli ədədlər olduqda $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ifadəsinin ən kiçik qiymətini tapın.

$\frac{a}{b} > 0$ olduğu üçün $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ və $a = b \neq 0$ olduqda bərabərlik halı alınır. Buna görə də $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ifadəsinin ən kiçik qiyməti 2-dir.

Çalışmalar

1. Mənfi olmayan ifadələrdən hansıları 0-a bərabər qiymət alır?

a) $x^2 + 3(y - 1)^2$; b) $4y^2 + 9(y + 1)^2$;

c) $\frac{1}{x^2} + y^2$; d) $|x| + \sqrt{y - 1}$.

2. İfadələrin ən kiçik qiymətlərini tapın:

a) $6x^2 + 3(x - 2)^2$; b) $4y^2 + 9(\sqrt{x} + 1)^2$;

c) $\frac{8}{x^2} + 2x^2$; d) $2|x| + \sqrt{2y + 1}$.

3. Dəyişənin hansı qiymətində ifadə özünün ən kiçik qiymətini alır:

a) $x^2 + (x + 2)^2$; b) $2y^2 + 5(\sqrt{x} + 1)^2$;

c) $\frac{8}{x^2} + 2x^2$; d) $-2|x| + x^2 + 2$.

4. k-nın hansı qiymətlərində ifadənin ən böyük qiyməti var: $\frac{5}{x^2 + k}$?

5. $(x^2 - 3)^2 + y^2 + 4y + 3$ ifadəsinin ən kiçik qiymətini tapın.

Qeyd 1. Dəyişənin (dəyişənlərin) bütün mümkün qiymətlərində müsbət qiymətlər alan ifadə *müsbət ifadə* olsa da bu ifadəni mənfi olmayan ifadə hesab etmək olar.

Qeyd 2. *Mənfi olmayan ifadənin ən kiçik qiyməti olmaya da bilər.*

Məsələn, $\frac{1}{x^2}$ ifadəsi mənfi olmayan ifadə olsa da onun ən kiçik qiyməti yoxdur.

Qeyd 3. *Mənfi olmayan ifadənin ən böyük qiyməti ola bilər.*

Məsələn, $\frac{1}{x^2 + 3}$ ifadəsinin ən kiçik qiyməti yoxdur, lakin ən böyük qiyməti $\frac{1}{3}$ - dir.

§52. Müsbət ifadələr

Tərif: Dəyişənin (dəyişənlərin) bütün mümkün qiymətlərində yalnız *müsbət qiymətlər* alan ifadəyə *müsbət cəbri ifadə deyilir.*

Məsələn, dəyişənin bütün mümkün qiymətlərində

$|x| + 2 > 0$; $x^4 + y^2 + 1 > 0$, $\frac{1}{x^2} > 0$; $\sqrt{x} + 1 > 0$

bərabərsizliklərinin doğruluğu aşgardır.

$x^2 - x + 1$ ifadəsi müsbət ifadədir, çünki

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \ (x \in R).$$

Ümumiyyətlə, mənfi olmayan ifadənin üzərinə müsbət ədəd əlavə etdikdə müsbət ifadə alınır.

Bəzi ifadələr təyin oblastının bir hissəsində müsbətdir.

Məsələn, $x > 0$ olduqda $x + \frac{1}{x} - 1$ ifadəsi müsbətdir, çünki $x + \frac{1}{x} - 1 = \frac{x^2 - x + 1}{x} > 0$.

Müsbət ifadələrin ən kiçik qiymətləri

Müsbət ifadənin ən kiçik qiymətinin olub-olmamasını əsaslandırmaq lazımdır. Məsələn, aydındır ki,

$x^2 + 1$; $|x| + 3$; $x^4 + 5$; $\sqrt{x} + 2$

müsbət ifadələrinin ən kiçik qiymətləri uyğun olaraq 1 ; 3 ; 5 ; 2 ədədləridir.

Lakin elə müsbət ifadələr də var ki, onların ən kiçik qiymətləri aşgar görünmür. Bir neçə nümunə nəzərdən keçirək. Yuxarıda qeyd etmişdik ki:

a) $x > 0$ olduqda $x + \frac{1}{x}$ ifadəsinin ən kiçik qiyməti 2-dir. Buna görə də, $x > 0$ olduqda $x + \frac{1}{x} - 1$ ifadəsinin ən kiçik qiyməti 1-dir.

b) $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, $(x \in R)$ olduğu üçün $x^2 - x + 1$ ifadəsinin ən kiçik qiyməti $\frac{3}{4}$ - dür.

c) Elə müsbət ifadələr var ki, onların ən kiçik qiymətləri yoxdur.

Məsələn, $x > 0$ olduqda $\frac{1}{x}$ müsbət ifadəsinin ən kiçik qiyməti yoxdur. Bunu isbat edək. Tutaq ki, $x = a$ olduqda $\frac{1}{a}$ verilmiş ifadənin ən kiçik qiymətidir, onda $x = a + 1$ olduqda $\frac{1}{x}$ ifadəsi daha kiçik qiymət alır: $\frac{1}{a+1} < \frac{1}{a}$. Ona görə də, $x > 0$ olduqda $\frac{1}{x}$ ifadəsinin ən kiçik qiyməti yoxdur. Bu ifadənin ən böyük qiyməti də yoxdur, çünki x dəyişəni

$$\frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{5} \text{ və s.}$$

qiymətlər alaraq kiçildikcə $\frac{1}{x}$ ifadəsi 2 , 3 , 4, 5 və s. qiymətlərini alaraq sonsuz olaraq kiçilir.

Mənfi ifadələr

Tərif: Müsbət ifadəyə əks olan ifadəyə *mənfi ifadə deyilir.*

Məsələn:

$|x| + 2$; $x^4 + 1$; $\frac{1}{x^2}$; $\sqrt{x} + 1$

müsbət ifadələr olduğu üçün

$-|x| - 2$; $-x^4 - 1$; $-\frac{1}{x^2}$; $-\sqrt{x} - 1$

ifadələri *mənfi ifadələrdir*.

Buradan belə nəticəyə gəlirik ki, müsbət ifadənin ən kiçik qiyməti varsa, onda bu ifadəyə əks olan ifadənin ən böyük qiyməti var. Doğrudan da, tutaq ki, f(x) müsbət ifadəsinin ən kiçik qiyməti a-dır: $f(x) \geq a$. Buradan alırıq ki, $-f(x) \leq -a$, yəni $-f(x)$ mənfi ifadəsinin ən böyük qiyməti $(-a)$-dır.

Qeyd edək ki, mənfi ifadə təyin oblastının bir hissəsində də verilə bilər.

Məsələn, $x < 0$ olduqda $x + \frac{1}{x} + 1$ ifadəsi mənfi ifadədir, çünki $x + \frac{1}{x} + 1 =$

$$= \frac{x^2 + x + 1}{x} = \frac{(x+0{,}5)^2 + \frac{3}{4}}{x} < 0.$$

Yekunlaşdırıcı mülahizələr

Ədəd oxu üzərindəki təsvirə əsasən deyə bilərik ki, ifadənin qiymətləri:

a) hər iki tərəfdən məhdud ola bilər;

b) sol tərəfdən məhdud və sağ tərəfdən qeyri-məhdud ola bilər;

c) sağ tərəfdən məhdud və sol tərəfdən qeyri- məhdud ola bilər.

Sol tərəfdən qeyri-məhdud çoxluğun ən kiçik elementi, sağ tərəfdən qeyri-məhdud çoxluğun isə ən böyük elementi yoxdur.

Onu da qeyd edək ki, sol tərəfdən məhdud çoxluğun ən kiçik elementi, sağ tərəfdən məhdud çoxluğun isə ən böyük elementi ola da bilər, olmaya da bilər. Ona görə də cəbri ifadənin ən böyük və ya ən kiçik qiyməti ola da bilər, olmaya da bilər.

Bu mülahizələri şəkil və misallar üzrə şərh edin!

§53. Müsbət olmayan ifadələr

Tərif: Mənfi olmayan ifadəyə əks olan ifadəyə müsbət olmayan ifadə deyilir.

Məsələn, x^2 ; $|x|$; $\frac{1}{x^2} + 2$; $x^2 - x + 1$ ifadələri mənfi olmayan ifadələr olduğu üçün

$-x^2$; $-|x|$; $-\frac{1}{x^2} - 2$; $-x^2 + x - 1$

ifadələri müsbət olmayan ifadələrdir.

Tərifdən aydındır ki, mənfi olmayan ifadənin ən kiçik qiyməti varsa, onda ona əks olan ifadənin ən böyük qiyməti var.

Müsbət olmayan ifadə dəyişənlərin müəyyən qiymətində 0-a bərabər qiymət alırsa, bu ifadənin ən böyük qiyməti 0-dır.

Bir neçə misal nümunəsi nəzərdən keçirək:

a) $-a^2 - b^2$; $-|x| - y^4$; $-x^4 - x^2 - \sqrt{x}$

ifadələri 0-a bərabər qiymətlər aldıqları üçün onların hər birinin ən böyük qiyməti 0-dır.

b) a və b müxtəlif işarəli ədədlər olduqda $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1$ ifadəsinin ən böyük qiymətini tapaq.

Bilirik ki, a və b müxtəlif işarəli ədədlər olduqda $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \le -2$ və $a = -b$ olduqda bərabərlik halı alınır,yəni $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ifadəsinin ən böyük qiyməti (-2)-dir.

Beləliklə, a və b müxtəlif işarəli ədədlər olduqda $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1$ ifadəsinin ən böyük qiyməti (-1)-dir.

Xüsusi halda, $a < 0$ olduqda $a + \frac{1}{a}$ ifadəsinin ən böyük qiyməti (- 2)-dir.

c) $-x^2 - 4x + 5$ ifadəsinin ən böyük qiymətini tapın.

$-x^2 - 4x + 5 = -(x^2 + 4x - 5) = -(x + 2)^2 + 9 \le 9$.

Cavab: 9.

d) $-(x^2 + 4)^2 - 3|y - 1|$ ifadəsinin ən böyük qiymətini tapın.

Əvvəlcə əks ifadənin ən kiçik qiymətini tapaq:

$$(x^2 + 4)^2 + 3|y - 1| \ge 16.$$

Cavab: Verilmiş ifadənin ən böyük qiyməti (-16)-dır, çünki ona əks olan ifadənin ən kiçik qiyməti 16-dır.

Çalışmalar

1. Tənliyi həll edin:

a) $x^2 + 4y^2 - 4x + 4y + 5 = 0$;

b) $9x^2 + 16y^2 - 12x + 8y + 5 = 0$;

c) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = 0$;

d) $x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y = 0$.

2. Bərabərsizliyi həll edin:

a) $x + 3 \le 2\sqrt{3x}$;

b) $x^2 + y^2 - 2xy + 1 \le 0$;

c) $2 + x^2 + y^2 - 2x - 2y \ge 0$;

d) $-2 \le x + \frac{1}{x} \le 2$.

3. Funksiyanın ən kiçik qiymətini tapın:

a) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 8}$; b) $y = \sqrt{x^2 - 4x - 4}$;

c) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$;

d) $y = \sqrt{x^4 + 2x^2 + 4} + |x| + 1$.

4. Funksiyanın ən böyük qiymətini tapın:

a) $y = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$; b) $y = \sqrt{-x^2 - 6x}$;

c) $y = \sqrt{-2|x| + 4} + 2$; d) $y = -(x^2 + 2)^2 - |x|$.

5. $y = 2x - 5$ düz xətti üzərində elə nöqtə tapın ki, bu nöqtənin A(-1 ; 1) və B(2 ; - 6) nöqtələrindən məsafələri cəmi ən kiçik olsun.

6. Perimetri 24 sm olan düzbucaqlının sahəsinin ən böyük qiymətini tapın.

7. Sahəsi 24 sm^2 olan düzbucaqlının perimetrinin ən kiçik qiymətini tapın.

8. Diaqonalı $3\sqrt{2}$ sm olan ən böyük sahəli düzbucaqlının perimetrini tapın.

9. Diaqonalı 6 sm olan ən böyük perimetrli düzbucaqlının sahəsini tapın.

10. $y = 3x - 6$ düz xəttinin $y = x - 2$ düz xəttindən yuxarıda qalan hissəsinin absislərini tapın.

11. $y = x^2$ parabolasının $y = x + 2$ düz xəttindən aşağıda qalan hissəsinin absislərini tapın.

12*. 34987 = 20 bərabərliyinin sol tərəfində rəqəmlər arasına riyazi işarələri elə qoyun ki, doğru bərabərlik alınsın (işarələr təkrar olunmamalı,mötərizədən istifadə edilməməlidir) .

§54. Ədədin tam və kəsr hissəsi

Ədədin tam hissəsi

Tərif: Ədəddən böyük olmayan ən böyük tam ədədə həmin ədədin tam hissəsi deyilir.

a ədədinin tam hissəsi $[a]$ kimi işarə olunur. Məsələn,
$[-2{,}3] = -3$, $[2{,}3] = 2$, $[\pi] = 3$, $\left[-4\frac{3}{5}\right] = -5$, $\left[5\frac{2}{3}\right] = 5$.

Tərifdən aydındır ki, tam ədədin tam hissəsi ədədin özünə bərabərdir, yəni $a \in Z \Rightarrow [a] = a$: $[0] = 0$, $[-1] = -1$, $[1] = 1$.

Ədədin kəsr hissəsi

Tərif: Ədədlə bu ədədin tam hissəsinin fərqinə ədədin kəsr hissəsi deyilir.

a ədədinin kəsr hissəsi $\{a\}$ kimi işarə olunur: $\{a\} = a - [a]$.

- 2,3-ün kəsr hissəsini hesablayaq: $\{-2{,}3\} = -2{,}3 - [-2{,}3] =$
$= -2{,}3 - (-3) = -2{,}3 + 3 = 0{,}7$.

Ədədin tam və kəsr hissəsinin xassələri

1. Tərifə əsasən istənilən a ədədi ($a \in R$) üçün $[a] \le a$ **:**
$a \in Z \Rightarrow [a] = a$, $a \notin Z \Rightarrow [a] < a$.

2. $a \in R \Rightarrow [a] + \{a\} = a$.

3. $a \in Z \Rightarrow \{a\} = 0$, $a \notin Z \Rightarrow \{a\} \neq 0$.

4. $0 \le a < 1 \Rightarrow \{a\} = a$.

5. Ədədə tam ədəd əlavə etdikdə onun kəsr hissəsi dəyişmir:
$a \in R$, $b \in Z$ olduqda $\{a + b\} = \{a\}$.

6. Ədədə tam ədəd əlavə etdikdə onun tam hissəsi həmin tam ədəd qədər dəyişir:
$a \in R$, $b \in Z$ olduqda $[a + b] = [a] + b$.

7. $a \in Z$ olduqda $[-a] = -[a]$;
$a \notin Z$ olduqda $[-a] = -[a] - 1$.

8. $n \le a < n+1,\ n \in Z \Leftrightarrow [a] = n$.

Ç a l ı ş m a l a r

1. Hesablayın:

a) $[5,(7) + 7,(9)]$; b) $[3{,}2(3) - 7,(9)]$; c) $[\sqrt{7} + 9]$;
d) $\{4{,}1(3) + \frac{13}{15}\}$; e) $\{4{,}1(3) - 1\frac{2}{15}\}$; f) $\{\sqrt{7} - 9\} + [\sqrt[3]{220}]$;
k) $[\sqrt{3} + \sqrt{5}]$; *l*) $\{\sqrt{3} + \sqrt{2}\}$; m) $[2\sqrt{3} - \sqrt{2}] - [\sqrt[3]{30}]$.

2. Tənliyi həll edin:

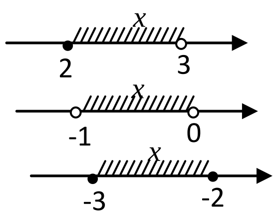
a) $[3 + x] = 5$; b) $[1 - x] = [x]$; c) $\{x + 2\} = \frac{1}{2}$;
d) $\{x + 2\} = \{x - 1\}$; e) $[2x + 2] = -5$.

3. Bərabərsizliyi həll edin:

a) $\frac{1}{3} < \{y\} < \frac{1}{2}$; b) $-2 \le [y] \le 5$.

4. Təsvir edilən hissəyə uyğun x-ın tam və kəsr hissəsini tapın.

a)
b)
c)



$\{\pi\} = \pi - [\pi] = \pi - 3$
$[\sqrt{2}] = 1$; $[\sqrt{5}] = 2$;
$\{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - 1$;
$\{\sqrt{5}\} = \sqrt{5} - 2$;
$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$;
$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$;
$3{,}1 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3{,}3 \Rightarrow$
$\Rightarrow [\sqrt{2} + \sqrt{3}] = 3$,
$\{\sqrt{2} + \sqrt{3}\} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - 3$

$0 < b < a < 1$ olduqda
$\left[\frac{b}{a}\right] = 0$; $[a - b] = 0$;
$\left\{\frac{b}{a}\right\} = \frac{b}{a}$; $\{a - b\} = a - b$.

$\{3{,}8 \pm 4\} = \{3{,}8\} = 0{,}8$;
$[3{,}8 + 4] = 3 + 4 = 7$;
$[3{,}8 - 4] = 3 - 4 = -1$;
$\{-1{,}4\} = \{-1{,}4 + 2\} =$
$= \{0{,}6\} = 0{,}6$.

1. Tənliyi həll edin:
$[4 - x] = [x + 3]$.

Həlli. İki halı nəzərdən keçirək:
I. $x \in Z$ olduqda (6-cı xassə)
$[4 - x] = [-x] + 4 = [x] + 3$,
$-[x] + 4 = [x] + 3$,
$2[x] = 1$, $[x] = 0{,}5$
bu hal ola bilməz.
II. $x \notin Z$, onda
$[-x] + 4 = [x] + 3$,
$-[x] - 1 + 4 = [x] + 3$,
$2[x] = 0$, $[x] = 0 \Rightarrow x \in (0;1)$

Cavab: $x \in (0;1)$.

2. Bərabərsizliyi həll edin:
$[x] + x < \{x\} + 5$.

Həlli. $\{x\} = x - [x]$ olduğu üçün
$[x] + x < x - [x] + 5$,
$2[x] < 5 \Rightarrow [x] < 2{,}5$.

Cavab: $x < 3$.

§55. Tam üstlü qüvvətlər

Tam üstlü qüvvətlər üç hissədən ibarətdir: *natural üstlü , sıfır və mənfi tam üstlü qüvvətlər*.
Natural üstlü qüvvətləri artıq öyrənmişik. Bu bölmədə sıfır üstlü və mənfi tam üstlü qüvvətləri öyrənəcəyik.

Sıfır üstlü qüvvət. $a \neq 0$ ixtiyari ədəd olduqda

$$a^0 = 1 ,$$

yəni sıfır üstlü qüvvət 1-ə bərabərdir.

İsbatı: $a \neq 0$ olduqda $a^0 = a^{1-1} = a : a = 1$.

Məsələn, $2^0 = 1$, $(\frac{4}{7})^0 = 1$, $(239 \cdot \frac{3}{7} + 2009 : \frac{9}{19})^0 = 1$.

Lakin $(231 \cdot \frac{3}{7} - 209 : \frac{9}{19})^0$ mənasız ifadədir, çünki $231 \cdot \frac{3}{7} - 209 \cdot \frac{9}{19} = 99 - 99 = 0$.

Mənfi üstlü qüvvət. İstənilən $a \neq 0$, $b \neq 0$, $k \in N$ ədədləri üçün

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-k} = \left(\frac{b}{a}\right)^{k}$$

düsturu doğrudur.

İsbatı: $a \neq 0$, $b \neq 0$ olduqda

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-k} = \left(\frac{a}{b}\right)^{0-k} = \left(\frac{a}{b}\right)^{0} : \left(\frac{a}{b}\right)^{k} = $$
$$= 1 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{k} = \left(\frac{b}{a}\right)^{k}.$$

Xüsusi halda, $a \neq 0$ olduqda $a^{-k} = \left(\frac{1}{a}\right)^{k} = \frac{1}{a^k}$,

yəni

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \; ; \; a^{-2} = \frac{1}{a^2} \; ; \; a^{-3} = \frac{1}{a^3} \; ; \ldots$$

Buradan belə nəticəyə gəlirik ki, surət və məxrəcində mənfi üstlü qüvvət iştirak edən kəsrlərdə *mənfi işarəsindən azad olmaq* üçün "əks tərəfdə yazma" qaydasından da istifadə etmək olar:

$$\frac{a^{-n} \cdot b^m}{a^q \cdot b^{-p}} = \frac{b^m \cdot b^p}{a^n \cdot a^q} \; ; \quad (a + b)^{-k} = \frac{1}{(a+b)^k} \; ;$$

$$\frac{c}{(a-b)^2} = c\,(a - b)^{-2} \; ; \quad \frac{c}{(a-b)^2} = c\,(a - b)^{-2} .$$

Qeyd edək ki, mənfi üstlü qüvvət natural üstlü qüvvətlə ifadə olunduğundan natural üstlü qüvvətin bütün xassələri mənfi üstlü qüvvətlərə də aiddir.

Məsələn,

$$(a^{-3})^{-2} \cdot (a^{-4})^3 = a^6 \cdot a^{-12} = a^{6-12} = a^{-6} = \frac{1}{a^6} \; ;$$

$$(a^{-5})^{-3} : (a^4)^{-3} = a^{15} : a^{-12} = a^{15+12} = a^{27} \; ;$$

$$(a^{-1} + b^{-1})\,(a + b)^{-1} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{1}{a+b} =$$
$$= \frac{a+b}{ab} \cdot \frac{1}{a+b} = \frac{1}{ab} .$$

Çalışma nümunələri

a) $2^{-1} = \frac{1}{2}$; $3^{-2} = \frac{1}{9}$; ...

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3^1 = 3$;

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{9}{4}$;

d) $\frac{2^{-3} \cdot 3^2}{2^4 \cdot 3^{-3}} = \frac{3^2 \cdot 3^3}{2^4 \cdot 2^3} = \frac{3^5}{2^7} = \frac{243}{128}$;

e) $\frac{5^{n+1} - 5^n}{2 \cdot 5^n} = \frac{5^n(5-1)}{2 \cdot 5^n} = 2$;

f) $\frac{a^n + a^{n+2} + a^{n+4}}{a^{-n-4} + a^{-n-2} + a^{-n}} = \frac{a^n(1 + a^2 + a^4)}{a^{-n-4}\,(1 + a^2 + a^4)} = a^n a^{n+4} = a^{2n+4}$.

Çalışmalar

1. Hesablayın:

a) $4^{-1} + 2^2 \cdot \left(\frac{1}{37}\right)^0 - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$;

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2} - \frac{9}{4}$;

c) $\frac{2^{-5} \cdot 3^2}{2^4 \cdot 3^{-4}} \cdot \frac{3^4 \cdot 3^{-1}}{2^{-3} \cdot 2^3} : \frac{3^5}{2^7}$;

d) $\frac{5^{n+1} - 5^n}{2 \cdot 5^n} : \frac{5^{n+2} - 5^n}{4 \cdot 5^n} \cdot 2$;

e) $\frac{a^{2n} + a^{2n+2} + a^{2n+4}}{a^{-3n-4} + a^{-3n-2} + a^{-3n}}$;

f) $(\sqrt{2} + 1)^{-1} \cdot (\sqrt{2} - 1)$;

k) $\frac{(3+\sqrt{2})^{-2}}{11 - 6\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{-2} - 1$.

2. Tənliyi həll edin:

a) $x + x^{-1} = 2$; b) $x - x^{-1} = 2$;

c) $(2x+1)^{-2} - 2(2x+1)^{-1} + 1 = 0$;

d) $\left(\frac{x+2}{2}\right)^{-4} - \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-2} + 2 = 0$.

3. Bərabərsizliyi həll edin:

a) $x^{-1} > 2$; b) $x^{-1} < 1$;

c) $(1 - 2x)^{-1} < 0$; d) $\left(\frac{x+2}{2-x}\right)^{-1} > 1$.

4. Bərabərsizliyin tam həllərini tapın:

a) $\frac{5}{8} < 2^{-n} < 3$; b) $\frac{2}{7} < 3^n \leq 3$;

c) $2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq 16$; d) $-3 \leq \left(\frac{1}{27}\right)^{-n} \leq 80$.

§56. Nənəm və riyaziyyat

(Nağıl)

Müəllif öz müəllimlik təcrübəsinə əsaslanaraq dialoji təlim metodunun *romantik* bir formasını hazırlamış və onu “*romantik dialoji təlim metodu*” adlandıraraq bu metodun praktik bir nümunəsini müəllim və şagirdlərin hüzuruna nağıl şəklində təqdim edir.

Birinci hissə

Bir gün nənəm mənə yaxınlaşıb dedi:

- Ay bala, hamı bu riyaziyyatdan danışır, deyirlər o çox gözəl elmdir, hər yerdə - evdə , işdə, dükanda, bazarda, imtahanda insanlara çox lazım olur. Məktəbdə öyrəndiklərimin çoxusu yadımdan çıxıb. Bəlkə, bir az məşq edək , görüm bir şey yadımda qalıb ya yox ! Deyirəm sən bir yana getsən şagirdlərinlə məşğul olaram və yaxud hərdən bir sənə kömək edərəm. Sən istirahət edərsən!

- Nənə can, çox gözəl fikir söylədin. Ancaq məni əvəz etmək üçün hələ çox şeyləri xatırlamalısan axı! Hələ üstəlik çox şeyləri öyrənməlisən. Axı, indi zəmanə dəyişib.Yeni mövzular , məntiqi çalışmalar, kompüter vasitəsi ilə öyrənmə və çalışmalar həlli və s.

- Narahat olma, ay bala, lazım olanların hamısını yavaş-yavaş öyrənərəm.

- Afərin nənə,əsas odur ki, çətinlikdən qorxmayasan. Nə vaxt istəsən məşq nədi, lap əsl məşğələyə başlaya bilərik. Onu da bilirəm ki, riyaziyyatı bir çox şagirdlərdən daha tez öyrənə bilərsən.

- Yox , ay bala, maşallah, uşaqlar od parçasıdırlar, çox enerjili olurlar, mən onlarla ayaqlaşa bilmərəm. Məktəbdə öyrəndiklərimdən hesab əməlləri, kvadratlar, kublar yadımdadır. Deyəsən adi və onluq kəsrlərdən də bir az yadımda qalıb. Bir az təkrar etsəm hamısı yadıma düşər. Düsturlar varıydı ey, qarma-qarışıq, alt-alta yazı formaları varıydı, ay bala , onlar nə idi elə?

- Bildim, ay nənə, kökləri deyirsən, bəzən ona radikal da deyirlər. $\sqrt{\ }$ şəklində işarələrdən istifadə olunur.

- Hə, hə bax onu deyirəm. O vaxt onları yaxşı bilirdim. İndi hamısı yadımdan çıxıb. Bir az məşğul olsam çoxusu yadıma düşər. Bircə bilmək istəyirəm ki, dərs sxemin necədir?

- Nənə , dərsimin konkret nəzəri sxemi belədir **:**

1. *Misal nümunələri və tərifin ifadəsi ;*

2. *Tərifin tətbiqi ilə çalışma nümunələri ;*

3 . *Misal nümunələri və birinci xassənin söz və düsturla ifadəsi ;*

Məlum biliklər əsasında birinci xassənin isbatı ;

4. *Birinci xassə və tərifin tətbiqi ilə çalışma həlli ;*

5. *Misal nümunələri və növbəti xassələrin söz və düsturla ifadəsi ;*

İsbat edilmiş xassələrin və tərifin tətbiqi ilə növbəti xassələrin isbatı ;

6. *Hər bir xassədən sonra tərif və bu xassənin tətbiqi ilə çalışma həlli nümunələri;*

7. *Çalışmalar*

- Hə, ay bala, bu sxem xoşuma gəldi. Əminəm ki, bir şey öyrənə biləcəm!

- Hə, qoçaq nənəm, sabahdan məşğələyə başlaya bilərik! Burada əsas məsələ əzbərləmək deyil, qanunauyğunluqları dərk etməkdir. Şagirdin də əsas məharəti ondan ibarətdir ki, vaxt itirmədən müəllim və ya şagird yoldaşları ilə dialoqa girib aydın olmayan məqamları dəqiqləşdirsin və kifayət qədər çalışma həll etməyə səy göstərsin.

Beləliklə, nənəmlə riyaziyyat məşğələsinə başladıq.

Birinci məşğələ

Kvadrat köklər

- Nənə can, nədən başlayaq!

- Ay bala, bir o kökləri mənə danış görüm yadımda bir şey qalıb ya yox. Onları yaxşı öyrənsəm digər mövzuları da tez öyrənərəm.

- Nənə can , kökləri mükəmməl öyrənmək üçün əvvəlcə kvadrat kökləri yaxşı bilmək lazımdır.

- Ay bala , necə istəyirsən elə olsun!

- Nənə , ədədlərin kvadratları yadındadır?

- Əlbəttə, $0^2 = 0$; $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$; $5^2 = 25$; $12^2 = 144$ və s.

- Nənə, bəs mənfi ədədlərin kvadratları!

- Həə, ay bala, mənfini mənfiyə vurduqda müsbət alındığı üçün $(-1)^2 = 1$; $(-2)^2 = 4$; $(-13)^2 = 169$; $(-14)^2 = 196$; $(-18)^2 = 324$ və s.

- Nənə, görünür, ədədlərin kvadratlarını unutmamısan.Adi və onluq kəsrlərin kvadratlarına aid bir neçə misal da mən yazım:

$0{,}1^2 = 0{,}01$; $0{,}2^2 = 0{,}04$; $2{,}1^2 = 4{,}41$; $(- 2{,}3)^2 = = 5{,}29$; $(- 2{,}4)^2 = 5{,}76$; $(- 2{,}6)^2 = 6{,}76$;

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\ ;\ \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}\ ;\ \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}\ ;\ \left(-\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{49}{81}\ .$$

- Ay bala, bunları elə mən də yazardım!

- Bilirəm, ay nənə, özüm sənə əziyyət vermək istəmədim. Belə başa düşdüm ki,ədədin kvadratının xassələrini də yaza bilərsən.
- Bəli,yaza bilərəm:

1) $(-a)^2 = a^2$; 2) $(ab)^2 = a^2b^2$; 3) $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$.

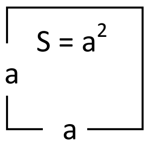
- Doğrudur, nənə , iki xassəni də mən yazım, qalan xassələri sonra öyrənəcəyik:

4) $(a^n)^2 = a^{2n}$; 5) $a^2 = |a|^2$.

Məsələn, $(-1)^2 = 1$; $(-2)^2 = 2^2 = 4$; $2{,}5^2 \cdot 4^2 = (2{,}5 \cdot 4)^2 = 10^2 = 100$; $(a^2)^2 = a^4$; $(a^3)^2 = a^6$ və s.

Kvadrat kökalma. Hesabi kvadrat kök

- Nənə, tərəfi 3 sm olan kvadratın sahəsi nəyə bərabərdir ?
- Ay bala, 9 sm^2 .



- Nənə, sahəsi 25 sm^2 olan kvadratın tərəfi neçə santimetrdir?
- 5 sm, çünki 5-in kvadratı 25-ə bərabərdir.
- Nənə can, son mülahizələri belə yekunlaşdırmaq olar:

"25 ədədi 5-in kvadratı , 5 isə 25-in kvadrat kökündür"

- Həə, ay bala,yadıma düşdü! Kökalma əməli kvadrata yüksəltmə əməlinin tərsidir, yəni kvadratın sahəsi verildikdə tərəfin tapılması əməli kvadrat kökalmadır.
- Nənə, həndəsi nöqteyi-nəzərdən elədir.Tələsmə, indi kökalma ilə ətraflı tanış olarıq.

Yazdığımız kvadratlara uyğun *kvadrat köklər* belə yazılır:

$\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{16} = 4$; $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{4{,}41} = 2{,}1$; $\sqrt{5{,}29} = 2{,}3$; $\sqrt{5{,}76} = 2{,}4$ və s.

- Ay bala, bilirəm ki, mənfi ədəddən kvadrat kök çıxmır, kvadrat kökün qiyməti də mənfi deyil.Qoy , özüm də bir neçə misal yazım:

$\sqrt{64} = 8$; $\sqrt{169} = 13$; $\sqrt{196} = 14$; $\sqrt{289} = 17$; $\sqrt{324} = 18$; $\sqrt{2{,}56} = 1{,}6$; $\sqrt{2\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ və s.

- Sağ ol, ay nənə ! Yaxşı yaddaşın var imiş ki! Nənə, *kvadrat kökün* tərifi yadındadır?
- Ay bala, qoy o misallara bir yaxşı baxım,fikirləşim, kökün tərifini dəqiq deyim. Həə, bala ...
- Ay nənə, nə çox fikirləşdin!
- Fikirləşirəm ki, mənfi ədədin kvadrat kökü yoxdur, sıfırın kvadrat kökü 0-dır. Kvadratı 4-ə bərabər olan iki ədəd vardır : ± 2 .

Bir də fikirləşirəm ki, bunlardan hər ikisi, yoxsa biri 4-ün kvadrat kökündür.

- Nənə, düz fikirləşmisən, müsbət ədədin iki kvadrat kökü var, lakin onlardan biri həmin ədədin hesabi kvadrat kökü adlanır .
- Hə, hə ay bala, yadıma düşdü: kvadratı a-ya bərabər olan ədədə *a-nın kvadrat kökü* deyilir. Məsələn, 0-ın kvadrat kökü 0-dır, 9-un kvadrat kökü ±3-dür, 49-un kvadrat kökü ±7-dir, (- 4) -ün kvadrat kökü yoxdur , çünki kvadratı (- 4) -ə bərabər olan ədəd yoxdur.
- Nənə can, ədədin kvadrat kökünün tərifini doğru dedin. Bəs hesabi kvadrat kök hansıdır?
- Ay bala, hesabi kvadrat kökün tərifi dəqiq yadımda deyil. Lakin yuxarıda deyilənlərdən belə nəticəyə gəlirəm ki, 0 ədədi 0-ın , 1 ədədi 1-in , 3 ədədi 9-un , 7 isə 49-un hesabi kvadrat kökündür.
- Nənə, düzdür. *Tərif* isə belə verilir :

Kvadratı a-ya ($a \geq 0$) bərabər olan mənfi olmayan ədədə a ədədinin hesabi kvadrat kökü deyilir və $\sqrt{a}$ kimi işarə olunur .

Kvadratı a-ya ($a \geq 0$) bərabər olan ədədi b ilə ($b \geq 0$) işarə etsək, onda $b^2 = a \leftrightarrow \sqrt{a} = b$.

- Ay bala, belə çıxır ki, $\pm b$ və ya $\pm\sqrt{a}$ ədədləri a-nın kvadrat kökləridir.
- Elədir, nənə, hesabi kvadrat kökün tərifindən düzgün nəticə çıxardın. Məsələn,

a) 2 ədədi 4-ün hesabi kvadrat kökü , ± 2 isə 4-ün kvadrat kökləridir;

b) 3-ün hesabi kvadrat kökü $\sqrt{3}$, kvadrat kökləri isə $\pm\sqrt{3}$-dür .

- Ay bala, vadrat kök anlayışı tənliklərin həllində necə tətbiq olunur.
- Nənə, əvvəlcə, $x^2 = a$ tənliyinin həllini nəzərdən keçirək:

a) $a = 0$ olduqda $x = 0$; b) $a < 0$ olduqda $x = \emptyset$; c) $a > 0$ olduqda $x = \pm\sqrt{a}$.

Məsələn, $x^2 = 0$; $x^2 = 9$; $x^2 = 7$; $x^2 = -9$ tənliklərinin kökləri uyğun olaraq belədir:

$x = 0$; $x = \pm3$; $x = \pm\sqrt{7}$; $x = \emptyset$.

- Ay bala ,yazdığın bu düsturlara baxıb fikirləşirəm ki:

$a \geq 0$ olduqda $a = \sqrt{a^2}$;

$a \leq 0$ olduqda $a = -\sqrt{a^2}$.

Məsələn, $0 = \sqrt{0}$; $8 = \sqrt{64}$; $-17 = -\sqrt{289}$.

- Nənə can, çox lazımlı mülahizə söylədin. Rasional və irrasional ədədlərin müqayisəsində əsasən bu mülahizədən istifadə olunur.

İkinci məşğələ

Kvadrat köklərin xassələri

- Nənə , köklərin xassələri yadındadır?
- Yox , ay bala , deyəsən onlar yadımdan çıxıb.

- Onda mən bir az giriş verim ardını sən de.
- Hə, bala , de gəlsin!
- Bax, nənə yazıram , diqqətlə bax, özün nəticə çıxar , necə deyərlər, deməyi məndən yozmağı səndən:
($\sqrt{2})^2 = 2$, ($\sqrt{3})^2 = 3$, ($\sqrt{5})^2 = 5$.
- Hə, hə! Yadıma düşdü. *Kvadrat kökün kvadratı kökaltı ifadəyə bərabərdir*: $\boldsymbol{\left(\sqrt{a}\right)^2 = a}$.
- Doğrudur, nənə. Bu kökün əsas xassələrindən biridir. Sən yaz mən isbat edim.
İsbatı. Hesabi kökün tərifinə əsasən
$\sqrt{a} = \sqrt{a} \Rightarrow a = \left(\sqrt{a}\right)^2$.
- Ay bala, isbat bir başa tərifdən alınır ki!
Bəs xüsusi misallardan nəticə çıxarıb ümumi nəticəni yazmaq isbat deyil ki!?
- Nənə, bəzən xüsusi hallardan ümumi nəticə çıxarmaq doğru olmur. Məsələn, tutaq ki, ixtiyari $n \in N$ üçün $9n + 8$ ədədinin rəqəmləri cəmini tapmaq tələb olunur:
$n = 1 \Rightarrow 9 \cdot 1 + 8 = 17 \Rightarrow 1 + 7 = 8$;
$n = 2 \Rightarrow 9 \cdot 2 + 8 = 26 \Rightarrow 2 + 6 = 8$;
$n = 3 \Rightarrow 9 \cdot 3 + 8 = 35 \Rightarrow 3 + 5 = 8$;
$n = 4 \Rightarrow 9 \cdot 4 + 8 = 44 \Rightarrow 4 + 4 = 8$.
- Ay bala, elə hamısının rəqəmləri cəmi 8-dir ki?
- Nənə can, indi bu xüsusi hallardan nəticə çıxarıb desək ki, " İxtiyari $n \in N$ üçün $9n + 8$ ədədinin rəqəmləri cəmi 8-dir " onda bu hökm doğru olmayacaqdır, çünki $n = 9$ olduqda alınan ədədin rəqəmləri cəmi 17-dir, n-ə müxtəlif qiymətlər verməklə $9n + 8$ ədədinin rəqəmləri cəminin (8 , 17 , 26 və s.) müxtəlif ədədlərdən ibarət olduğunu görərik.
- Həə, ay bala, deməli ümumi nəticəni hələ isbat etmək lazımdır.Davam edək.
- Ay nənə, bəs $\sqrt{a^2}$ ifadəsi nəyə bərabərdir?
- Yox, ay bala, bunu dəqiq deyə bilmərəm.
- Qoçaq nənə, bilirəm ki, bir neçə nümunə yazsam , bu suala da cavab tapacaqsan:

$\sqrt{2^2} = 2$; $\sqrt{(-2)^2} = 2$; $\sqrt{(-3)^2} = 3$; $\sqrt{3^2} = 3$.

Dayan görüm , ay bala ! Həə, tapdım:
$$\sqrt{a^2} = |a| , \ a \in R .$$

Məsələn, $\sqrt{(3-\pi)^2} = |3-\pi| = \pi - 3$;

$\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = 2 - \sqrt{3}$; $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3} - 1$.

- Nənə, çox gözəl.Yazdığın xassənin isbatını da mən edim. Hesabi kökün tərifinə əsasən

$\sqrt{a^2} = b \geq 0 \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow |a| = |b| = b$.

- Ay bala, isbatlar mənə asan görünür.Növbəti xassələri özüm isbat edəcəm.
- Nənə, $a \in R$ şərti nə deməkdir?
- Yəni $\sqrt{a^2} = |a|$ bərabərliyi a-nın mənfi,sıfır və müsbət qiymətlərində doğrudur.
- Nənə, elədir. $R = (-\infty ; \infty)$ olduğu üçün bu şərti qısa və daha dəqiq belə demək olar:
$\sqrt{a^2} = |a|$ *bərabərliyi a-nın istənilən həqiqi qiymətlərində doğrudur.*
Davam edək. Növbəti xassəyə aid misallar:
$\sqrt{144 \cdot 49} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{49} = 12 \cdot 7 = 84$;
$\sqrt{324 \cdot 25 \cdot 169} = 18 \cdot 5 \cdot 13 = 1170$.
- Ay bala, dayan, kökün növbəti xassəsini deyim:
Hasilin kökü köklər hasilinə bərabərdir, yəni
$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} , \ (a \geq 0 , b \geq 0) .$$
İsbatı. $\sqrt{a \cdot b} = x \geq 0 \Rightarrow x^2 = ab =$
$= \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 \Rightarrow x = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.
- Afərin, nənə! Növbəti xassəni də çox gözəl ifadə və isbat etdin. Buradan lazımlı bir nəticə də alınır:
$a \geq 0$ olduqda $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a^2}$
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \left(\sqrt{a}\right)^3 = \sqrt{a^3}$.
Beləliklə: $\left(\sqrt{a}\right)^m = \sqrt{a^m}$, ($a \geq 0$) .
Nənə, sizin oxuduğunuz vaxt "həndəsi orta" anlayışı var idi?
- Yox, ay bala,yadımda deyil.
- Nənə can, ədədi orta tez-tez işlənən, həndəsi orta isə hərdən bir işlənən anlayışlardandır.Hər halda bu anlayışları və onlar arasındakı əlaqəni xatırlamaq lazımdır: $a \geq 0$ və $b \geq 0$ ədədləri üçün $\frac{a+b}{2}$ bu ədədlərin ədədi ortası, $\sqrt{ab}$ isə həndəsi ortası adlanır, belə ki: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
Davam edək. Növbəti xassəyə uyğun misallar:
$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$; $\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.
- Dayan , bala! Deyəsən , kəsrin kökünü yazırsan. Bax gör yazdığına uyğun xassəni düz deyəcəyəm?

Kəsrin kökü bərabərdir: surətin kökü bölək məxrəcin kökü, yəni
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} , \ (a \geq 0 , b > 0) .$$
- Çox gözəl , nənə! Bu xassəni belə də söyləmək olar :
Kəsrin kökü surət və məxrəcin kökləri nisbətinə bərabərdir.

- Ay bala , qoy bu xassəni də isbat edim:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = x \geq 0 \Rightarrow x^2 = \frac{a}{b} = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} .$$

Tərs mülahizə. *Kvadrat kökləri bölmək üçün kökaltı ifadələri bölüb qisməti kök altda yazmaq lazımdır:*

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} .$$

- Çox gözəl , ay nənə! İndi başa düşdüm ki, nə üçün istedadlı şagirdlərdən söz salmışdın.

- Ay bala, komplementə görə çox sağ ol!

- Nənə can ,deyəsən, çox yordum səni. Bu günə bu qədər kifayətdir. Məşğələni yekunlaşdırım gedək.

Ev tapşırığını çalışma nümunələri şəklində verirəm. Şagirdlər çalışmaların həll qaydalarını və üsullarını diqqətlə öyrənib növbəti dərsdə onları şərh edib öz bilik və bacarıqlarını nümayiş etdirəcəklər.

Üçüncü məşğələ

Kvadrat köklərin xassələrinin davamı

- Həəə , nənə can, harada qalmışdıq!
- Ay bala, kökün altı xassəsini öyrəndik.
- Nənə, hər bir xassə iki düsturu ifadə edir : soldan sağa və yaxud sağdan sola keçid. Onlardan biri düz , digəri tərs mülahizədir.

Vuruğun kvadrat kök işarəsi xaricinə çıxarılması

- Nənə can,vuruğu kök işarəsi xaricinə çıxarma və kök altına daxil etmə qaydalarını unutmamısan ki?
- Yox, bala, onlar yadımdadır. Bax gör düz yazıram:

$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$; $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$;
$\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

- Çox sağ ol, ay nənə, doğru yazdın!
- Mən isə ümumiləşdirmə aparım:

$$\sqrt{a^2 \cdot b} = |a|\sqrt{b} .$$

Buradan alırıq ki,

$\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$, *əgər* $a \geq 0$;

$\sqrt{a^2 \cdot b} = - a\sqrt{b}$, *əgər* $a \leq 0$.

Məsələn, $\sqrt{a^3} = a\sqrt{a}$; $\sqrt{-a^3} = - a\sqrt{-a}$.

- Ay bala, bu ikinci mənə aydın olmadı!
- Nənə, indi onu aydınlaşdıraram:

$\sqrt{-a^3} = \sqrt{-a^2 \cdot a} = |a|\sqrt{-a} = - a\sqrt{-a},$

çünki $\sqrt{-a^3}$ ifadəsinin təyin oblastı $a \leq 0$ şərtini ödəyən a-lardan ibarətdir. Ona görə də $|a| = - a$.

Vuruğun kvadrat kök işarəsi altına daxil edilməsi

Bəs, vuruğu kök altına necə daxil edirlər?

- Ay bala, tərsinə hərəkət etməklə vuruğu kök altına daxil edirlər.Məsələn,

$4\sqrt{3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = \sqrt{48}$; $5\sqrt{2} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{50}$.

- Nənə , çox gözəl , bəs $- 3\sqrt{5}$ ifadəsində mənfi vuruğu kök işarəsi altına necə daxil edirlər.
- Ay bala, bir dəqiqə! Əgər mənfi işarəsini kök altına daxil etsək, onda tərsinə qayıtsaq əvvəlki ifadəni almaq olmaz, ona görə də mənfi işarəsini kök işarəsi xaricində saxlayıb vuruğun kvadratını kökaltı ifadəyə vurmaq lazımdır:

$- 3\sqrt{5} = - \sqrt{9 \cdot 5} = - \sqrt{45}$.

- Afərin, ay nənə, çox gözəl və məntiqli mühakimə yürütdün! İcazə ver , dediyin qaydanı ümumiləşdirim:

$a \geq 0$, $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$,

$a \leq 0$, $a\sqrt{b} = - \sqrt{a^2 \cdot b}$.

Buradan belə nəticəyə gələ bilərik ki, hər bir ədədi kvadrat köklə ifadə etmək olar. Məsələn,

$2 = \sqrt{4}$; $-3 = - \sqrt{9}$; $|a| = \sqrt{a^2}$;

$1- \sqrt{2} = - \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$; $3 - \sqrt{2} = \sqrt{(3-\sqrt{2})^2}$.

Kəsrin məxrəcinin irrasionallıqdan azad edilməsi

- Nənə, kəsrin məxrəcinin irrasionallıqdan azad edilməsi yadındadır?
- Yox, ay bala, bu anlayışdan heç bir şey yadımda qalmayıb.
- Nənə can, kəsrin məxrəcinin irrasionallıqdan azad edilməsi kəsrin məxrəcinin kök işarəsindən azad edilməsidir.

Kvadrat kökün $(\sqrt{a})^2 = a$ xassəsindən istifadə edərək kəsrin məxrəcini (bəzən də surətini) kök işarəsindən (*irrasionallıqdan*) azad etmək olar. Misallar üzrə fikrimi izah edim.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{2\cdot 5} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$;

c) $\frac{2}{\sqrt{3}-2} = \frac{2(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} = \frac{2(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3})^2-2^2} =$

$= \frac{2(\sqrt{3}+2)}{3-4} = -2\sqrt{3} - 4$;

d) $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}$; e) $\frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{15}{2\sqrt{5}}$.

Bərabərlikdə kvadrat kök işarəsindən azadolma

Qeyd edək ki, bərabərliyin sağ və ya sol tərəfindəki ifadəni kök işarəsindən azad etmək olar (sağ və sol tərəflər mənfi olmadıqda) :

a) $\sqrt{x^2-7} = 3 \Rightarrow (\sqrt{x^2-7})^2 = 3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 7 = 9 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$;

b) $\sqrt{x^2-4} = -2$. Bu tənliyin hər tərəfini kvadrata yüksəltmək olmaz, çünki sağ tərəf mənfi ədəddir.

Sol tərəf isə mənfi deyil. **Cavab:** x = Ø.

- Ay bala, icazə ver fikrini yekunlaşdırım:

1) $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Rightarrow a = b \geq 0$;

2) $\sqrt{a} = b \geq 0 \Rightarrow a = b^2$;

3) $\sqrt{a} = b < 0 \Rightarrow a = \varnothing$.

- Afərin nənə, lazımlı qeydlər etdin. Mən də bu qeydlərə uyğun tərs mülahizələri qeyd edim:

Sağ və sol tərəfləri mənfi olmayan bərabərliyin hər tərəfindən kvadrat kök almaq olar:

$a = b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$.

Məsələn, a) $|x|^2 = x^2 \Rightarrow |x| = \sqrt{x^2}$;

b) $x^2 = 5 \Rightarrow |x| = \sqrt{5} \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$.

- Ay bala, bunları bilmirdim, mənə çox maraqlı göründü !

- Nənə can, bu günə bu qədər kifayətdir. Şagirdlər üçün bir misal həll edim gedək.

Misal. İsbat edin ki, $\sqrt{2}$ irrasional ədəddir.

İsbatı. Əksini fərz edək.Tutaq ki,

$\sqrt{2} \in Q \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{m}{n}$, (m , n ∈N),

burada $\frac{m}{n}$ ixtisar olunmayan kəsrdir.

$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow 2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \Rightarrow 2n^2 = m^2 \Rightarrow$

$m = 2k$ (k∈N) $\Rightarrow 2n^2 = 4k^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 = 2k^3 \Rightarrow n = 2p$, (p ∈ N).

Bu halda $\frac{m}{n}$ kəsri 2-yə ixtisar olunur.

Bu isə şərtə görə ola bilməz, yəni $\sqrt{2}$ ∈ İ .

Dördüncü məşğələ

Kub kökalma

Kub kökün tərifi

- Nənə, tili 3 sm olan kubun həcmi nəyə bərabərdir ?

- Ay bala, $3\cdot3\cdot3 = 27$ sm^3 .

- Nənə, həcmi 125 sm^3 olan kubun tili neçə santimetrdir?

- 5 sm, çünki 5-in kubu 125-ə bərabərdir.

- Nənə can son mülahizələri belə yekunlaşdırmaq olar:

" 125 ədədi 5-in kubu , 5 isə 125-in kub köküdür".

- Bildim, ay bala,kub kökalma əməli kuba yüksəltmə əməlinin tərsidir, yəni kubun həcmi verildikdə tilinin tapılması əməli kub kökalmadır.

- Nənə, yazdığımız kublara uyğun *kub köklər* belə yazılır:

$\sqrt[3]{0} = 0$, çünki $0^3 = 0$; $\sqrt[3]{1} = 1$, çünki $1^3 = 1$;

$\sqrt[3]{8} = 2$, çünki $2^3 = 8$; $\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt[3]{64} = 4$;

$\sqrt[3]{125} = 5$; $\sqrt[3]{0{,}027} = 0{,}3$ və s.

- Ay bala, fikirləşirəm ki, kvadrat kökdən fərqli olaraq mənfi ədəddən kub kök çıxır. Məsələn, $\sqrt[3]{-1} = -1$, çünki $(-1)^3 = -1$; $\sqrt[3]{-8} = -2$, çünki $(-2)^3 = -8$.

- Sağ ol, ay nənə , əla mühakimədir! Hətta kvadrat kökalma ilə kub kökalmanın oxşar və fərqli cəhətini də hiss etdin.

- Ay nənə, artıq kub kökün tərifini deyə bilərsən.

- Ay bala, bir dəqiqə!! Həə, bala ...

- Ay nənə, nə çox fikirləşdin!

- Fikirləşirəm ki, kub kök üçün hesabi kök sözünün nə mənası var ,onsuz da hər bir ədədin yalnız bir kub kökü var .

- Nənə, düz fikirləşmisən, ancaq yadda saxlamaq lazımdır ki, hesabi kök anlayışı yalnız mənfi olmayan ədədlər üçün nəzərdə tutulmuşdur .

- Aydındır, ay bala, kubu a-ya bərabər olan ədədə *a-nın kub kökü* deyilir və $\sqrt[3]{a}$ kimi işarə olunur:

$$b^3 = a \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{a} .$$

Məsələn,

$x^3 = 0$; $x^3 = 1$; $x^3 = 8$; $x^3 = -8$ tənliklərinin kökləri sağ tərəfdəki ədədlərin kub kökləri ilə təyin olunduğu üçün bu tənliklərin kökləri uyğun olaraq belədir:

$x = 0$; $x = 1$; $x = 2$; $x = -2$.

Kub kökün xassələri

- Nənə, bax gör yazdığım bu misallar hansı xassəyə aiddir:

- $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$; $(\sqrt[3]{3})^3 = 3$; $(\sqrt[3]{-8})^3 = -2$?

- Ay bala, bir dəqiqə!

Kub kökün kubu kökaltı ifadəyə bərabərdir:

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a .$$

İsbatı. Kub kökün tərifinə əsasən

$$b^3 = a \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{a} .$$

b-nin qiymətini soldakı bərabərlikdə yerinə yazsaq alırıq: $(\sqrt[3]{a})^3 = a$.

- Ay nənə, bəs $\sqrt[3]{a^3}$ ifadəsi nəyə bərabərdir?

- Ay bala, $\sqrt[3]{a^3} = x$ qəbul edək, onda $x^3 = a^3$. Bu tənliyin yeganə həlli var: x = a ,yəni

$$\sqrt[3]{a^3} = a .$$

- Afərin, nənə , doğrudur! Buradan belə bir nəticə alınır: ixtiyari $a \in R$ üçün

$$\sqrt[3]{a^3} = (\sqrt[3]{a})^3 = a .$$

- Ancaq, ay bala , kvadrat kökün buna oxşar xassəsi ixtiyari $a \in R$ üçün $\sqrt{a^2} = |a|$ idi ; yalnız $a \ge 0$ olduqda : $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a$.

- Elədir, ay nənə, bu da kvadrat və kub köklərinin fərqli cəhətlərindən biridir.

Məsələn, a) $\sqrt[3]{-1} = -1$;

$\sqrt{-1}$ - yoxdur;

b) $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$; $\sqrt{(-2)^2} = 2$;

c) $\sqrt{(3-\pi)^2} = |3-\pi| = \pi - 3$;

$$\sqrt[3]{(3-\pi)^3} = 3 - \pi .$$

Keçək növbəti xassəyə. Misal nümunələri:

$\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$;

$\sqrt[3]{27 \cdot 64} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 3 \cdot 4 = 12$.

- Ay bala ,dayan!

Hasilin kökü köklər hasilinə bərabərdir, yəni

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \text{ , (a, b} \in \text{R)}$$

İsbatı. $\sqrt[3]{a \cdot b} = x \Rightarrow x^3 = ab =$

$= (\sqrt[3]{a})^3 \cdot (\sqrt[3]{b})^3 = (\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b})^3$;

$x^3 = (\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b})^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$.

- Afərin, nənə! Növbəti xassəni də çox gözəl ifadə və isbat etdin. Buradan lazımlı bir *nəticə* də alınır:

$a \in$ R *olduqda* $\sqrt[3]{a^m} = (\sqrt[3]{a})^m$,

yəni kub kökaltı ifadənin dərəcəsini kök işarəsi xaricinə çıxarmaq olar.

Davam edək. Növbəti misal nümunələri:

$$\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4}; \quad \sqrt[3]{15\frac{5}{8}} = \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} .$$

- Ay bala, bir dəqiqə!

Kəsrin kökü surətlə məxrəcin kökləri nisbətinə bərabərdir:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \text{ , (} a \in \text{R , } b \neq 0 \text{) .}$$

İsbatı. $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = x \Rightarrow x^3 = \frac{a}{b} = \frac{(\sqrt[3]{a})^3}{(\sqrt[3]{b})^3} = \left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\right)^3$;

$x^3 = \left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\right)^3 \Rightarrow x = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.

- Nənə, keçək növbəti xassəyə. Misal nümunələri yazıram:

$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$.

- Dayan görüm, ay bala!

Vuruğun kub kök işarəsi xaricinə çıxarma və kök altına daxil etməyə aid misallar yazdın:

$$\sqrt[3]{a^3 \cdot b} = a\sqrt[3]{b}, \text{ (a , b} \in \text{R) .}$$

- Ay nənə, mən yalnız vuruğu kub kök işarəsi xaricinə çıxarmaya aid misallar yazdım!

- Nə fərqi var , ay bala, tərsinə keçid də vuruğun kök işarəsi altına daxil edilməsidir.

- Çox gözəl, ay nənə! Fitri istedadmışsan ki!

- Komplementə görə çox sağ ol , ay bala!

- Nənə can ,deyəsən, çox yordum səni. Bu günə bu qədər kifayətdir. Şagirdlər üçün lazımlı bir qeyd yazım gedək .

Qeyd. İsbat edək ki, $\sqrt[3]{2}$ irrasional ədəddir.

İsbatı. Əksini fərz edək.Tutaq ki,

$\sqrt[3]{2} \in Q \Rightarrow \sqrt[3]{2} = \frac{m}{n}$, (m , n $\in$N),

burada $\frac{m}{n}$ ixtisar olunmayan kəsrdir.

$\sqrt[3]{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow 2 = \left(\frac{m}{n}\right)^3 \Rightarrow 2n^3 = m^3 \Rightarrow$

$m = 2k$ (k$\in$N) $\Rightarrow 2n^3 = 8k^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^3 = 4k^3 \Rightarrow n = 2p$, (p $\in$ N).

Bu halda $\frac{m}{n}$ kəsri 2-yə ixtisar olunur.

Bu isə şərtə görə ola bilməz, yəni $\sqrt[3]{2} \in$ İ .